

Matheſis. Analyſis finitor. et infinitor. 361.

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONHARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE

PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.



IMPENSIS

ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE

1755.





PRAEFATIO.

Quid sit Calculus Differentialis, atque in genere Analysis Infinitorum? iis qui nulla adhuc eius cognitione sunt imbuti, vix explicari potest: neque hic, vti in aliis disciplinis fieri solet, exordium tractationis a definitione commode sumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; sed quoniam ad eam intelligendam eiusmodi opus est notionibus, non solum in vita communi, verum etiam in ipsa Analysi finitorum minus vsitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione euolui atque explicari solent: quo fit, vt eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam satis dilucide fuerint perspecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles versatur: etsi enim omnis quantitas sua natura in infinitum augeri & diminui po-

teſt; tamen dum calculus ad certum quoddam inſtitutum dirigitur, aliae quantitates conſtanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctionis ac diminutionis variari: ad quam diſtinctionem notandam illae quantitates conſtantes, hae vero variabiles vocari ſolent; ita vt hoc diſcrimen non tam in rei natura, quam in quaeſtionis, ad quam calculus refertur, indole ſit poſitum. Quoniam haec differentia inter quantitates conſtantes & variabiles exemplo maxime illuſtrabitur, conſideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii exploſi; ſiquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in iſta inueſtigatione eſt habenda: primo ſcilicet quantitas pulueris pyrii; tum eleuatio tormenti ſupra horizontem; tertio longitudo iactus ſuper plano horizontali; quarto tempus, quo globus exploſus in aere verſatur: ac niſi xpe rimenta eodem tormento inſtituantur, inſuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a varietate tormenti & globi animum remoueamus, ne in quaeſtiones nimium implicatas incidamus. Quodſi ergo ſeruata perpetuo eadem

pul-

pulueris pyrii quantitate, eleuatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulueris seu vis impulsus erit quantitas constans, eleuatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; siquidem pro omnibus eleuationis gradibus has res definire velimus, vt inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus eleuationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si seruata eadem tormenti eleuatione, quantitas pulueris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim eleuatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulueris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, vt mutata vna reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulueris

pyrii eadem manebat, mutata tormenti eleuatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; suntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab eleuatione tormenti, hacque mutata simul certas quasdam mutationes patientes: posteriori vero casu pendent a quantitate pulueris pyrii; cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, vt his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus vna quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x *denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae vtcunque ab* x *pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuiusmodi sunt quadratum eius* xx, *aliaeue potentiae quaecunque, nec non quantitates ex his vtcunque compositae; quin etiam transcendentes, & in genere quaecunque ita ab* x *pendent, vt aucta vel diminuta* x *ipsae mutationes recipiant. Hinc iam nascitur quaestio, qua quaeritur, si quantitas* x *data quantitate siue augeatur siue diminuatur, quantum inde quaeuis eius functiones immutentur,*

tur, ſeu quantum incrementum decrementumue accipiant. Caſibus quidem ſimplicioribus haec quaeſtio facile reſoluitur: ſi enim quantitas x *augeatur quantitate* ω, *eius quadratum* xx *hinc incrementum capiet* $2x\omega + \omega\omega$; *ſicque incrementum ipſius* x *ſe habebit ad incrementum ipſius* xx, *vt* ω *ad* $2x\omega + \omega\omega$, *hoc eſt, vt* 1 *ad* $2x + \omega$; *ſimilique modo in aliis caſibus ratio incrementi ipſius* x *ad incrementum, vel decrementum, quod quaevis eius functio inde adipiſcitur, conſiderari ſolet. Eſt vero inueſtigatio rationis huiusmodi incrementorum ipſa non ſolum maximi momenti, ſed ei etiam vniuerſa Analyſis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, ſumamus exemplum ſuperius quadrati* xx, *cuius incrementum* $2x\omega + \omega\omega$, *quod capit, dum ipſa quantitas* x *incremento* ω *augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, vt* $2x + \omega$ *ad* 1; *vnde perſpicuum eſt, quo minus ſumatur incrementum* ω, *eo propius iſtam rationem accedere ad rationem* $2x$ *ad* 1; *neque tamen ante prorſus in hanc rationem abit, quam incrementum illud* ω *plane euaneſcat. Hinc intelligimus, ſi quantitatis variabilis* x *incrementum* ω *in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius* xx *in-*

incrementum inde oriundum quidem euanescere, verumtamen ad id rationem tenere vt 2x *ad* 1*; & quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius* x *est intelligendum; quippe quarum incrementa euanescentia, quae capiunt, dum ipsa quantitas* x *incrementum euanescens sumit, ad hoc ipsum certam & assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem* Calculi Differentialis, *qui est* methodus determinandi rationem incrementorum euanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum euanescens tribuitur: *hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis euanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamuis enim praecepta, vti vulgo tradi solent, ad ista incrementa euanescentia defi-*

definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata, qui conuenientissime ita definitur, vt dicatur esse methodus ex cognita ratione incrementorum euanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inueniendi. *Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa euanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parua quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, vt omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati* x *incrementum tribuatur* ω, *vt abeat in* $x + \omega$, *eius quadratum* xx *abibit in* $xx + 2x\omega + \omega\omega$, *ideoque incrementum capit* $2x\omega + \omega\omega$; *quare incrementum ipsius* x, *quod est* ω, *se habebit ad incrementum quadrati, quod est* $2x\omega + \omega\omega$, *vti* 1 *ad* $2x + \omega$; *quae ratio abit in* 1 *ad* $2x$, *tum demum, cum* ω *euanescit. Fiat igitur*

$\omega = 0$, *& ratio iſtorum incrementorum euaneſcentium, quae ſola in calculo differentiali ſpectatur, vtique eſt vt* 1 *ad* 2x; *neque viciſſim haec ratio veritati eſſet conſentanea, niſi reuera illud incrementum* ω *euaneſceret, penitusque nihilo fieret aequale. Quodſi ergo hoc nihilum per* ω *indicatum referat incrementum quantitatis* x, *quia hoc ſe habet ad incrementum quadrati* xx *vt* 1 *ad* 2x, *erit quadrati* xx *incrementum* $= 2x\omega$, *ideoque etiam nihilo aequale; vnde ſimul conſtat amnihilationem horum incrementorum non obſtare, quominus eorum ratio, quae eſt vt* 1 *ad* 2x *ſit determinata. Quod nihilum iam hic littera* ω *exhibetur, id in calculo differentiali, quia vt incrementum quantitatis* x *ſpectatur, ſigno* dx *repraeſentari, eiusque differentiale vocari ſolet; poſitoque* dx *loco* ω, *ipſius* xx *differentiale erit* 2xdx. *Simili modo oſtenditur fore cubi* x^3 *differentiale* $=$ 3xxdx, *& in genere cuiusque dignitatis* x^n *differentiale fore* $= nx^{n-1}dx$. *Quaecunque autem aliae functiones ipſius* x *proponantur, in calculo differentiali regulae traduntur eorum differentialia inueniendi: verum perpetuo tenendum eſt, cum haec differentialia abſolute ſint*

ni-

nihila, ex iis nihil aliud concludi, nisi eorum rationes mutuas, quae vtique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes, quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parua non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite paruarum, quae non penitus euanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parua negligerentur, merito esse suspectas: quantumuis enim exigua haec infinite parua concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul rejiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per Calculum differentialem eaedem conclusiones ac per Geometriam

elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam si ea infinite parua, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde necessario error, isque eo maior, quo magis ea coaceruantur, resultare debet; hocque si minus eueniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compensantur, esset tribuendum, quam ipse calculus ab erroris suspicione liberaretur. Quodsi autem nullo nouo errore huiusmodi compensatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipsum, quod volo, euincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & absolute pro nihilo esse habenda; neque infinite parua, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parua ita describuntur, vt instar puluisculorum respectu vasti montis vel etiam totius globi terrestris spectari debeant: etsi enim qui magnitudinem totius globi terrestris calculo determinare susceperit, ei error non vnius sed plurium millium puluisculorum facile condonari soleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque grauis esset haec obiectio, si vllam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu est, quid lucri inde sperent, qui in-

infinite parua a nihilo diſtingui volunt: metuunt autem, ne, ſi plane euaneſcant, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perduci ſentiunt, tollatur: quomodo enim abſolute nihila inter ſe comparari queant, nullo modo concipi poſſe profitentur. Neceſſe ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem inſtituant: hanc tamen magnitudinem tam paruam admittere coguntur, vt quaſi eſſet nulla, ſpectari ac ſine errore in calculo negligi poſſit. Neque tamen certam ac definitam ipſi magnitudinem, licet incomprehenſibiliter paruam, aſſignare audent; ſemper enim ſi eam bis terue minorem aſſumerent, eodem modo comparationes ſe eſſent habiturae. Ex quo perſpicuum eſt, nihil plane ipſam magnitudinem ad comparationem inſtituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamſi illa magnitudo penitus euaneſcat. Ex dictis autem ſupra manifeſtum eſt, eam comparationem, quae in calculo differentiali ſpectatur, ne locum quidem habere, niſi illa incrementa prorſus euaneſcant: incrementum enim quantitatis x, *quod in genere indicauimus per* ω, *ad incrementum quadrati* xx, *quod eſt* $2x\omega + \omega\omega$, *rationem ha-*

habet vt 1 *ad* $2x + \omega$; *quae ſemper differt a ratione* 1 *ad* $2x$, *niſi ſit* $\omega = 0$; *at ſi ſtatuamus eſſe* $\omega = 0$, *tum demum vere affirmare poſſumus, hanc rationem fieri exacte vt* 1 *ad* $2x$. *Interim tamen perſpicitur, quo minus illud incrementum* ω *accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; vnde non ſolum licet, ſed etiam naturae rei conuenit, haec incrementa primum vt finita conſiderare, atque etiam in figuris, ſi quibus opus eſt ad rem illuſtrandam, finite repraeſentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, ſicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quaſi rationem vltimam incrementorum illorum conſtituit, verum eſt obiectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is ieciſſe exiſtimandus eſt, cui primum in mentem venit, has rationes vltimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa, dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum euaneſcunt, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem ſpeculationis veſtigia deprehendimus apud antiquiſſimos Aucto-*

tores, quibus idcirco idea quaedam leuisque cognitio Analysis infinitorum abiudicari nequit. Paullatim deinde haec scientia maiora accepit incrementa, neque subito ad id fastigium, in quo nunc cernitur, est euecta; etiamsi quidem in ea multo plura adhuc sint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, vtcunque sint compositae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa euanescentia inter se comparandi; sed sensim haec inuentio ad functiones continuo magis complicatas processit. Quod scilicet ad functiones rationales attinet, ratio vltima, quam earum incrementa euanescentia inter se tenent, multo ante NEUTONI *ac* LEIBNIZII *tempora assignari potuit; ita vt Calculus differentialis, quatenus ad solas functiones rationales applicatur, diu ante haec tempora inuentus sit censendus. Tum vero nullum est dubium, quin* NEUTONO *eam Calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales versatur, acceptam referre debeamus; ad quam insigni suo Theoremate de euolutione generali potestatum binomii feliciter est deductus, quo eximio inuento limites calculi dif-*

differentialis iam mirifice erant amplificati. LEIBNIZIO *autem non minus ſumus obſtricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut ſingulare artificium ſpectatum, in formam diſciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in ſyſtema collegerit, ac dilucide explicauerit. Hinc enim maxima ſubſidia ſuggerebantur, ad hunc calculum vlterius excolendum, & ea, quae adhuc deſiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur ſtudio cum Ipſius* LEIBNIZII, *tum* BERNOUILLIORUM *ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, ſunt promoti, tum vero etiam ſolidiſſima fundamenta Calculi integralis conſtituta; quibus inſiſtentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt.* NEUTONUS *vero etiam ampliſſima dederat ſpecimina Calculi integralis, cuius prima inuentio, cum a prima origine calculi differentialis vix ſeparari queat, non ita abſolute conſtitui poteſt; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda reſtat, hic calculus ne nunc quidem pro abſolute inuento haberi poteſt; ſed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre*

con-

contigerit, id grata mente agnoscere debemus. Atque haec de gloria inuentionis huius calculi tenenda esse iudico, de qua quidem antehac tantopere est disceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae isti calculo a diuersarum nationum Mathematicis imponi solent, attinet, ea omnia huc redeunt, vt cum data hic definitione egregie consentiant: siue enim incrementa illa euanescentia, quorum ratio consideratur, differentialia vocentur, sive fluxiones, ea semper nihilo aequalia sunt intelligenda; in quo vera notio infinite paruorum constitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus secundi & altiorum ordinum curiose magis quam vtiliter sunt disputata, reddentur planissima, cum omnia per se aeque euanescant, neque ea vnquam per se, sed potius eorum relatio mutua spectari soleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa euanescentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, si & huius functionis incrementum euanescens cum aliis conferatur, res ad differentialia secunda referri est censenda; sicque porro progressio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita vt semper quantitates finitae reuera animo ob-

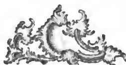
verſentur, ſignaque differentialium tantum ad eas commode repraeſendandas adhibeantur. Primo quidem intuitu iſta Analyſis infinitorum deſcriptio plerisque leuis ac nimis ſterilis videatur, etſi ſpecies illa arcana infinite paruorum re haud plus polliceatur: verum ſi rationes, quae inter incrementa euaneſcentia functionum quarumuis intercedunt, probe cognoſcamus, haec cognitio ſaepenumero per ſe maximi eſt momenti; tum vero in plerisque iisque maximi arduis inueſtigationibus ita eſt neceſſaria, vt ſine eius adminiculo nihil plane intelligi poſſit. Veluti ſi quaeſtio ſit de motu globi ex tormento exploſi, ſimulque ratio reſiſtentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per ſpatium finitum ſit futurus, nullo modo ſtatim definire licet, dum tam directio ſemitae, in qua globus incedit, quam ipſius celeritas, a qua reſiſtentia pendet, quouis momento immutatur. Quo minus autem ſpatium, per quod motus fiat, conſideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodſi autem illud ſpatium plane euaneſcens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum reſiſtentiae per regulas motus accu-

cu-

curate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse esse arbitror vsum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel leuissimam inuestigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingrediatur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, vt rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes vsus huius Analyseos sublimioris vsque adeo diffunditur, vt omnia, quae sine eius interuentu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro vniuersum Calculum differentialem ex veris principiis deriuare, atque ita copiose pertractare, vt nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inuenta. In duas opus

diuisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inueniendi; siue functiones vnicam variabilem siue duas pluresue inuoluant. In altera autem parte amplissimum huius calculi vsum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; vbi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicaui. De vsu autem huius calculi in Geometria linearum curuarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, vt adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent euoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, vt ne vlla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.



IN-



INDEX CAPITUM

PARTIS PRIORIS.

PARTIS POSTERIORIS.

Cap.



Erro-



Errores Typographici.

pag. 509. lin 3. loco $z = xx$ lege $z = xx + x$

pag. 513. lin. 14. loco $\frac{(z'-z)}{a^x(a-1)^2}$ lege $\frac{(z'-az)}{a^x(a-1)^2}$.

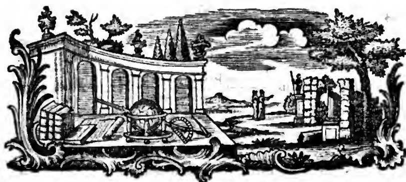
INSTI-

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS

PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI
EXPLICATIONEM.



CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.



I.

Ex iis, quae in Libro ſuperiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus ſunt expoſita, perſpicuum eſt, prout quantitas variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati. Sic, ſi quantitas variabilis x capiat incrementum ω, ita vt pro x ſcribatur $x+\omega$, omnes functiones ipſius x, cuiusmodi ſunt xx; x^3; $\frac{a+x}{xx+aa}$, alios induent valores: ſcilicet xx abibit in $xx+2x\omega+\omega\omega$;

x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a+x}{aa+xx}$ transmutabitur in $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$. Huiusmodi ergo alteratio ſemper orietur, niſi functio ſpeciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, reuera autem ſit quantitas conſtans, veluti x^0: quo caſu talis functio inuariata manet, vtcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum ſint ſatis expoſita, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus vniuerſa analyſis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x: pro qua ſucceſſiue valores in arithmetica progreſſione procedentes ſubſtituantur, ſcilicet: x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c. ac denotet y^{I} valorem quem functio y induit, ſi in ea loco x ſubſtituatur $x+\omega$; ſimili modo ſit y^{II} is ipſius y valor, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c. valores ipſius y, qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c. ita vt iſti diuerſi valores ipſarum x & y ſequenti modo ſibi reſpondeant:

$$x;\ x+\omega;\ x+2\omega;\ x+3\omega;\ x+4\omega;\ x+5\omega;\ \&c.$$
$$y;\ y^{\text{I}};\ y^{\text{II}};\ y^{\text{III}};\ y^{\text{IV}};\ y^{\text{V}};\ \&c.$$

3. Quemadmodum ſeries arithmetica x; $x+\omega$; $x+2\omega$; &c. in infinitum continuari poteſt, ita ſeries ex functione y orta y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendebit ab indole functio-

tionis y. Sic, si fuerit $y=x$; vel $y=ax+b$; series y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y=\frac{a}{bx+c}$, series prodibit harmonica: sin autem sit $y=a^x$, habebitur series geometrica. Neque vlla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius y oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x, ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare, cum omnis series certa lege formata habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, vti in doctrina de seriebus fusius explicari solet.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. inter se discrepant, attendimus; quas vt ad differentialium naturam accommodemus, sequentibus signis indicemus, vt sit

$$y^{\mathrm{I}}-y=\Delta y;\quad y^{\mathrm{II}}-y^{\mathrm{I}}=\Delta y^{\mathrm{I}};\quad y^{\mathrm{III}}-y^{\mathrm{II}}=\Delta y^{\mathrm{II}};\ \&c.$$

Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x+\omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega=1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali vti, qui pro arbitrio augeri diminuiue queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^{I} primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negatiuo agnoscitur.

 5. Quo-

5. Quoniam y^{II} oritur ex y, ſi loco x ſcribatur $x+2\omega$; manifeſtum eſt eandem quantitatem eſſe orituram, ſi primum pro x ponatur $x+\omega$, tumque denuo $x+\omega$ loco x ſtatuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I}, ſi in hoc loco x ſcribatur $x+\omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipſius y^{I} quod capit poſito $x+\omega$ loco x; ſicque Δy^{I} vocatur ſimili modo *Differentia* ipſius y^{I}. Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipſius y^{II}, ſeu eius incrementum, quod accipit, ſi loco x ponatur $x+\omega$; atque Δy^{III} erit differentia, ſeu incrementum ipſius y^{III}, & ita porro. Hoc pacto ex ſerie valorum ipſius y, qui ſunt y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. obtinebitur ſeries differentiarum Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; &c. quae inueniuntur, ſi quilibet terminus illius ſeriei a ſequente ſubtrahatur.

6. Inuenta ſerie differentiarum, ſi ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a ſequente ſubtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae ſecundae;* hocque modo per characteres conuenientiſſime repraeſentantur, vt ſignificet:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta y &= \Delta y^{I} - \Delta y \\ \Delta\Delta y^{I} &= \Delta y^{II} - \Delta y^{I} \\ \Delta\Delta y^{II} &= \Delta y^{III} - \Delta y^{II} \\ \Delta\Delta y^{III} &= \Delta y^{IV} - \Delta y^{III} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia ſecunda ipſius y; $\Delta\Delta y^{I}$ differentia ſecunda ipſius y^{I}, & ita porro. Simili autem modo ex differentiis ſecundis, ſi denuo earum differentiae

tiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo ſcribendae $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{I}$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; &c. ſicque vltra quousque libuerit.

5. Repraeſentemus ſingulas has differentiarum ſeries ita in ſchemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y; y^{I} ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^{V} ; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy ; Δy^{I} ; Δy^{II} ; Δy^{III} ; Δy^{IV} ; &c.

DIFFERENTIAE SECUNDAE.

$\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^{I}$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; &c.

DIFFERENTIAE TERTIAE.

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{I}$; $\Delta^3 y^{II}$; &c.

DIFFERENTIAE QUARTAE.

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; &c.

DIFFERENTIAE QUINTAE.

$\Delta^5 y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quosque terminos a ſequentibus ſubtrahendo. Quacunque ergo functione ipſius x loco y ſubſtituta, quoniam valores

y^{I}

y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. per notas compoſitiones facile formantur, ex iis ſine labore ſingulae differentiarum ſeries invenientur.

8. Ponamus eſſe $y = x$; eritque $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$: & ita porro. Vnde differentiis ſumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipſius x erunt conſtantes, ac proinde differentiae ſecundae omnes euaneſcent; pariterque differentiae tertiae, & ſequentium ordinum omnes. Cum igitur ſit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iſte character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x, cuius valores ſucceſſiui x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. arithmeticam progreſſionem conſtituere aſſumuntur, differentiae Δx, Δx^{I}, Δx^{II}, &c. erunt conſtantes atque inter ſe aequales; ac propterea erit $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^{3} x = 0$, $\Delta^{4} x = 0$, ſicque porro.

9. Pro valoribus ipſius x, qui ipſi ſucceſſiue tribuuntur, progreſſionem arithmeticam hic aſſumſimus, ita vt horum valorum differentiae primae ſint conſtantes, ſecundae ac reliquae omnes euaneſcant. Quod etſi ab arbitrio noſtro pendet, cum aliam quamcunque progresſionem aeque adhibere potuiſſemus; tamen progreſſio arithmetica prae reliquis omnibus commodiſſime vſurpari ſolet, cum quod ſit ſimpliciſſima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere poteſt, pateat. Tribuendo enim ipſi ω valores tam negatiuos quam affirmatiuos, in hac ſerie valorum ipſius x omnes omnino continentur quantita-

titates reales, quae in locum ipsius x substitui possunt: contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negatiuos nullus aditus patuisset. Hanc ob causam variabilitas functionum y ex valoribus ipsius x progressionem arithmeticam constituentibus aptissime diiudicatur.

10. Vti est $\Delta y = y^{\text{I}} - y$, ita differentiae vlteriores quoque ex terminis primae seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. definiri possunt.

Cum enim sit $\Delta y^{\text{I}} = y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$

erit

$$\Delta\Delta y = y^{\text{II}} - 2y^{\text{I}} + y$$

&

$$\Delta\Delta y^{\text{I}} = y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}$$

ideoque

$$\Delta^3 y = \Delta\Delta y^{\text{I}} - \Delta\Delta y = y^{\text{III}} - 3y^{\text{II}} + 3y^{\text{I}} - y$$

simili modo erit

$$\Delta^4 y = y^{\text{IV}} - 4y^{\text{III}} + 6y^{\text{II}} - 4y^{\text{I}} + y$$

&

$$\Delta^5 y = y^{\text{V}} - 5y^{\text{IV}} + 10y^{\text{III}} - 10y^{\text{II}} + 5y^{\text{I}} - y$$

quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in potestatibus Binomii obseruatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis seriei y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. determinatur, ita differentia secunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiusque ordinis ipsius y, simili modo differentiae omnium ordinum ipsius y^{I}; y^{II}; &c. definientur.

11. Propoſita ergo quacunque Functione y ſingulae eius *differentiae*, tam prima quam ſequentes, quae quidem differentiae ω, qua valores ipſius x progrediuntur, reſpondent, poterunt inueniri. Neque vero ad hoc opus eſt, vt ſeries valorum ipſius y vlterius continuetur: quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur, ſi in y loco x ſcribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^{I} ipſa functio y ſubtrahatur; ita differentia ſecunda $\Delta\Delta y$ obtinebitur ſi in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, vt oriatur Δy^{I}, atque Δy a Δy^{I} ſubtrahatur. Simili modo ſi differentiae ſecundae $\Delta\Delta y$ capiatur Differentia, eam ſubtrahendo a valore, quem induit, ſi loco x ponatur $x + \omega$, proueniet differentia tertia $\Delta^{3} y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^{4} y$, &c. Dummodo ergo quis nouerit differentiam primam cuiusque functionis inueſtigare, ſimul poterit differentiam ſecundam, tertiam, omnesque ſequentes inuenire: propterea quod differentia ſecunda ipſius y nil aliud eſt, niſi differentia prima ipſius Δy; & differentia tertia ipſius y nil aliud, niſi differentia prima ipſius $\Delta\Delta y$; ſicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusue partibus compoſita, vt ſit $y = p + q + r +$ &c.; tum, quia eſt $y^{I} = p^{I} + q^{I} + r^{I} +$ &c., erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ &c., ſimilique modo porro $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ &c., vnde inuentio differentiarum, ſi functio propoſita ex partibus fuerit compoſita, non parum facilior redditur. Quod ſi vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q, nempe $y =$

$y = pq$, quia erit $y^{I} = p^{I}q^{I}$, & $p^{I} = p + \Delta p$ atque $q^{I} = q + \Delta q$, fiet $p^{I}q^{I} = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$, hincque $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$. Vnde, si sit p quantitas constans $= a$, ob $\Delta a = o$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a\Delta q$, similique modo differentia secunda $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, tertia $\Delta^3 q = a\Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra est aggregatum ex aliquot potestatibus ipsius x; omnes differentias functionum rationalium integrarum inuenire poterimus, si differentias potestatum tantum exhibere nouerimus. Hancobrem singularum potestatum quantitatis variabilis x differentias inuestigemus in sequentibus exemplis.

Cum autem sit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiamsi x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus esse $\Delta x = \omega$; & $\Delta\Delta x = 0$, simulque differentiae sequentium ordinum euanescunt. Quae cum sint manifesta a Potestate secunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Inuenire differentias omnium ordinum potestatis x^2.

Cum hic sit $y = x^2$, erit $y' = (x + \omega)^2$; ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae est differentia prima. Iam ob ω quantitatem constantem, erit $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentias omnium ordinum potestatis x^3.

Ponatur $y = x^3$; &, cum sit $y^{I} = (x + \omega)^3$,

erit

erit

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

quae eſt differentia prima. Deinde ob.

$$\Delta . xx = 2\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta . 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

&

$$\Delta . 3\omega^2 x = 3\omega^3 ; \quad \& \quad \Delta . \omega^3 = 0 :$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3 : \quad \text{atque} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3 :$$

Differentiae vero ſequentes euaneſcent.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentias omnium ordinum poteſtatis x^4.

Poſito $y = x^4$; ob $y^1 = (x + \omega)^4$

erit

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 ;$$

quae eſt differentia prima. Tum ex praecedentibus eſt:

$$\Delta . 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$
$$\Delta . 6\omega^2 x^2 = \ldots \ldots 12\omega^3 x + 6\omega^4$$
$$\Delta . 4\omega^3 x = \ldots \ldots \ldots \ldots + 4\omega^4$$
$$\Delta . \omega^4 = \ldots \ldots \ldots \ldots 0$$

His colligendis erit differentia ſecunda:

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4 :$$

Quia deinde porro eſt:

$$\Delta . 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$
$$\Delta . 24\omega^3 x = \ldots \ldots 24\omega^4$$
$$\Delta . 14\omega^4 = \ldots \ldots 0$$

pro-

prodibit differentia tertia:

$$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

atque tandem differentia quarta:

$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$

quae cum sit constans, differentiae sequentium ordinum euanescent.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentias cuiusuis ordinis potestatis x^n.

Ponatur $y = x^n$; &, cum sit $y^{I} = (x+\omega)^n$; $y^{II} = (x+2\omega)^n$; $y^{III} = (x+3\omega)^n$; &c. Potestates euolutae dabunt:

$$y = x^n$$

$$y^{I} = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

 Hinc,

Hinc, differentiis sumendis, prodibit:

$$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{I} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}7\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}19\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}37\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

sumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}14\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{I} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}50\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{II} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}18\omega^{3}{}^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}110\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex

Ex his per subtractionem vlterius eruitur:

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y^1 = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} 60\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

atque porro:

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

14. Quo lex, secundum quam istae differentiae potestatis x^n progrediuntur, facilius perspiciatur. Ponamus primo breuitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

&c.

De-

Deinde ſequens formetur Tabula, quae pro ſingulis differentiis inſeruiet:

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	&c.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	&c.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254;	&c.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796;	&c.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824;	&c.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000;	&c.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520;	&c.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120;	&c.

in qua Tabula numerus cuiusuis ſeriei inuenitur, ſi eiusdem ſeriei praecedens ad numerum ſupra poſitum addatur, atque ſumma per indicem charactéri Δ infixum multiplicetur. Sic, in ſerie differentiae $\Delta^5 y$ reſpondente, terminus 16800 inuenitur, ſi praecedens 1800 ad ſupra ſcriptum 1560 addatur, atque Summa 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac conſtituta, ſingulae differentiae Poteſtatis $x^n = y$ ſequenti modo ſe habebunt:

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \&c.$$

Ge-

Generatim autem poteſtatis x^n differentia ordinis m, ſeu $\Delta^m y$, ſequenti modo exprimetur.

Sit

$$\mathrm{I} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ \ldots\ m};$$

$$\mathrm{K} = \frac{n-m}{m+1}\,\mathrm{I};$$

$$\mathrm{L} = \frac{n-m-1}{m+2}\,\mathrm{K};$$

$$\mathrm{M} = \frac{n-m-2}{m+3}\,\mathrm{L};$$

&c.

Deinde vero ſit:

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1}m^m + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(m-2)^m + \&c.$$

$$6 = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1}m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(m-2)^{m+1} + \&c.$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1}m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-1)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(m-2)^{m+2} + \&c.$$

quibus valoribus inuentis erit

$$\Delta^m y = \alpha \mathrm{I} \omega^m x^{n-m} + 6 \mathrm{K} \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma \mathrm{L} \omega^{m+2} x^{n-m-2}\ \&c.$$

cuius expreſſionis ratio ex modo, quo ſingulae differentiae ex valoribus y, y', y'', y''', &c. eliciuntur, ſponte ſequitur.

16. Ex his perſpicuum eſt, ſi exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus, tandem ad differentias perueniri conſtantes, hisque vlteriores omnes eſſe $= 0$. Sic erit

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta^2.\ x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3.\ x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4.\ x^4 = 24\omega^4 \quad \text{\& tandem}$$
$$\Delta^n.\ x^n = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n.\ \omega^n$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias conſtantes deducetur. Scilicet, functio ipſius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet conſtantem $= a\omega$. Functio ſecundi gradus $axx + bx + c$ differentiam ſecundam habebit conſtantem $= 2a\omega\omega$, functionis autem tertii gradus differentia tertia erit conſtans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo inuenimus differentias poteſtatis x^n, quoque latius patet, atque ad eas poteſtates, quarum exponens n eſt numerus negatiuus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiusmodi poteſtatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum ſecundarum ac ſequentium non tam facile cernitur: erit ergo,

$$\Delta.\ x = \omega$$
$$\Delta.\ x^2 = 2\omega x + \omega^2$$
$$\Delta.\ x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta.\ x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \ \text{\&c.}$$

Si-

Simili modo vero erit

$$\Delta.\, x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \&c.$$

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta.\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

$$\Delta.\, x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \&c.$$

$$\Delta.\, x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \&c.$$

18. Apparet itaque has differentias, si exponens ipsius x non fuerit numerus integer affirmatiuus, in infinitum progredi, seu ex terminorum numero infinito constare. Interim tamen eaedem differentiae quoque per expressionem finitam exhiberi possunt. Cum enim, posito $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, sit $y^{1} = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta.\, x^{-1} = \Delta.\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$; vnde, si fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in seriem conuertatur, prodit expressio superior. Simili modo erit

$$\Delta.\, x^{-2} = \Delta.\frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta.\sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x},\ \&\ \Delta.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae si more solito in series explicentur, superiores expressiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, siue fractarum siue irrationalium, inueniri possunt: sic, si quaeratur differentia prima fractionis $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia est $y^{1} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit $\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx}$, quae expressio quoque in seriem infinitam conuerti potest.

Pona-

Ponatur $aa + xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$;
erit

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

Restitutis ergo loco P & Q valoribus erit:

$$\Delta y = \Delta.\frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x + \omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa+xx)^3}$$
$$- \frac{8\omega^3 x^3 + 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x + \omega^6}{(aa+xx^4} + \&c.$$

qui termini si secundum potestates ipsius ω ordinentur erit:

$$\Delta.\frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2} + \frac{3\omega^2(xx-aa)}{(aa+xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

20. Similibus seriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi possunt.

Sit proposita ista functio $y = \surd(aa+xx)$;
&, cum sit $y^{\text{I}} = \surd(aa+xx+2\omega x+\omega\omega)$,
ponatur $aa+xx = P$ & $2\omega x + \omega\omega = Q$

erit $\Delta v = \surd(P+Q) - \surd P = \frac{Q}{2\surd P} - \frac{QQ}{8P\surd P} + \frac{Q^3}{16P^2\surd P} -$ &c.

vnde fiet

$$\Delta y = \Delta.\, \sqrt{(aa+xx)} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} + \&c.$$

vel

$$= \frac{\omega x}{\sqrt{(aa+xx)}} + \frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}} - \frac{aa\omega^3 x}{2(aa+xx)^2\sqrt{(aa+xx)}} \&c.$$

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipsius x, quae sit y, differentiam hac forma exprimi posse, vt sit

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

existentibus P, Q, R, S, &c. certis ipsius x functionibus, quae quouis casu ex functione y definiri possunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum transcendentium excluduntur, id quod ex sequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipsius x.

Ponatur $y = lx$; & cum sit $y^I = l(x+\omega)$, erit

$$\Delta y = y^I - y = l(x+\omega) - lx = l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right).$$

Huiumsodi autem logarithmum supra docuimus per seriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta.\, lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

EX-

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x.

Posito $y = a^x$ erit $y^I = a^{x+\omega} = a^x . a^\omega$: at supra ostendimus esse

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

quo valore introducto erit

$$\Delta . a^x = y^I - y = \Delta y = \frac{a^x \omega l a}{1} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius $= 1$, inuenire differentiam sinus arcus x.

Sit $\sin x = y$, erit $y^I = \sin (x + \omega)$, vnde $\Delta y = y^I - y = \sin (x + \omega) - \sin x$.

At est $\sin (x + \omega) = \cos \omega . \sin x + \sin \omega . \cos x$, atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.\ 2} + \frac{\omega^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\omega^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c.$$

&

$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

quibus seriebus substitutus erit:

$$\Delta . \sin x = \omega . \cos x - \frac{\omega^2}{2} \sin x - \frac{\omega^3}{6} \cos x + \frac{\omega^4}{24} \sin x + \frac{\omega^5}{120} \cos x - \&c.$$

EX-

EXEMPLUM IV.

In circulo cuius radius $= 1$ inuenire differentiam cosinus arcus x.

Posito $y = \cos x$, ob $y^{I} = \cos(x+\omega)$
erit $y^{I} = \cos\omega . \cos x - \sin\omega . \sin x$
& $\Delta y = \cos\omega . \cos x - \sin\omega . \sin x - \cos x$

Seriebus ergo ante expositis adhibendis prodibit:

$$\Delta . \cos x = -\omega \sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x - \text{\&c.}$$

22. Cum igitur proposita quacunque functione ipsius x, siue algebraica siue transcendente, quae sit y, eius differentia prima eiusmodi habeat formam vt sit:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{\&c.}$$

si huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam secundam ipsius y huiusmodi formam esse habituram:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{\&c.}$$

similique modo differentia tertia ipsius y, erit huiusmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{\&c.}$$

sicque porro.

Vbi notandum est litteras P, Q, R, &c. hic non pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera in diuersis differentiis eandem functionem ipsius x denotari: ideo enim tantum iisdem litteris vtor, ne sufficiens diuersarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum *istae differentiarum formae* probe sunt *notandae*, cum in Analysi infinitorum maximum vsum offerant.

23. Cum

23. Cum igitur modum expofuerim, quo cuiusuis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae fequentium ordinum inueniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y fucceffiuis y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. reperiuntur: viciffim ex differentiis ipfius y cuiusque ordinis datis, ifti ipfi variati valores ipfius y elici poterunt. Erit enim

$$y^{\text{I}} = y + \Delta y$$
$$y^{\text{II}} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{\text{III}} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$
$$y^{\text{IV}} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$
&c.

vbi coefficientes numerici iterum ex euolutione binomii nafcuntur. Quemadmodum ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. funt valores ipfius y, qui oriuntur fi loco x fucceffiue ponantur hi valores $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, &c. ftatim valorem ipfius $y^{(n)}$ affignare poterimus, qui prodit fi loco x fcribatur $x + n\omega$, erit fcilicet ifte valor:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \&c.$$

Hincque adeo etiam valores ipfius y praeberi poffunt fi n fuerit numerus negatiuus. Sic, fi loco x ponatur $x - \omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \&c.$$

ſin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y tranſibit in:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \&c.$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inuerſa, qua, ſi detur differentia, ex ea ipſa illa functio, cuius eſt differentia, inueſtigari debeat. Cum autem hoc ſit difficillimum atque ſaepe numero ipſam analyſin infinitorum requirat, caſus tantum quosdam faciliores euoluamus. Primum igitur, regrediendo, ſi functionis cuiuspiam differentiam inuenerimus, viciſſim hac differentia propoſita, ipſa illa functio, vnde eſt nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax + b$ differentia ſit $a\omega$, ſi quaeratur cuiusnam functionis differentia ſit $a\omega$; reſponſio erit in promtu, eam functionem eſſe $ax + b$. In hac igitur reperitur quantitas conſtans b, quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio noſtro pendet. Perpetuo autem ſi functionis cuiusuis P differentia fuerit Q, quoque functionis P + A, (denotante A quantitatem quamcunque conſtantem,) differentia erit Q. Hinc, ſi iſta differentia Q proponatur, functio, ex qua ea eſt orta, erit P + A, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum conſtans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaeſitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod ſumma differentiae opponi ſolet, tum etiam, quod functio quaeſita reuera ſit ſumma omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum

dum enim eſt $y^{\text{I}} = y + \Delta y$, & $y^{\text{II}} = y + \Delta y + \Delta y^{\text{I}}$, ſi valores ipſius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x - \omega$ reſpondet, ſcribatur y_{I}, huncque praedens y_{II}, & qui vltra praecedunt y_{III}, y_{IV}, y_{V}, &c. hincque ſeries formetur retrograda, cum ſuis differentiis:

$$y_{\text{V}} \; ; \; y_{\text{IV}} \; ; \; y_{\text{III}} \; ; \; y_{\text{II}} \; ; \; y_{\text{I}} \; ; \; y$$

&

$$\Delta y_{\text{V}} \; ; \; \Delta y_{\text{IV}} \; ; \; \Delta y_{\text{III}} \; ; \; \Delta y_{\text{II}} \; ; \; \Delta y_{\text{I}}$$

erit

$$y = \Delta y_{\text{I}} + y_{\text{I}}$$

&

ob $y_{\text{I}} = \Delta y_{\text{II}} + y_{\text{II}}$, porroque $y_{\text{II}} = \Delta y_{\text{III}} + y_{\text{III}}$

erit vtique

$$y = \Delta y_{\text{I}} + \Delta y_{\text{II}} + \Delta y_{\text{III}} + \Delta y_{\text{IV}} + \Delta y_{\text{V}}$$

&c.

ſicque erit functio y, cuius differentia eſt Δy, ſumma omnium valorum antecedentium differentiae Δy, qui oriuntur, ſi loco x ſcribantur valores antecedentes $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam vſi ſumus ſigno Δ, ita ſummam indicabimus ſigno Σ: ſcilicet, ſi functionis y differentia fuerit z, erit $z = \Delta y$; vnde, ſi y detur, differentiam z inuenire ante docuimus. Quodſi autem data ſit differentia z, eiusque ſumma y reperiri debeat, fiet $y = \Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z = \Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y = \Sigma z$; vbi conſtans quantitas quaecunque adiici poterit ob ratio-

 nes

nes supra datas; ex quo, aequatio $z = \Delta y$, si inuertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia sit $a\Delta y = az$, erit $\Sigma az = ay$, si quidem a sit quantitas constans. Quia ergo est $\Delta x = \omega$; erit $\Sigma \omega = x + C$ & $\Sigma a\omega = ax + C$; atque ob ω quantitatem constantem, erit $\Sigma \omega^2 = \omega x + C$; $\Sigma \omega^3 = \omega^2 x + C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias potestatum ipsius x supra inuentas inuertamus, erit

$$\Sigma \omega = x \text{ ; hincque } \Sigma 1 = \frac{x}{\omega} \text{ ;}$$

Deinde habemus

$$\Sigma (2\omega x + \omega^2) = x^2 \text{ ;}$$

vnde fit

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2} .$$

Porro est

$$\Sigma (3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

seu

$$3\omega \Sigma x^2 + 3\omega^2 \Sigma x + \omega^3 \Sigma 1 = x^3$$

ergo

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \Sigma x - \frac{\omega^2}{3} \Sigma 1$$

seu

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$$

simili modo erit

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2} \Sigma x^2 - \omega^2 \Sigma x - \frac{\omega^3}{4} \Sigma 1$$

vbi

vbi, si loco Σx^2, Σx & $\Sigma 1$ valores ante inuenti substituantur, reperietur:

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega x x}{4}.$$

Deinde, cum sit

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\Sigma x^3 - 2\omega^2\Sigma x^2 - \omega^3\Sigma x - \frac{\omega^4}{5}\Sigma 1$$

erit, adhibendis substitutionibus:

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

simili modo vlterius progrediendo reperietur

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

&

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x$$

quas expressiones infra facilius inuenire docebimus.

28. Si ergo differentia proposita fuerit functio rationalis integra ipsius x, eius summa, (seu ea functio, cuius ea est differentia) ex his formulis facile inuenitur. Quia enim differentia ex aliquot potestatibus ipsius x constabit, quaeratur vniuscuiusque termini summa, omnesque istae summae colligantur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inuentarum, erit

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

&

$$\Sigma bx = \;.\;.\; \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

atque

$$\Sigma c = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has ſummas erit

$$\Sigma(axx+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega-b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2-3b\omega+6c)}{6\omega}x + C$$

quae eſt functio quaeſita, cuius differentia eſt $axx+bx+c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia eſt $x^4-2\omega^2xx+\omega^4$.

Operationem ſimili modo inſtituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega x^3$$

&

$$-\Sigma 2\omega^2x^2 = \;.\; -\frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

atque

$$+\Sigma\omega^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \omega^3x$$

vnde functio quaeſita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2x^2 + \frac{19}{30}\omega^3x + C$$

Si enim hic loco x ponatur $x+\omega$, atque a quantitate reſultante ſubtrahatur iſta inuenta, remanebit propoſita differentia $x^4 - 2\omega^2x^2 + \omega^4$.

29. Si

29. Si ſummas, quas pro poteſtatibus ipſius x inuenimus, attentius inſpiciamus, in terminis primis, ſecundis, ac tertiis mox quidem legem obſeruabimus, qua illi ſecundum ſingulas poteſtates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita eſt perſpicua, vt ſummam poteſtatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in ſequentibus docebitur eſſe:

$$\begin{aligned}
\Sigma x^n = {} & \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2.3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2.\ 3.\ 4.\ 5}x^{n-3} \\
& + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}x^{n-5} \\
& - \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-6)\omega^7}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 8.\ 9}x^{n-7} \\
& + \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-8)\omega^9}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 10.\ 11}x^{n-9} \\
& - \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-10)\omega^{11}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 12.\ 13}x^{n-11} \\
& + \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ n-12)\omega^{13}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 14.\ 15}x^{n-13} \\
& - \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-14)\omega^{15}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 16.\ 17}x^{n-15} \\
& + \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-16)\omega^{17}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 18.\ 19}x^{n-17} \\
& - \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-18)\omega^{19}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 20.\ 21}x^{n-19} \\
& + \frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-20)\omega^{21}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 22.\ 23}x^{n-21} \\
& -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)\omega^{23}}{2.\ 3\ldots\ldots 24.\ 25}x^{n-23}$$

$$+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-24)\omega^{25}}{2.\ 3\ldots\ldots 26.\ 27}x^{n-25}$$

$$-\frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-26)\omega^{27}}{2.\ 3\ldots\ldots 28.\ 29}x^{n-27}$$

$$+\frac{8615841276005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-28)\omega^{29}}{2.\ 3\ldots 30.\ 31}x^{n-29}$$

$$\&c. + C$$

cuius progreſſionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis eſt ſitum, qui quemadmodum formentur, hic locus nondum eſt, vbi exponi queat.

30. Apparet autem niſi n ſit numerus integer affirmatiuus, hanc ſummae expreſſionem in infinitum progredi, neque hoc modo ſummam in forma finita exhiberi poſſe. Ceterum hic notandum eſt, non omnes poteſtates ipſius x propoſita x^n inferiores occurrere; deſunt enim termini x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, &c. quippe quorum coefficientes ſunt $=0$, etiamſi termini ſecundi x^n coefficiens hanc legem non ſequatur, ſed ſit $=-\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius expreſſionis ope ſummae poteſtatum, quarum exponentes ſunt vel negatiui vel fracti in forma infinita exhiberi ſolo excepto caſu quo $n=-1$, quia tum fit terminus $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, poſito $n=-2$; erit

$\Sigma\frac{1}{xx}$

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^3}{5x^5}$$

$$- \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^5}{7x^7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210} \cdot \frac{\omega^{11}}{13x^{13}}$$

$$- \frac{35}{2} \cdot \frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30} \cdot \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c.$$

31. Si ergo differentia propoſita fuerit poteſtas ipſius x quaecunque, eius ſumma hinc perpetuo aſſignari, ſeu functio, cuius ea ſit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia propoſita aliam habeat formam, vt in poteſtates ipſius x, tanquam partes, diſtribui nequeat, tum ſumma difficillime ac ſaepenumero prorſus non inueniri poteſt: niſi forte pateat, eam ex quapiam functione eſſe ortam. Hanc ob cauſam conueniet plurium functionum differentias inueſtigare easque probe notare, vt ſi quando huiusmodi differentia proponatur, eius ſumma, ſeu functio vnde eſt orta, ſtatim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas ſuppeditabit, quarum ope inuentio ſummarum mirifice ſubleuabitur.

32. Facilius autem ſaepe ſumma quaeſita reperitur, ſi differentia propoſita ex factoribus ſimplicibus conſtet, qui progreſſionem arithmeticam conſtituant, cuius differentia ſit ipſa quantitas ω. Sic, ſi propoſita fuerit functio $(x + \omega)(x + 2\omega)$, cuius differentia quaeratur: quia, poſito $x + \omega$ loco x, haec functio abit in $(x + 2\omega)$

$(x + 3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x + 2\omega)$. Quare viciſſim, ſi proponatur differentia $2\omega(x + 2\omega)$, eius ſumma erit $(x + \omega)(x + 2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma (x + 2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + \omega)(x + 2\omega).$$

Simili modo, ſi proponatur functio $(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$, cum ſit eius differentia $2\omega(x + (n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma (x + (n+1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma (x + n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus conſtet, vt ſit $y = (x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$, cum ſit

$$y^{I} = (x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y = 3\omega(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma (x + n\omega)(x + (n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur eſſe:

$$\Sigma (x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega) =$$
$$\frac{1}{4\omega}(x + (n-1)\omega)(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega).$$

vnde lex inueniendi ſummas, ſi differentia ex pluribus huiusmodi factoribus conſtet, ſponte patet. Quamuis au-

autem hae differentiae sint functiones rationales integrae, tamen earum summae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractarum summas inueniendas. Sit enim proposita fractio

$$y = \frac{1}{x + n\omega}; \text{ quia erit } y^{I} = \frac{1}{x + (n+1)\omega}$$

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x + (n+1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega} = \frac{-\omega}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}$$

ob $y^{I} = \frac{1}{(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}.$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}.$$

 Simili

Simili modo erit porro

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)(x+(n+3)\omega)}$$
$$= \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}.$$

35. Modus iste summandi probe est tenendus, quia huiusmodi differentiarum summae per praecedentem methodum inueniri non possunt. Quodsi autem differentia insuper habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progressione procedant, tum tutissimus modus inuestigandi summas est, vt differentia proposita in suas fractiones simplices resoluatur, quarum singulae etsi summari nequeunt, tamen binis coniungendis toties summa inueniri potest, quoties id quidem fieri licet; tantum enim erit dispiciendum, vtrum summa ope huius formulae inueniri queat:

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etsi enim neutra harum summarum per se exhiberi potest, tamen earum differentia cognoscitur.

36. His igitur casibus negotium redit ad resolutionem cuiusque fractionis in fractiones suas simplices, quae in superiori libro fusius est ostensa. Quemadmodum ergo eius beneficio summae inueniri queant, aliquot exemplis docebimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}.$$

Resoluatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\Sigma\frac{1}{x+n\omega}=\Sigma\frac{1}{x+(n+1)\omega}-\frac{1}{x+n\omega}$$

erit

$$\Sigma\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x}.$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}=$$

$$\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x},$$

at est

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega};$$

vnde summa quaesita erit

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur summa, cuius differentia est

$$\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}.$$

Posita hac differentia $= z$, erit $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3\omega}$ ideoque

$$\Sigma z = \Sigma\frac{1}{x} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} = \Sigma\frac{1}{x+\omega} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} = \Sigma\frac{1}{x+2\omega} - \Sigma\frac{1}{x+3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x+2\omega}.$$

quae est summa quaesita. Quoties ergo hoc modo signa summatoria Σ sese tandem tollunt, toties differentiae propositae summa exhiberi poterit; sin autem haec destructio non succedat, signum hoc est, summam inueniri non posse.

CAPUT

CAPUT II.

DE VSU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam serierum per differentias maxime illustrari, ex primis rudimentis satis est notum. Progressionis enim arithmeticae, quae primum considerari solet, praecipua proprietas in hoc versatur, vt eius differentiae primae sint inter se aequales; hinc differentiae secundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde series, quarum differentiae secundae demum sunt aequales, quae hanc ob rem *secundi ordinis* commode appellantur, dum progressiones arithmeticae series *primi ordinis* vocantur. Porro igitur series *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae sunt constantes; atque ad *quartum ordinem* & sequentes eae referentur series, quarum differentiae quartae, & vlteriores demum sunt constantes.

38. In hac diuisione infinita serierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes series ad haec genera reuocare licet. Occurrunt enim innumerabiles series, quae, differentiis sumendis, nunquam ad terminos constantes deducunt: cuiusmodi, praeter innumeras alias sunt progressiones geometricae, quae nunquam praebent differentias constantes, vti ex hoc exemplo videre licet.

1, 2,

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

Cum enim ſeries differentiarum cuiusque ordinis aequalis ſit ipſi ſeriei propoſitae, aequalitas differentiarum prorſus excluditur. Quocirca plures ſerierum claſſes conſtitui debebunt, quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias conſtantes revocantur, ſubdiuiditur; quam claſſem in hoc capite potiſſimum conſiderabimus.

39. Duae autem res ad naturam ſerierum cognoſcendam imprimis requiri ſolent, Terminus generalis atque Summa ſeu Terminus ſummatorius. Terminus generalis eſt expreſſio indefinita, quae vnumquemque ſeriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea eſt functio quantitatis variabilis x, quae, poſito $x = 1$, terminum ſeriei primum exhibet; ſecundum vero poſito $x = 2$; tertium poſito $x = 3$; quartum poſito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscunque ſeriei terminus inuenietur, etiamſi lex, qua ſinguli termini cohaerent, non reſpiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, ſtatim terminus milleſimus cognoſcetur. Ita huius ſeriei

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, &c.

Terminus generalis eſt $2xx - x$; poſito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; poſito $x = 2$, oritur terminus ſecundus 6; ſi ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. vnde patet huius ſeriei terminum centeſimum, poſito $x = 100$ fore $= 2.10000 - 100 = 19900$.

40. In-

40. Indices ſeu exponentes in qualibet ſerie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus ſit in ordine: ſic, termini primi index erit 1, ſecundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices ſingulis cuiusque ſeriei terminis inſcribi ſolent, hoc modo

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

TERMINI.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

vnde ſtatim patet G eſſe ſeriei propoſitae terminum ſeptimum, cum eius index ſit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, niſi terminus ſeriei, cuius index vel exponens eſt numerus indefinitus x. Quemadmodum ergo in quolibet ſerierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel ſecundae, vel aliae ſequentes ſunt conſtantes, terminum generalem inueniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad inueſtigationem ſummae ſumus progreſſuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progreſſiones arithmeticas, quarum differentiae primae ſunt conſtantes; ſitque a terminus ſeriei primus, & b terminus primus ſeriei differentiarum, cui ſequentes omnes ſunt aequales: vnde ſeries ita erit comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, &c.

DIFFERENTIAE.

b, b, b, b, b, &c.

Ex qua ſtatim patet, terminum, cuius index ſit $= x$, fore $a + (x-1)b$, eritque ergo terminus generalis $= bx + a - b$, qui ex terminis primis cum ipſius ſeriei, tum ſeriei differentiarum componitur. Quodſi autem terminus ſecundus ſeriei $a + b$ vocetur a^{I}, ob $b = a^{\text{I}} - a$, erit terminus generalis $= (a^{\text{I}} - a)x + 2a - a^{\text{I}} = a^{\text{I}}(x-1) - a(x-2)$ vnde, ex cognitis terminis primo & ſecundo progreſſionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in ſerie ſecundi ordinis termini primi, ipſius ſeriei $= a$; differentiarum primarum $= b$; differentiarum ſecundarum $= c$; eritque ipſa ſeries cum ſuis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a+b; a+2b+c; a+3b+3c; a+4b+6c; a+5b+10c; a+6b+15c;$ &c.

DIFFER. I.

$b;\ b+c;\ b+2c;\ b+3c;\ b+4c;\ b+5c;$ &c.

DIFFER. II.

$c,\ c,\ c,\ c,\ c,$

ex cuius inſpectione liquet terminum, cuius index $= x$ fore $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c$; qui ergo eſt terminus generalis ſeriei propoſitae. Ponatur autem ipſius ſeriei terminus ſecundus $= a^{\text{I}}$, terminus tertius $= a^{\text{II}}$, cum ſit $b = a^{\text{I}} - a$; & $c = a^{\text{II}} - 2a^{\text{I}} + a$; vti ex natura

tura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a + (x-1)(a^{I} - a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a^{II} - 2a^{I} + a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^{I}(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2) - \frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3) + \frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3} - \frac{2a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right);$$

ideoque ex tribus terminis ipsius seriei definitur.

43. Sit series tertii ordinis a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c. eius differentiae primae b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, &c. & differentiae secundae c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c. & tertiae d, d, d, &c. quippe quae sunt constantes.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, &c.

DIFFER. I.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, &c.

DIFFER. II.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c.

DIFFER. III.

d, d, d, &c.

Quia est $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$; $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; &c.; erit terminus generalis, seu is cuius index est x,

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3} d$$

sicque terminus generalis ex differentiis formabitur. Cum autem porro sit

$$b = a^{I} - a;\ c = a^{II} - 2a^{I} + a;\ d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^{III} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3} - 3a^{II} \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+ 3a^{I} \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3}$$

qui etiam hoc modo exprimetur, vt sit

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3} \left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

INDICES

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, &c.

DIFFER. I.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, &c.

DIFFER. II.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c.

DIF-

DIFFER. III.

d, d^{I}, d^{II}, &c.

DIFFER. IV.

e, e^{I}, &c.

DIFFER. V.

f, &c.

ex ipſius ſeriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis b, c, d, e, f, &c. terminus generalis ita exprimetur, vt ſit:

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e + \&c.$$

donec ad differentias conſtantes perueniatur. Ex quo patet, ſi nunquam prodeant differentiae conſtantes, terminum generalem per expreſſionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipſis terminis ſeriei formantur; ſi earum valores ſubſtituantur, prodibit terminus generalis in eiusmodi forma expreſſus, cuiusmodi pro ſeriebus primi, ſecundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro ſeriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times \left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

 vnde

vnde lex, qua ſequentium ordinum termini generales componuntur, facile perſpicitur. Ex his autem patet pro quouis ordine terminum generalem fore functionem ipſius x rationalem integram, in qua maxima ipſius x dimenſio congruat cum ordine, ad quem ſeries refertur. Ita ſerierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, ſecundi ordinis ſecundi gradus, & ita porro.

46. Differentiae autem, vti ſupra vidimus, ex ipſis terminis ſeriei ita reſultant, vt ſit

$$b = a^{I} - a$$
$$b^{I} = a^{II} - a^{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$
&c.
$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c^{I} = a^{III} - 2a^{II} + a^{I}$$
$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II}$$
&c.
$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
&c.

Quare, cum in ſeriebus primi ordinis ſint omnes valores ipſius $c = 0$; erit

$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; &c.

vnde patet has ſeries ſimul eſſe recurrentes, & ſcalam relationis eſſe $2, -1$. Deinde, cum in ſeriebus ſecundi ordi-

ordinis sint omnes valores ipsius $d = 0$, erit

$$a^{\mathrm{III}} = 3a^{\mathrm{II}} - 3a^{\mathrm{I}} + a;\ a^{\mathrm{IV}} = 3a^{\mathrm{III}} - 3a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{I}};\ \&c.$$

ideoque & hae erunt recurrentes scala relatione existente

$$3, -3, +1.$$

Simili modo apparebit omnes huius classis series, cuiuscunque sint ordinis, simul ad classem serierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, vt scala relationis constet ex coefficientibus potestatis binomii, vno gradu superioris, quam est ordo, ad quem series refertur.

47. Quia vero pro seriebus primi ordinis quoque omnes valores ipsius d & e, & sequentium differentiarum omnium sunt $= 0$, erit quoque in his

$$\begin{aligned} a^{\mathrm{III}} &= 3a^{\mathrm{II}} - 3a^{\mathrm{I}} + a \\ a^{\mathrm{IV}} &= 3a^{\mathrm{III}} - 3a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{I}} \\ &\&c. \end{aligned}$$

aut

$$\begin{aligned} a^{\mathrm{IV}} &= 4a^{\mathrm{III}} - 6a^{\mathrm{II}} + 4a^{\mathrm{I}} - a \\ a^{\mathrm{V}} &= 4a^{\mathrm{IV}} - 6a^{\mathrm{III}} + 4a^{\mathrm{II}} - a^{\mathrm{I}} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Pertinebunt ergo & hinc ad series recurrentes idque infinitis modis, cum scalae relationis esse queant:

$$3, -3, +1;\ 4, -6, +4, -1;\ 5, -10, +10, -5, +1;\ \&c.$$

Similique modo intelligitur vnamquamque seriem huius, quam tractamus, classis simul esse seriem recurrentem innumeris modis: scala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}, \&c.$$

dum-

dummodo n ſit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec ſeries quoque ex euolutione fractionis, cuius denominator eſt $(1-y)^n$, prouti in ſuperiori libro de ſeriebus recurrentibus fuſius eſt oſtenſum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius claſſis ſerierum, cuiuscunque ſint ordinis, terminos generales eſſe functiones ipſius x rationales integras, ita viciſſim apparebit omnes ſeries, quarum termini generales ſint huiusmodi functiones ipſius x, ad hanc claſſem pertinere, atque tandem ad differentias conſtantes perduci. Et quidem, ſi terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax+b$, dum ſeries inde orta erit primi ordinis ſeu arithmetica, differentias primas habebit conſtantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio ſecundi gradus in hac forma $axx+bx+c$ contenta, tum ſeries ex eo oriunda, dum loco x ſucceſſiue numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſtituuntur, erit ordinis ſecundi, atque differentias ſecundas habebit conſtantes: ſimili modo, terminus generalis tertii gradus ax^3+bx^2+cx+d dabit ſeriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non ſolum omnes ſeriei termini inueniuntur, ſed etiam ſeries differentiarum tam primarum quam ſequentium deduci poſſunt. Cum enim, ſi ſeriei terminus primus ſubtrahatur a ſecundo, prodeat ſeriei differentiarum terminus primus: ſecundus autem, ſi ipſius ſeriei terminus ſecundus a tertio auferatur, ita ſeriei differentiarum iſt obtinebitur terminus,

minus, cuius index eſt x; ſi ipſius ſeriei terminus, cuius index eſt x, ſubtrahatur a ſequente cuius index eſt $x+1$. Quare ſi in termino ſeriei generali loco x ponatur $x+1$, ab hocque valore terminus generalis ſubtrahatur, remanebit terminus generalis ſeriei differentiarum: ſi igitur X fuerit ſeriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX, (quae modo in praecedente capite oſtenſo inuenietur, ſi ſtatuatur ibi $\omega = 1$,) terminus generalis ſeriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis ſeriei differentiarum ſecundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, ſicque deinceps.

50. Quodſi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens poteſtatis ipſius x ſit n; ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem vno gradu inferiorem, nempe gradus $n-1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n-2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n-3$, & ita porro. Quare, ſi X fuerit functio primi gradus, vti $ax+b$, tum eius differentia ΔX erit conſtans $= a$; quae cum ſit terminus generalis ſeriei primarum differentiarum, perſpicitur ſeriem, cuius terminus generalis X ſit functio primi gradus, fore arithmeticam ſeu primi ordinis. Simili modo ſi terminus generalis X fuerit functio ſecundi gradus ob $\Delta\Delta X$ conſtantem, ſeries inde orta differentias ſecundas habebit conſtantes, eritque propterea ordinis ſecundi; ſicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem conſtituens, eiusdem ordinis erit ſeries ex eo nata.

51. Hanc ob rem series poteſtatum numerorum naturalium ad differentias conſtantes perueniunt, vti ex ſequenti ſchemate fit manifeſtum.

POTEST. I.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

DIFFER. I.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

POTEST. II.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c.

DIFFER. I.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.

DIFFER. II.

2, 2, 2, 2, 2, 2, &c.

POTEST. III.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, &c.

DIFFER. I.

7, 19, 37, 61, 91, 127, &c.

DIFFER. II.

12, 18, 24, 30, 36, &c.

DIFFER. III.

6, 6, 6, 6, &c.

POTEST. IV.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, &c.

DIFFER. I.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, &c.

DIFFER. II.

50, 110, 194, 302, 434, &c.

DIFFER. III.

60, 84, 108, 132, &c.

DIFFER. IV.

24, 24, 24, &c.

Quae

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inueniendis sunt praecepta, ea hic inseruient ad terminos generales differentiarum quarumuis, quae ex seriebus nascuntur, inueniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam seriei fuerit cognitus, eius ope non solum omnes eius termini in infinitum inueniri; sed etiam series retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes sint numeri negatiui, exhiberi poterunt, loco x numeros negatiuos substituendo: sic, si terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$, ponendo loco x tam negatiuos quam affirmatiuos indices, series vtrinque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.

SERIES.

&c. $+5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27,$ &c.

DIFFER. I.

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ &c.

DIFFER. II.

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque series ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, vt, si differentiae tandem fiant constantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expressionem infinitam assignari queant. Quin etiam ex termino gene-

rali ii termini, quorum indices funt fracti, definientur, in quo ferierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino ferierum generali monitis, progrediamur ad fummam, feu terminum fummatorium ferierum cuiusque ordinis inueftigandum. Propofita autem quacunque ferie, TERMINUS *fummatorius* eft functio ipfius x, quae aequalis eft fummae tot terminorum feriei, quot vnitates continet numerus x. Ita ergo terminus fummatorius erit comparatus, vt fi ponatur $x=1$, prodeat terminus primus feriei; fin autem ponatur $x=2$, vt prodeat fumma primi & fecundi; facto autem $x=3$, fumma primi, fecundi ac tertii; ficque deinceps. Hinc, fi ex ferie propofita noua feries formetur, cuius primus terminus aequalis fit primo illius, fecundus aequalis fummae duorum, tertius aequalis fummae trium, atque ita porro, haec noua feries vocatur illius *fummatrix*, huiusque feriei fummatricis terminus generalis erit terminus fummatorius feriei propofitae: ex quo inuentio termini fummatorii ad inuentionem termini generalis reuocatur.

54. Sit ergo feries propofita haec

$$a, \quad a^{I}, \quad a^{II}, \quad a^{III}, \quad a^{IV}, \quad a^{V}, \quad \&c.$$

huiusque feriei fummatrix fit

$$A, \quad A^{I}, \quad A^{II}, \quad A^{III}, \quad A^{IV}, \quad A^{V}, \quad \&c.$$

erit ex eius natura modo expofita:

A =

$$A = a$$
$$A^{I} = a + a^{I}$$
$$A^{II} = a + a^{I} + a^{II}$$
$$A^{III} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III}$$
$$A^{IV} = a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$
&c.

Hinc feriei fummatricis differentiae erunt:

$A^{I} - A = a^{I}$; $A^{II} - A^{I} = a^{II}$; $A^{III} - A^{II} = a^{III}$; &c.

vnde feries propofita termino primo minuta erit feries differentiarum primarum feriei fummatricis. Quodfi igitur feriei fummatrici praefigatur terminus, $= 0$ vt habeatur:

$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},$ &c.

huius feries primarum differentiarum erit ipfa feries propofita:

$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},$ &c.

55. Hanc ob rem feriei propofitae differentiae primae, erunt differentiae fecundae fummatricis, atque differentiae fecundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, fi feries propofita tandem habeat differentias conftantes, tunc etiam eius fummatrix ad differentias conftantes deducetur, eritque igitur feries eiusdem naturae, at vno ordine fuperior. Huiusmodi ergo ferierum perpetuo terminus fummatorius exhiberi poterit per expreffionem finitam. Namque terminus generalis feriei:

$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},$ &c.

feu is, qui indici x conuenit exhibebit fummam $x - 1$ ter-

terminorum feriei huius a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c. atque fi tum loco x fcribatur $x+1$, orietur fumma x terminorum, ipfeque terminus fummatorius.

56. Sit igitur Seriei propofitae

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, &c.

Series differentiarum primarum

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}, &c.

Series differentiarum fecundarum

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}, &c.

Series differentiarum tertiarum

d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}, &c.

ficque porro donec ad differentias conftantes perueniatur. Deinde formetur feries fummatrix, quae cum praefixa o in locum termini primi, cum fuis differentiis continuis fe habebit fequenti modo:

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

SUMMATRIX.

o, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, &c.

SERIES PROPOSITA.

a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}, &c.

DIFFER. I.

b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}, &c.

DIFFER. II.

c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}, &c.

DIFFER. III.

d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}, &c.

erit

erit feriei fummatricis terminus generalis, feu qui indici x refpondet

$$o + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}c + \&c.$$

qui fimul exhibet fummam $x-1$ terminorum feriei propofitae, $a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV}$, &c.

57. Quod fi ergo in hac fumma loco $x-1$ fcribatur x, prodibit feriei propofitae terminus fummatorius fummam x terminorum complectens

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d + \&c.$$

Hinc, fi litterae $b,\ c,\ d,\ e,$ valores ipfis affignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e + \&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d + \&c.$$

Inuento ergo feriei cuiusuis ordinis hoc, quem oftendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus fummatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic

58. Hic modus terminum ſummatorium per differentias ſeriei inueniendi imprimis ad eiusmodi ſeries, quae tandem ad differentias conſtantes deducunt, eſt accommodatus; in aliis enim caſibus expreſſio finita non reperitur. Quodſi autem ea, quae ante de indole termini ſummatorii ſunt expoſita, attentius perpendamus, alius modus ſe offert terminum ſummatorium immediate ex termino generali inueniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis caſibus ad expreſſiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim propoſita ſeries quaecunque.

$$a, \; b, \; c, \; d, \; e, \; f, \; \&c.$$

cuius terminus generalis, ſeu indici x reſpondens ſit $= X$; terminus autem ſummatorius ſit $= S$, qui cum ſummam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet vnitates, erit ſumma $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo X differentia expreſſionis $S - X$, cum relinquatur, ſi haec a ſequente S ſubtrahatur.

59. Cum igitur ſit $X = \Delta\,(S - X)$ differentia eo modo ſumta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum diſcrimine, vt quantitas illa conſtans ω hic nobis ſit $= 1$. Quare, ſi ad ſummas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus ſummatorius quaeſitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet ſumma functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipſe terminus generalis X, eritque aggregatum terminus ſummatorius. Quoniam autem in

in fummis fumendis inuoluitur quantitas conftans, fiue addenda fiue fubtrahenda; ea ad praefentem cafum accommodari debebit. Manifeftum autem eft, fi ponatur $x = 0$, quo cafu numerus terminorum fummandorum eft nullus, fummam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa conftans C ita determinari debebit, vt pofito $x = 0$, fiat quoque $S = 0$. Pofitis ergo in illa aequatione $S = \Sigma X + X + C$ tam $S = 0$ quam $x = 0$, valor ipfius C inuenietur.

60 Quoniam ergo hic totum negotium ad fummationem functionum fupra monftratam reducitur, ponendo $\omega = 1$, exinde depromamus fummationes traditas; ac primo quidem pro poteftatibus ipfius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$

quibus accenfeatur fummatio generalis poteftatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi vbique loco ω vnitas fcribatur. Harum ergo formularum ope omnium ferierum, quarum termini generales funt functiones rationales integrae ipfius x, termini fummatorii expedite inueniri poterunt.

61. Denotet S.X terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, vt vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, vt terminus summatorius S.X euanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \quad . \quad . \quad . \quad + x^n$$

erit

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n}{2.3}x^{n-1} - \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}x^{n-3}$$

$$+ \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}x^{n-5} - \tfrac{3}{10}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ (n-6)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ 8.\ 9}x^{n-7}$$

$$+ \tfrac{5}{6}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ (n-8)}{2.\ 3.\ 4\ .\ .\ 10.11}x^{n-9} - \tfrac{691}{210}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ (n-10)}{2.3\ .\ .\ 12.13}x^{n-11}$$

$$+ \tfrac{35}{2}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ (n-12)}{2.3\ .\ .\ .\ 14.15}x^{n-13} - \tfrac{3617}{30}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ (n-14)}{2.3\ .\ .\ .\ 16.17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-16)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 18.19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-18)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 20.21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-20)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 22.23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-22)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 24.25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}.\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-24)}{2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 26.\ 27}x^{n-25}$$

&c.

62.

62. Hinc ergo summae pro variis ipsius n valoribus ita se habebunt:

$S.x^0 = x$

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$

$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$

$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3$
$- \frac{1}{30}x$

$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4$
$- \frac{3}{20}x^2$

$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5$
$- \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$

$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6$
$- \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$

$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7$
$- \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$

$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{60}x^{10} + \frac{143}{28}x^8$
$- \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 - \frac{691}{420}x^2$

$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9$
$- \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{6}x^5 - \frac{691}{90}x^3 + \frac{7}{6}x$

$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10}$
$- \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2$

$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11}$
$- \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x$

&c.

quae

quae summae ex forma generali vsque ad potestatem vicesimam nonam continuari possunt. Atque ad huc vlterius progredi liceret, si coefficientes illi numerici vlterius essent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam obseruatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inueniri potest, excepto tantum termino vltimo, si in eo potestas ipsius x prima contineatur: tum enim in summa sequente vnus terminus insuper accedit. Hoc autem omisso, si fuerit

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \&c.$$

erit sequens summa:

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \&c.$$

vnde si n fuerit numerus par, sequens summa vera prodit: at si n fuerit numerus impar, tum in sequente summa praeterea desiderabitur terminus vltimus, cuius forma erit $\pm \Phi x$. Interim tamen hic sine aliis subsidiis ita inueniri poterit. Cum enim si ponatur $x = 1$, summa vnici tantum termini, (hoc est terminus primus, qui erit $= 1$,) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inuentis $x = 1$, ipsaque summa statuatur $= 1$, quo facto valor ipsius Φ elicietur, eoque inuento vlterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes istae summae inueniri potuissent. Sic, cum sit

S. x^5

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

erit

$$S.x^6 = \tfrac{6}{7} : \tfrac{1}{6}x^7 + \tfrac{6}{6}\cdot\tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{5}{12}x^5 - \tfrac{6}{3}\cdot\tfrac{1}{12}x^3 + \Phi x$$

seu

$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \Phi x.$$

Ponatur nunc $x = 1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \Phi$ ideoque $\Phi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, vti ex forma generali inuenimus.

64. Ope harum formularum ſummatoriarum nunc facile omnium ſerierum, quarum termini generales ſunt functiones ipſius x rationales integrae, termini ſummatorii inueniri poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum ſummatorium huius ſeriei

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, &c.

cuius terminus generalis eſt

$$\frac{3xx + x}{2}.$$

Cum terminus generalis conſtet duobus membris, quaeratur pro vtroque terminus ſummatorius ex formulis ſuperioribus

$$S.\tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

&

$$S.\tfrac{1}{2}x = \quad .\quad .\quad .\ \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

eritque

$$S.\frac{3xx+x}{2} = \tfrac{1}{2}x^3 + xx + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x(x+1)^2$$

H 3 qui

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{1}{4}.6^2 = 90$, summa quinque terminorum

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

EXEMPLUM II.

Inuenire terminum summatorium seriei

1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c.

quae continet cubos numerorum imparium.

Terminus generalis huius seriei est

$$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

vnde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+8.\ S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

&

$$-12.\ S.x^2 = \ .\ -4x^3 - 6x^2 - 2x$$

atque

$$+6.\ S.x = \ .\ .\ .\ .\ . + 3x^2 + 3x$$

denique

$$-1.\ S.x^0 = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$.

Vti, si ponatur $x = 6$ erit $36.71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1 + 27 + 125 + 343 + 729 + 1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, sit

$\Sigma (x$

$$\Sigma\,(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)\,(x+n)$$

&

$$\Sigma\,(x+n)\,(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)\,(x+n)\,(x+n+1)$$

atque

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&c.

ſi ad has ſummas ipſos terminos generales addamus, ſimulque conſtantem adiiciamus, quae poſito $x = 0$, reddat terminum ſummatorium euaneſcentem, ſequentes obtinebimus terminos ſummatorios.

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)\,(x+n+1) - \tfrac{1}{2}\,n(n+1)$$

&

$$S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

atque

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

ſicque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas conſtans in his ſummis euaneſcit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis eſt $= x$; terminus ſummatorius erit $= \tfrac{1}{2}x(x+1)$ ſeriesque ſummatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus ſummatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$, & ſeries ſummatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum ſummatorium habebit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, qui erit

erit terminis generalis feriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus fummatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$. Hac autem feries prae reliquis probe funt notandae, quoniam earum vbique ampliffimus eft vfus. Ex his enim defumuntur coefficientes binomii ad dignitates eleuati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum verfato abunde conftat.

67. Ex his etiam illi termini fummatorii, quos ante ex differentiis elicuimus, facile inueniuntur. Cum enim ibi terminum generalem fequenti forma inuenerimus expreffum

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3} d + \&c.$$

fi cuiusque membri terminum fummatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum fummatorium huic termino generali conuenientem. Sic cum fit

$$S\ 1 = x$$

&

$$S\ (x-1) = \tfrac{1}{2}\, x\,(x-1)$$

atque

$$S\ (x-1)(x-2) = \tfrac{1}{3}\, x\,(x-1)(x-2)$$

&

$$S\ (x-1)(x-2)(x-3) = \tfrac{1}{4}\, x(x-1)(x-2)(x-3)$$

&c.

erit terminus fummatorius quaefitus:

$$xa + \frac{x(x-1)}{1.\ 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} d + \&c.$$

quae

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inuentio ad fractiones accommodari potest: quia enim supra §. 34. inuenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n}$$

erit

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inuentas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

&

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

quae formae facile pro lubitu vlterius continuantur.

69. Quia erit $S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$

erit quoque

$$S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}.$$

 Etsi

Etsi ergo neuter horum duorum terminorum summatoriorum seorsim exhiberi potest, tamen eorum differentia cognoscitur; hincque in pluribus casibus summae serierum satis expedite assignantur: id quod vsu venit, si terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores simplices resolui potest. Tum enim tota fractio in fractiones partiales resoluatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, vtrum terminus summatorius exhiberi queat nec ne?

EXEMPLUM I.

Inuenire terminum summatorium seriei huius:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \text{\&c.}$$

cuius terminus generalis est $= \frac{2}{xx+x}$.

Terminus iste generalis per resolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Hinc terminus summatorius erit $= 2\,S.\,\frac{1}{x} - 2\,S.\,\frac{1}{x+1}$, qui ergo per praecedens lemma erit $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$. Sic, si sit $x = 4$, erit $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius seriei huius:

$$\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{21},\ \tfrac{1}{45},\ \tfrac{1}{77},\ \tfrac{1}{117},\ \text{\&c.}$$

cuius terminus generalis est $= \frac{1}{4xx+4x-3}$.

Quia

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resoluetur in has partes:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

At est

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

&

$$S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

ergo

$$S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

cuius pars octaua dabit terminum summatorium quaesitum nempe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=$$

$$=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates euecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas serierum exhibeamus, quarum numeratores sint $=1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

 Ter-

Terminus generalis est	Terminus fummatorius erit
$\frac{1.\ 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1}$
$\frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2}-\frac{1.\ 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3}-\frac{1.\ 2.\ 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4}-\frac{1.\ 2.\ 3.\ 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

vnde lex, qua iftae expreffiones progrediuntur, fponte apparet. Neque vero hinc terminus fummatorius, qui conueniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi poteft, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus fummatorius praebet fummam tot terminorum, quot vnitates continentur in indice x; manifeftum eft harum ferierum in infinitum continuatarum fummas obtineri, fi ponatur index x infinitus: quo cafu expreffionum modo inuentarum termini pofteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, euanefcent.

Hinc

Hinc iſtae ſeries infinitae finitas habebunt ſummas, quae erunt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \text{\&c.} = \frac{2}{1}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \text{\&c.} = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \text{\&c.} = \frac{4}{3}$$
$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \text{\&c.} = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \text{\&c.} = \frac{6}{5}$$

&c.

Omnium ergo ſerierum, quarum termini ſummatorii habentur, in infinitum continuatarum ſummae exhiberi poterunt poſito $x = \infty$, dummodo hoc caſu ſummae fiant finitae: quod quidem euenit, ſi in termino ſummatorio x tot habeat dimenſiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CAPUT III.

DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARUIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumuis sit magna, vlterius augeri possit, neque quicquam obstet, quominus ad datam quantitatem quamcunque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas sine fine augeri poterit: neque enim vnquam tam magna fiet, vt ipsi nihil amplius adiici posset. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit positum, *omnem quantitatem in infinitum augeri posse.* Qui enim hoc negauerit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, superare nequeat, atque ideo statuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiici posset; quod cum sit absurdum atque quantitatis notioni aduersetur, necessario concedendum est, omnem quantitatem sine fine continuo magis, hoc est, in infinitum augeri posse.

73. In singulis quantitatum speciebus hoc etiam clarius perspicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui statuerit seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita vsquam esse determinatam, vt vlterius continuari non possit. Nullus enim datur numerus, ad quem non insuper vnitas addi, sicque numerus sequens maior exhiberi

queat; hinc ſeries numerorum naturalium ſine fine progreditur, neque vnquam peruenitur ad numerum maximum, quo maior prorſus non detur. Simili modo linea recta nunquam eousque produci poteſt, vt inſuper vlterius prolongari non poſſet. Quibus euincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci poſſe. Quae cum ſint ſpecies quantitatum, ſimul intelligitur, omni quantitate, quantumuis ſit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, ſicque augendo continuo vlterius ſine fine, hoc eſt in infinitum, procedi poſſe.

74. Quanquam autem haec ſunt adeo perſpicua, vt qui ea negare vellet, ſibi ipſe contradicere deberet; tamen iſta infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare ſunt conati, tantopere eſt offuſcata, tantisque difficultatibus atque etiam contradictionibus obuoluta, vt, qua ſe extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri poſſit, quidam concluſerunt, dari reuera quantitatem infinitam, eamque ita deſcripſerunt, vt nullum amplius augmentum ſuſcipere poſſit. Hoc autem ipſo ideam quantitatis euertunt, dum eiusmodi quantitatem ſtatuunt, quae vlterius augeri nequeat. Praeterea vero ſecum ipſi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas ſit capax, finem faciunt, ſimul negant quantitatem ſine fine augeri poſſe; negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri poſſe, quoniam vtraque locutio congruit: ſicque, dum quantitatem infinitam ſtatuunt, eam ſimul tollunt. Si enim quantitas

titas ſine fine, hoc eſt in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita exiſtere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipſo, quod omnis quantitas in infinitum augeri poſſit, ſequi videatur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non euadet, niſi iam ſine fine increuerit: quod autem ſine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi poteſt. Interim tamen non ſolum huiusmodi quantitatem, ad quam incrementis ſine fine congeſtis peruenitur, certo charactere indicare, ſicque debito modo in calculum inducere licet, vti mox fuſius oſtendemus; ſed etiam in mundo eiusmodi caſus exiſtere, vel ſaltem concipi poſſunt, quibus numerus infinitus actu exiſtere videatur. Sic ſi materia in infinitum ſit diuiſibilis, vti plures Philoſophi ſtatuerunt, numerus partium, quibus datum quodque materiae fruſtum conſtat, reuera erit infinitus; ſi enim ſtatueretur finitus, materia certe non in infinitum foret diuiſibilis. Simili modo ſi vniuerſus mundus eſſet infinitus, vti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe eſſe non poſſet, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamſi inter ſe pugnare videantur, tamen ſi attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim ſtatuit materiam in infinitum eſſe diuiſibilem, is negat in diuiſione materiae continua unquam ad partes tam paruas perueniri, quae vlterius diuidi nequeant: nullas ergo materia habebit partes,

tes, vlterius indiuiduas; cum fingulae particulae, ad quas per continuam diuifionem iam fit peruentum, vlterius fe fubdiuidi patiantur. Qui igitur dicit hoc cafu numerum partium fore infinitum, is partes vltimas, quae vlterius fint indiuiduae, intelligit; ad quas cum nunquam perueniatur, & quae propterea nullae funt, is has ipfas partes, quae nullae funt, numerare conatur. Si enim materia fine fine continuo vlterius fubdiuidi poteft, partibus indiuiduis feu fimplicibus prorfus caret: neque adeo quicquam fupereft, quod numerari queat. Hanc obrem qui materiam in infinitum diuifibilem ftatuit, is fimul negat, materiam ex partibus fimplicibus effe compofitam.

77. Quod fi autem, dum de partibus alicuius corporis feu materiae loquimur, non vltimas feu fimplices, quippe quae nullae funt, intelligamus, fed eas, quas diuifio reuera produxit; tum, admiffa hac hypothefi de diuifibilitate materiae in infinitum, vnumquodque vel minimum materiae fruftum non folum in plurimas partes diffecari, fed etiam nullus numerus tum magnus affignari poterit, quo non maior partium ex illo frufto fectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem vltimarum, fed quae ipfae adhuc fint vlterius diuifibiles, quae vnumquodque corpus componunt, omni numero affignabili erit maior. Simili modo, fi vniuerfus mundus fit infinitus, numerus corporum mundum conftituentium pariter omni affignabili erit maior; qui cum finitus effe nequeat, fequitur numerum

K infi-

infinitum & numerum omni aſſignabili maiorem eſſe nomina ſynonyma.

78. Qui ergo hoc modo diuiſibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, ſe implicat, nihilque affirmare cogitur, quod ſanae rationi aduerſetur. Qui autem contra materiam in infinitum diuiſibilem eſſe negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus ſe nullo prorſus modo extrahere poſſunt. Statuere enim coguntur vnumquodque corpus nonniſi in certum partium numerum diſſecari poſſe, ad quas ſi fuerit peruentum, nulla diuiſio vlterior locum inueniat; quas vltimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia ſimplicia* vocant. Cur autem iſtae vltimae particulae nullam amplius diuiſionem admittant, duplex eſſe poteſt cauſa: altera, quod omni extenſione careant; altera quod quidem ſint extenſae, ſed tamen tam durae atque ita comparatae, vt nulla vis ad eas diſſecandas ſufficiat. Vtrumuis patroni huius opinionis dicant, ſeſe aeque difficultatibus implicant.

79. Sint enim vltimae particulae omnis extenſionis expertes, ita vt partibus prorſus careant; qua explicatione quidem ideam entium ſimplicium optime tuentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero conſtare queat, concipi nullo modo poteſt. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus ſimplicibus eſſe compoſitum, huncque actu in mille partes ſecari; quae ſi ſint aequales, erunt digiti cubici: ſin autem ſint inaequales, aliae erunt ma-

maiores aliae minores. Vnus igitur digitus cubicus foret ens ſimplex, ſicque maxima reſultaret contradictio; niſi forte in digito cubico ineſſe tantum vnum ens ſimplex, reliquumque ſpatium vacuum eſſe dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod iſti Philoſophi vacuum plane ex mundo profligant. Quodſi obiiciant numerum entium ſimplicium, quae pedem cubicum materiae conſtituunt, millenario longe eſſe maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario ſequitur, ex quouis alio numero quantumuis magno aeque manat. Hanc difficultatem Acutiſſimus LEIBNIZIVS, primus monadum inuentor, probe perſpexit, dum materiam abſolute in infinitum diuiſibilem eſſe ſtatuit. Neque ergo ante ad monades peruenire licet, quam corpus actu in infinitum ſit diuiſum. Hoc ipſo autem exiſtentiam entium ſimplicium, ex quibus corpora conſtent, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus ſimplicibus eſſe compoſita, & ille qui ſtatuit corpora in infinitum eſſe diuiſibilia, in eadem prorſus ſunt ſententia.

80. Neque magis autem ſibi conſtant, ſi dicunt vltimas corporum particulas extenſas quidem eſſe, ſed ob ſummam duritiem in partes diuelli non poſſe. Cum primum enim in vltimis particulis extenſionem admittunt, eas ex partibus compoſitas eſſe ſtatuunt, quae, vtrum reuera a ſe inuicem ſeparari queant nec ne? parum refert; etiamſi nullam cauſam aſſignare poſſint, vnde tanta durities ſit orta. Nunc autem plerique, qui

diuiſibilitatem materiae in infinitum negant, hoc poſterius incommodum ſatis ſenſiſſe videntur, quia priori ideae partium vltimarum potiſſimum inhaerent; hasque difficultates aliter diluere non poſſunt, niſi aliquot leuiuſculis metaphyſicis diſtinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, vt ne conſequentiis, quae ſecundum mathematica principia formantur, fidamus: neque dimenſiones in partibus ſimplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonſtrare debuiſſent, iſtas ſuas partes vltimas, quarum determinatus numerus corpus conſtituat, extenſas prorſus non eſſe.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum inuenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad diſtinctiones confugiunt, reſpondentes has obiectiones a ſenſibus atque imaginatione ſuppeditari, in hoc autem negotio ſolum intellectum purum adhiberi oportere; ſenſus autem ac ratiocinia inde pendentia ſaepiſſime fallere. Intellectus ſcilicet purus agnoſcet fieri poſſe, vt pars milleſima pedis cubici materiae omni extenſione careat, quod imaginationi abſurdum videatur. Tum vero, quod ſenſus ſaepenumero fallant, res vera quidem eſt, at nemini minus quam mathematicis opponi poteſt. Matheſis enim nos imprimis a fallacia ſenſuum defendit, atque docet obiecta, quae ſenſibus percipiuntur, aliter reuera eſſe comparata, aliter vero apparere: haecque ſcientia tutiſſima tradit praecepta, quae qui ſequuntur, ab illuſione ſenſuum immunes ſunt. Huiusmodi ergo reſponſionibus, tantum abeſt, vt Metaphyſici ſuam doctrinam tueantur, vt eam potius magis ſuſpectam efficiant.

82.

82. Verum vt ad propofitum reuertamur, etiamfi quis neget in mundo numerum infinitum reuera exiftere; tamen in fpeculationibus mathematicis faepiffime occurrunt quaeftiones, ad quas, nifi numerus infinitus admittatur, refponderi non poffet. Sic, fi quaeratur fumma omnium numerorum, qui hanc feriem $1+2+3+4+5+$&c. conftituunt; quia ifti numeri fine fine progrediuntur, atque crefcunt, eorum omnium fumma certe finita effe non poterit: quo ipfo efficitur, eam effe infinitam. Hinc, quae quantitas tanta eft, vt omni quantitate finita fit maior, ea non infinita effe nequit. Ad huiusmodi quantitatem defignandam Mathematici vtuntur hoc figno ∞, quo denotatur quantitas omni quantitate finita, feu affignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, vt dicatur effe Ellipfis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae effe Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem Infiniti doctrina magis illuftrabitur, fi, quid fit infinite paruum Mathematicorum, expofuerimus. Nullum autem eft dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus euanefcat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parua nil aliud eft nifi quantitas euanefcens, ideoque reuera erit $=0$. Confentit quoque ea infinite paruorum definitio, qua dicuntur omni quantitate affignabili minora: fi enim quantitas tam fuerit parua, vt omni quantitate affignabili fit minor, ea certe non poterit non effe nulla; namque nifi effet $=0$, quantitas affignari poffet ipfi aequalis, quod eft contra hypothefin. Quaerenti ergo, quid fit quantitas

infinite parua in Mathesi, respondemus eam esse reuera $=0$: neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, vbi hunc calculum sumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur ostenderimus, quantitatem infinite paruam reuera esse cyphram, primum occurrendum est obiectioni, cur quantitates infinite paruas non perpetuo eodem charactere o designemus, sed peculiares notas ad eas designandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila sunt inter se aequalia, superfluum videtur variis signis ea denotare. Verum quamquam duae quaeuis cyphrae ita inter se sunt aequales, vt earum differentia sit nihil: tamen, cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perspicietur ex hac proportione geometrica $2 : 1 = 0 : 0$, in qua terminus quartus est $=0$, vti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior quam secundus, necesse est, vt & tertius duplo maior sit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica sunt planissima: cuilibet enim notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, esseque $n.0=0$,

sicque

sicque fore $n : 1 = 0 : 0$. Vnde patet fieri posse, vt duae cyphrae quamcunque inter se rationem geometricam teneant, etiamsi, rem arithmetice spectando, earum ratio semper sit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecunque intercedere possit, ad hanc diuersitatem indicandam consulto varii characteres vsurpantur; praesertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter se tenent, est inuestiganda. In calculo autem infinite paruorum nil aliud agitur, nisi vt ratio geometrica inter varia infinite parua indagetur, quod negotium propterea, nisi diuersis signis ad ea indicanda vteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque vllo modo expediri posset.

86. Si ergo, prouti in Analysi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite paruam, erit vtique tam $dx = 0$, quam $adx = 0$, denotante a quantitatem quamcunque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $adx : dx$ finita, nempe vt $a : 1$; & hanc obrem haec duo infinite parua dx & adx, etiamsi vtrumque sit $= 0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio inuestigetur. Simili modo, si diuersa occurrunt infinite parua dx & dy, etiamsi vtrumque sit $= 0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in inuestigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parua omnis vis calculi differentialis versatur. Vsus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum

87. Cum igitur infinite paruum ſit reuera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, ſi ad eam infinite paruum vel addamus vel ab ea ſubtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parua, erit tam $a+dx$, quam $a-dx$, & generaliter $a \pm ndx = a$. Siue enim relationem inter $a \pm ndx$ & a arithmetice intueamur ſiue geometrice, vtroque caſu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifeſta eſt; cum enim ſit $ndx = 0$, erit $a \pm ndx - a = 0$: geometrica vero ratio aequalitatis inde patet, quod ſit $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$. Hinc ſequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parua prae finitis euaneſcant, atque adeo horum reſpectu reiici queant.* Quare illa obiectio, qua Analyſis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, ſponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, niſi quod reuera ſit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac ſublimiori ſcientia rigorem geometricum ſummum, qui in Veterum libris deprehenditur, aeque diligenter obſeruari.

88. Quoniam quantitas infinite parua dx reuera eſt $= 0$, eius quoque quadratum dx^2, cubus dx^3, & quaevis alia poteſtas affirmatiuum habens exponentem erit $= 0$, ideoque aeque prae quantitatibus finitis euaneſcent. At vero etiam quantitas infinite parua dx^2 prae ipſa dx euaneſcit; erit enim $dx \pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, ſiue comparatio arithmetice ſiue geometrice inſtituatur. De priori quidem dubium eſt nullum, at geometrice comparando erit

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Pari modo erit $dx \pm dx^3 = dx$, & generaliter $dx \pm dx^{n+1} = dx$, dummodo ſit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur vti in poteſtatibus fit, vocetur dx infinite paruum primi ordinis, dx^2 ſecundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifeſtum eſt prae infinite paruis primi ordinis, euaneſcere infinite parua altiorum ordinum.

89. Simili modo oſtendetur infinite parua tertii ac ſuperiorum ordinum euaneſcere prae infinite paruis ordinis ſecundi; atque in genere infinite parua cuiusque ordinis ſuperioris euaneſcere prae infinite paruis ordinis inferioris. Ita ſi m fuerit numerus minor quam n, erit $adx^m + bdx^n = adx^m$, quia dx^n euaneſcit prae dx^m, vti oſtendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx euaneſcet prae $\sqrt{dx}$ ſeu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Quodſi autem exponens ipſius dx ſit $= 0$, erit $dx^0 = 1$, quamuis ſit $dx = 0$; hinc poteſtas dx^n, cum fiat $= 1$, ſi ſit $n = 0$, ex finita ſtatim fit quantitas infinite parua, atque exponens n nihilo ſit maior. Hinc ergo infiniti ordines infinite paruorum exiſtunt, quae etſi omnia ſunt $= 0$, tamen inter ſe probe diſtingui debent, ſi ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

 90. Sta-

90. Stabilita notione infinite paruorum facilius indolem infinitorum seu infinite magnorum exponere poterimus. Notum est valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem euadere, quo magis diminuatur denominator z; quare si z fiat quantitas omni assignabili quantitate minor, seu infinite parua, necesse est vt valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni assignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem si vnitas seu quaeuis alia quantitas finita diuidatur per infinite paruum seu o, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc signum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, ista habebitur aequatio $\frac{a}{dx} = \infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod fit inuertendo $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. Namque quo maior statuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z, eo minor fit fractionis valor, atque si z fiat quantitas infinite magna seu $z = \infty$, necesse est, vt fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite paruus.

91. Qui vtrumuis horum ratiociniorum negauerit, eum in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta euertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum vti b, vtrinque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0 . b$, atque ideo quantitas finita b per nihil o multiplicata praeberet

beret quantitatem finitam a, quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $= 0$: nam o per o multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty} = 0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty} =$ quantitati finitae b: quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty} = b$ legitime sequatur haec $\infty = \frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite paruus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analysi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex diuisione quantitatis finitae per infinite paruam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parua quotus, qui oritur ex diuisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, vt sit quantitas infinite parua ad finitam, ita finita ad infinite magnam; vti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities maior erit quam infi-

 nite

nite parua. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non ſunt improbandae, cum certiſſimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ ſequitur fieri poſſe, vt nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri poſſet, niſi planiſſime per legitimam conſequentiam eſſet deductum.

93. Quoniam inter infinite parua, ſi ſecundum rationem geometricam inter ſe comparantur, maximum deprehenditur diſcrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non ſolum geometrice ſed etiam arithmetice comparatae diſcrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex diuiſione quantitatis finitae a per infinite paruam dx oritur, $= A$, ita vt ſit $\frac{a}{dx} = A$: erit vtique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA ſit quantitas infinita, ſequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere poſſe. Hincque, ſi quantitas infinita per numerum finitum ſiue multiplicetur, ſiue diuidatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitatibus infinitis negari poteſt, eas vlterius augeri poſſe. Facile autem perſpicitur, ſi ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter ſe tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmeticam aequalitatis eſſe poſſe, cum potius earum differentia ſemper ſit infinite magna.

94. Quan-

94. Quantumuis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi vtimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos triuialibus carere possumus. In Arithmetica enim, vbi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negatiuus & infinite magnus statuitur, neque quisquam est tam mente captus, vt hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim vnquam negabit tangentem secantemue auguli recti non esse infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem sit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti sit $= 0$; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito esse posse finitum.

95. Cum sit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: est enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc est vt numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiusmodi relationes, vt aliae aliis infinities maiores esse queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; posito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infi-

nities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior eſt quam praecedentes: atque adeo ſi numerus m vel tantillum maior ſit quam n, erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96. Quemadmodum in quantitatibus infinite paruis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes ſint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae ſint quantumuis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx} + b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum diuiſione ortus $= 1 + \frac{b\,dx}{a} = 1$ ob $dx = 0$: interim tamen, ſi arithmetice comparentur, ob differentiam $= b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis eſt $= 1 + dx = 1$; verum tamen differentia eſt $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc ſi ad rationem geometricam ſpectemus, infinite magna inferiorum graduum

duum prae infinite magnis superiorum graduum euanescunt.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri posse, vt productum ex quantitate infinite magna in infinite paruam non solum quantitatem finitam producat, quod supra euenisse vidimus; sed etiam huiusmodi productum esse poterit siue infinite magnum siue infinite paruum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, si per infinite paruam dx multiplicetur, dat productum finitum $= a$; sin autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite paruum dx^2, vel dx^3, vel alius superioris ordinis, productum erit vel adx, vel adx^2, vel adx^3 &c. ideoque infinite paruum. Eodem modo intelligetur, si quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite paruam dx, productum fore infinite magnum: atque generatim si $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m, productum $abdx^{m-n}$ erit infinite paruum si m superat n; finitum si m aequat n; & infinite magnum si m superatur ab n.

98. Quantitates tam infinite paruae, quam infinite magnae in seriebus numerorum saepissime occurrunt, in quibus cum sint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum secundum leges continuitatis a quantitatibus finitis ad infinite magnas atque infinite paruas transitio fiat. Consideremus primum seriem nume-

numerorum naturalium, quae ſimul retro continuata erit

&c. $-4-3-2-1+0+1+2+3+4+$ &c.

Numeri ergo continuo decreſcendo praebent tandem o ſeu infinite paruum, vnde vlterius continuati negatiui euadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmatiuis decreſcentibus tranſiri per o ad negatiuos creſcentes. Sin autem eorum numerorum quadrata ſpectentur, quia omnia ſunt affirmatiua

&c. $16+9+4+1+0+1+4+9+16+$ &c.

erit o quoque tranſitus numerorum affirmatiuorum decreſcentium ad affirmatiuos creſcentes; atque ſi ſigna mutentur, erit quoque o tranſitus numerorum negatiuorum decreſcentium ad negatiuos creſcentes.

99. Si ſeries conſideretur, cuius terminus generalis eſt $\sqrt{x}$, quae etiam retro continuata erit huiusmodi

&c. $+\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+$ &c.

ex qua patet o, quoque tanquam limitem conſiderari poſſe, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria tranſeatur. Si iſti termini tanquam applicatae curuarum conſiderentur, perſpicitur, ſi eae fuerint affirmatiuae atque cousque decreuerint vt tandem euaneſcant, tum eas vlterius continuatas vel fieri negatiuas, vel iterum affirmatiuas, vel adeo imaginarias. Idem eueniet, ſi applicatae primum fuerint negatiuae; tum enim aeque poſtquam euanuerint, ſi vlterius continuentur, vel affirmatiuae

tiuae fient, vel negatiuae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curuis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in feriebus occurrunt faepe termini infiniti: fic in ferie harmonica, cuius terminus generalis eft $\frac{1}{x}$, indici $x=0$ refpondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque feries ita fe habebit:

$$\&c. - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad finiftram progrediendo termini crefcunt, ita vt $\frac{1}{0}$ iam fit infinite magnus, quem cum tranfierint, fient negatiui decrefcentes. Hinc quantitas infinite magna fpectari poteft tanquam limes, per quem numeri affirmatiui progreffi fiunt negatiui, & viciffim: vnde pluribus vifum eft, numeros negatiuos confiderari poffe, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac ferie termini continuo crefcentes, poftquam infinitum attigerint, abeant in negatiuos. At vero fi ad feriem, cuius terminus generalis eft $\frac{1}{xx}$, attendamus, poft tranfitum per infinitum rurfus prodeunt termini affirmatiui.

$$\&c.\ \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \&c.$$

quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in feriebus terminus infinitus conftituit limitem, terminos reales ab imagina-

riis segregantem, vti fit in serie hac, cuius terminus generalis est $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\&c. + \frac{1}{\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-2}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \&c.$$

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

$$\&c. + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \&c.$$

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit o neque ∞, vti fit, si terminus generalis fuerit $1 + \sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores fiunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmatiui, abeunt in negatiuos, transitus semper fit per limitem vel infinite paruum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curuis deprehendimus, clarius elucent.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inseruiunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, vt

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ca-

eaque fine fine, hoc eft in infinitum continuetur, nullum certe eft dubium, quin omnium horum terminorum fumma maior fit omni numero affignabili; eaque propterea infinita fit neceffe eft. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex euolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

ponendo $x = 1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ideoque fumma $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamuis autem hic nullum dubium nafci queat, cum idem numerus finitus infinities fumtus in infinitum abire debeat; tamen ipfa origo ex ferie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

grauiffima incommoda afferre videtur: fi enim pro x fucceffiue ponantur numeri 1, 2, 3, &c. fequentes feries cum fuis fummis prodibunt.

A . . . $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} =$ infinito

B . . . $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$

C . . . $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D . . . $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

&c.

Cum igitur ſeries B ſingulos terminos praeter primum habeat maiores, quam ſeries A, ſumma ſeriei B neceſſario multo maior eſſe deberet, quam ſumma ſeriei A: interim tamen iſte calculus oſtendit ſeriei A ſummam infinitam, ſeriei B vero ſummam negativam, hoc eſt nihilo minorem, quod concipi non poteſt. Multo minus cum ſolitis ideis conciliari poteſt, quemadmodum huius eſt ſequentium ſerierum C, D, &c. ſummae fiant negatiuae, cum tamen omnes termini ſint affirmatiui.

104. Ob hanc rationem opinio ſupra allata multis probabilis videri ſolet, quantitates ſcilicet negatiuas quandoque conſiderari poſſe tanquam infinito maiores ſeu plus quam infinitas; & cum etiam numeros vltra nihil diminuendo perueniatur ad negatiuos, diſcrimen ſtatuunt inter numeros negatiuos huiusmodi $-1, -2, -3$, &c. & huiusmodi $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}$, &c. illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam ſuggerit haec ſeries

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vnde oriuntur ſequentes ſeries:

A . . $1+2+3+4+5+\&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} =$ infinito

B . . $1+4+12+32+80+\&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$

vbi cum ſinguli termini ſeriei B ſint maiores, quam ſinguli termini ſeriei A, primis ſolis exceptis, quemadmodum

dum ſumma ſeriei A ſit infinita, ſeriei B vero ſumma aequalis 1, hoc eſt ſoli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem ſi vellemus negare eſſe $-1 = \frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmiſſima Analyſeos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorſus admitti non poteſt. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales ſuppeditauerant, ſummas eſſe veras. Cum enim hae ſeries ex continua diuiſione oriantur, dum reſiduum continuo vlterius diuiditur: reſiduum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime reſiduum vltimum, hoc eſt quod in diuiſione infiniteſima remanet, omitti poteſt, quippe quod ſit infinite magnum. Quia autem hoc in ſuperioribus ſeriebus non obſeruatur, dum nullius reſidui ratio habetur, mirum non eſt, eas ſummationes ad abſurdum deducere. Haecque reſponſio, vti eſt ex ipſa ſerierum geneſi petita, ita quoque eſt veriſſima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur euolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, vti in terminis primum finitis tantum abſoluitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}.$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius feriei finitae $1+x+x^2+x^3$ fummam effe $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$; & qui fummam huius feriei

$$1+x+x^2+x^3+ \ldots\ldots\ldots + x^{1000}$$

ftatuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error fi x fit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perfpicuum eft eum, qui eiusdem feriei in infinitum continuatae feu huius:

$$1+x+x^2+x^3+ \ldots\ldots\ldots + x^{\infty}$$

fummam ftatuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate effe aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae fi fit $x > 1$ vtique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur feriei in infinitum continuatae

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\&c.$$

fum-

summa reuera sit $= \frac{1}{1-x}$, si fuerit x fractio vnitate minor, tum enim error $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ fit infinite paruus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto potest negligi. Sic posito $x = \frac{1}{2}$, erit reuera

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \&c. = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

similiterque reliquarum serierum, si x sit fractio vnitate minor, summa vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem responsio valet de summis serierum diuergentium, in quibus signa + & — alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi solent, ponendo pro x numeros negatiuos. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \&c.$$

nisi vltimi residui ratio habeatur, foret:

A . . . $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$

B . . . $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c. = \frac{1}{3}$

C . . . $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 - \&c. = \frac{1}{4}$

&c.

Patet autem seriei secundae B summam ideo non posse esse $= \frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu summentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiusque seriei summa debet esse limes, ad quem eo propius perueniatur, quo plures termini actu addantur.

109. Ex his quidam concluserunt huiusmodi series, quae vocantur diuergentes, prorsus nullas habere summas

fixas;

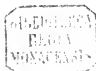
fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio, qui pro summa seriei in infinitum continuatae haberi posset: quae sententia, cum istae summae iam ob neglecta vltima residua erroneae sint ostensae, veritati maxime est consentanea. Interim tamen contra eam summo iure obiici potest, has memoratas summas, quantumuis a veritate abhorrere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admissis plurima praeclara esse eruta, quibus si istas summationes prorsus reiicere vellemus, carendum esset. Neque vero hae summae, si essent falsae, perpetuo ad veritatem nos ducere possent; quin potius, cum non parum sed infinite a veritate discrepent, nos quoque in infinitum a vero seducere deberent. Quod tamen cum non eueniat, difficillimus nobis restat nodus soluendus.

110. Dico igitur in voce *summae* latere totam difficultatem; si enim *summa* seriei, vt vulgo vsus fert, sumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium est nullum, quin earum tantum serierum in infinitum excurrentium summae exhiberi queant, quae sint conuergentes, atque continuo propius ad certum statumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem diuergentes, quarum termini non decrescunt, siue signa + & — alternentur siue secus, prorsus nullas habebunt summas fixas; si quidem vox summae hoc sensu pro aggregato omnium terminorum accipiatur. At vero in iis casibus, quorum meminimus, quibus ex istiusmodi summis erroneis veritas tamen

men elicitur; id non fit, quatenus expreſſio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, eſt ſumma ſeriei $1+x+x^2+x^3+$&c. ſed quatenus ea expreſſio euoluta hanc ſeriem praebet; ſicque in hoc negotio nomen ſummae prorſus omitti poſſet.

111. Haec igitur incommoda, hasque apparentes contradictiones penitus euitabimus, ſi voci *ſummae* aliam notionem, atque vulgo fieri ſolet, tribuamus. Dicamus ergo ſeriei cuiusque infinitae *ſummam* eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ſeries naſcatur. Hocque ſenſu ſeriei infinitae $1+x+x^2+x^3+$ &c. ſumma reuera erit $= \frac{1}{1-x}$, quia illa ſeries ex huius fractionis euolutione oritur: quicunque numerus loco x ſubſtituatur. Hoc pacto, ſi ſeries fuerit conuergens, iſta noua vocis ſummae definitio, cum conſueta congruet; & quia diuergentes nullas habent ſummas proprie ſic dictas, hinc nullum incommodum ex noua hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis vtilitatem ſerierum diuergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.

N CAPUT





CAPUT IV.

DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA.

112.

In capite primo vidimus, ſi quantitas variabilis x accipiat augmentum $= \omega$, tum cuiusuis functionis ipſius x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. ſiue haec expreſſio ſit finita ſiue in infinitum excurrat. Functio ergo y, ſi in ea loco x ſcribatur $x+\omega$, valorem ſequentem induet:

$$y^1 = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

a quo, ſi valor prior y ſubtrahatur, remanebit differentia functionis y, quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

atque cum valor ipſius x ſequens ſit $x^1 = x + \omega$, erit differentia ipſius x, nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem P, Q, R, &c. denotant functiones ipſius x pendentes ab y, quas capite primo inuenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento ω augeatur quantitas variabilis x, ſimul definiri poterit augmentum, quod cuique ipſius x functioni y accedit; dummodo pro quouis ipſius y valore functiones P, Q, R, S, &c. definire valeamus. In hoc autem capite, atque in vniuerſa Analyſi infinitorum augmentum illud ω, quo quantitatem variabilem x creſcere ſumſimus, ſtatuemus infinite par-

paruum, atque adeo euanefcens, feu $=0$. Vnde manifeftum eft, incrementum feu differentiam functionis y quoque fore infinite paruam. Cum autem in hac hypothefi finguli termini expreffionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus euanefcant, (88. & feqq.), folus primus $P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc cafu, quo ω eft infinite paruum, differentia ipfius y nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analyfis infinitorum, quam hic tractare caepimus, nil aliud, nifi cafus particularis methodi differentiarum in capite primo expofitae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant affumtae, ftatuantur infinite paruae. Quo igitur ifte cafus, quo vniuerfa Analyfis infinitorum continetur, a methodo differentiarum diftinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam fignis ad differentias iftas infinite paruas denotandas vti conueniet. Differentias igitur infinite paruas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diuerfos ordines conftituiffemus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, fecunda, tertia, &c. cuiusque functionis fignificent. Loco characteris autem Δ, quo ante differentias indicaueramus, nunc vtemur charactere d; ita vt dy fignificet differentiale primum ipfius y; ddy differentiale fecundum; d^3y tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite paruas, quas hic tractamus, *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia inuestigantur atque ad vsum accommodantur, appellari solet *Calculus differentialis*. Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aeque ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc nouam Analyseos partem excolere coepit, aliis tam nominibus quam signis vtuntur. Differentias enim infinite paruas, quas nos differentialia vocamus, potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa:* quae voces vti latino sermoni magis conueniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEUTONO ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite paruum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamuis autem circa vocum vsum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita vt $\dot{y}$, iis significet fluxionem primam ipsius y; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, vti ab arbitrio pen-

pendens, etſi improbari nequit, ſi punctorum numerus fuerit paruus, vt numerando facile percipi queat; tamen ſi plura puncta inſcribi debeant, maximam confuſionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim ſeu fluxio decima perquam incommode hoc modo $\overset{\vdots\vdots}{y}$ repraeſentatur, cum noſtro ſignandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem caſus, quibus multo adhuc ſuperiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorſus ſit ineptus.

117. Noſtris igitur tam nominibus quam ſignis vtemur, quippe quorum illa in noſtris regionibus iam ſunt vſu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & ſignationes hic commemorare, vt qui eorum libros euoluunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli ſuo mori tam pertinaciter adhaerent, vt quae noſtro more ſunt ſcripta, prorſus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipſorum opera maxima cum auiditate perlegimus, ex iisque ſummum fructum percipimus; ſaepenumero vero etiam animaduertimus, ipſos noſtratium ſcripta non ſine vtilitate legiſſe. Quamobrem etſi idem vbique atque aequabilis modus cogitata ſua exprimendi maxime eſſet optandus, tamen non admodum eſt difficile, vt vtrique aſſueſcamus, quantum quidem intelligentia librorum alieno more ſcriptorum poſtulat.

118. Cum igitur littera ω nobis hactenus denotaverit differentiam seu incrementum, quo quantitas variabilis x crescere concipitur, nunc autem ω statuatur infinite paruum, erit ω differentiale ipsius x; & hancobrem recepto signandi modo erit $\omega = dx$; atque dx proinde erit differentia infinite parua, qua ipsa x crescere concipitur. Simili modo differentiale ipsius y ita exprimetur dy; atque si y fuerit functio quaecunque ipsius x, differentiale dy denotabit incrementum, quod functio y capit, dum x abit in $x + dx$. Quare si in functione y vbique loco x substituatur $x + dx$, & quantitas resultans ponatur $= y^{I}$, erit $dy = y^{I} - y$, hocque modo differentiale cuiusque functionis reperietur: quod quidem intelligendum est de differentiali primo seu primi ordinis; de reliquis enim postea videbimus.

119. Probe ergo tenendum est litteram d hic non quantitatem denotare, sed tantum loco signi adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera l pro signo logarithmi, & in Algebra charactere $\surd$ pro signo radicis vti consueuimus. Hinc dy non significat, vti vulgo in Analysi vsu est receptum, productum ex quantitate d in quantitatem y, sed ita enunciari debet, vt dicatur differentiale ipsius y. Simili modo si scribatur $d^2 y$, neque binarius exponentem, neque d^2 potestatem ipsius d significat, sed adhibetur tantum ad nomen *differentialis secundi* breviter & apte exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, sed signum tantum ex-

exhibeat, ad confusionem vitandam in calculis, vbi plures quantitates constantes occurrunt, littera d ad earum designationem vsurpari nequit; perinde atque euitare solemus litteram l tanquam quantitatem in calculum inducere, vbi simul logarithmi occurrunt. Optandum autem esset, vt litterae istae d & l per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates designari solent, confundantur: simili scilicet modo, quo loco litterae r, qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iste distortus $\sqrt{}$ in vsum est receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipsius y, si y fuerit functio quaecunque ipsius x, habiturum esse huiusmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = Pdx$. Qualiscunque scilicet fuerit y functio ipsius x, eius differentiale dy exprimetur certa quadam functione ipsius x, pro qua hic ponimus P, per differentiale ipsius x, nempe per dx multiplicata. Etiamsi ergo differentialia ipsarum x & y reuera sint infinite parua, ideoque nihilo aequalia; tamen inter se finitam habebunt rationem: erit scilicet $dy : dx = P : 1$. Inuenta ergo functione ista P, innotescit ratio inter differentiale dx & differentiale dy. Cum igitur calculus differentialis in inuentione differentialium consistat, in eo non tam ipsa differentialia, quae sunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore inuenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica inuestigatur.

121. Differentialia igitur multo facilius inueniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam

tam Δy, qua functio y crescit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non sufficit functionem P nosse, sed indagari insuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam posuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipsius y autem inueniendum satis est, si nouerimus solam functionem P. Quamobrem ex cognita differentia finita cuiusque functionis ipsius x, facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui potest eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum simul cognitis differentia quaeuis finita cuiusque functionis propositae inueniri queat. Ceterum ex his manifestum est differentiale primum $dy = P\,dx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum ω, quod quantitas variabilis x accipere concipitur, fuerit vehementer paruum, ita vt in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$ termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parui, vt in computo, quo summus rigor non obseruatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali $P\,dx$, ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: vnde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parua considerari posse, eaque nihilo reuera aequalia esse negant, atque tantum inde-

indefinite parua ſtatuunt. Haecque idea aliis occaſionem praebuit Analyſin infinitorum accuſandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, ſed tantum vero proximas; quae obiectio ſemper aliquam vim retineret, niſi infinite parua prorſus nihilo aequalia ſtatueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parua plane in nihilum abire, ii vt vim obiectionis deſtruere videantur, differentialia comparant minimis puluiſculis ratione totius terrae, cuius quantitatem nemo non veram tradidiſſe cenſeretur, qui vnico puluiſculo a veritate aberrauerit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite paruam eſſe volunt, qualis eſt inter totam terram minimumque puluiſculum: atque ſi cui hoc diſcrimen adhuc non ſatis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, vt paruitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoſcere coguntur, ſummum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per Analyſin infinitorum ſolutiones inueniri poſſunt, ex earumque congruentia bonitatem poſterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum ſaepe numero per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius euincit, eas quantitates, quae in calculo ſint neglectae, non ſolum non incomprehenſibiliter paruas, ſed plane nullas eſſe, vti nos aſſumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium fecundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis fecundis in capite primo expofitis, ponendo quantitatem ω infinite paruam $= dx$. Cum igitur fi ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crefcere, ita vt fi valor fecundus x^{I} fuerit $= x + dx$, fequentes futuri fint $x^{II} = x + 2dx$; $x^{III} = x + 3dx$ &c. ob differentias primas conftantes $= dx$, differentiae fecundae euanefcent: erit ergo quoque differentiale fecundum ipfius x nempe $ddx = 0$, atque ob hanc rationem quoque differentialia vlteriora erunt $= 0$, fcilicet $d^3x = 0$, $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem poteft, haec differentialia, cum fint infinite parua, per fe effe $= 0$, neque hoc proprium effe eius quantitatis variabilis x, cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc euanefcentiam ita interpretari oportet, vt differentialia ddx, d^3x &c. non folum in fe fpectata fint nulla, fed etiam ratione poteftatum ipfius dx, cum quibus alias comparari poffent, euanefcere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum eft differentiam fecundam cuiusque functionis ipfius x, quae fit y, huiusmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^3 +$ &c. Quodfi ergo ω fit infinite paruum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ euanefcent, vnde pofito $\omega = dx$ differentiale fecundum ipfius y erit $= Pdx^2$, denotante dx^2 quadratum differentialis dx. Quare etfi differentiale fecundum ipfius y, nempe ddy per fe fit $= 0$, tamen cum fit $ddy = Pdx^2$, ad dx^2 habebit rationem finitam, vti

vti P ad 1: ſin autem ſit $y = x$, tum ſit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc caſu differentiale ſecundum ipſius x etiam reſpectu dx^2 altiorumque ipſius dx poteſtatum euaneſcit. Hocque modo intelligenda ſunt ea, quae ante diximus, eſſe ſcilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia ſecunda nil aliud ſit, niſi differentia differentiae primae; differentiale quoque ſecundum ſeu vti ſaepe vocari ſolet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas conſtans nulla neque augmenta neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae ſolis quantitatibus variabilibus ſunt propriae, dicimus eodem ſenſu quantitatum conſtantium differentialia omnia cuiusque ordinis eſſe $= 0$, hoc eſt prae omnibus adeo poteſtatibus ipſius dx euaneſcere. Cum igitur differentiale ipſius dx hoc eſt ddx ſit $= 0$; differentiale dx tanquam quantitas conſtans conſiderari poteſt, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur conſtans, toties ea quantitas intelligenda eſt continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate, cuius differentiale ſit conſtans, hicque ſingularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia ſunt obnoxia, aeſtimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipſius y eſſe $= pdx$; atque ad eius differentiale ſecundum inueniendum, ipſius pdx denuo differentiale quaeri debet. Cum autem dx ſit conſtans, neque varietur eiamſi loco x ſcri-

 ba-

batur $x + dx$, tantum opus eſt, vt quantitatis finitae p differentiale quaeratur: ſit igitur $dp = q\,dx$, quoniam vidimus omnium functionum ipſius x differentialia ad huiusmodi formam reuocari: & cum ſit, vti de differentiis finitis oſtendimus, differentiale ipſius $np = nq\,dx$, ſi n ſit quantitas conſtans, ponatur dx loco n, eritque differentiale ipſius $p\,dx = q\,dx^2$. Hancobrem ſi ſit $dy = p\,dx$ & $dp = q\,dx$, erit differentiale ſecundum $ddy = q\,dx^2$, ſicque conſtat, quod iam ante innuimus, differentiale ſecundum ipſius y ad dx^2 habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notauimus differentias ſecundas atque ſequentes conſtitui non poſſe, niſi valores ſucceſſiui ipſius x certa quadam lege progredi aſſumantur, quae lex cum ſit arbitraria, his valoribus progreſſionem arithmeticam tanquam facillimam ſimulque aptiſſimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus ſecundis nihil certi ſtatui poterit, niſi differentialia prima, quibus quantitas variabilis x continuo creſcere concipitur, ſecundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipſius x, nempe dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. omnia inter ſe aequalia, vnde fiunt differentialia ſecunda

$$ddx = dx^{I} - dx = 0\,;\quad ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0, \text{ \&c.}$$

Quoniam ergo differentialia ſecunda & vlteriora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis x inter ſe tenent, pendent, hicque ordo ſit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens diſcrimen inter differentialia prima ac ſequentia ratione inuentionis intercedit.

129. Quodsi autem successiui ipsius x valores $x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}$, &c. non secundum arithmeticam progressionem statuantur, sed alia quacunque lege progredi ponantur, tum eorum quoque differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. non erunt inter se aequalia, neque propterea erit $ddx = o$. Hancobrem differentialia secunda quarumvis functionum ipsius x aliam formam induent; si enim huiusmodi functionis y differentiale primum fuerit $= pdx$ ad eius differentiale secundum inueniendum non sufficit differentiale ipsius p per dx multiplicasse, sed insuper ratio differentialis ipsius dx, quod est ddx haberi debet. Quoniam enim differentiale secundum oritur, si pdx a valore eius sequente, qui oritur dum $x + dx$ loco x & $dx + ddx$ loco dx ponitur, subtrahatur, ponamus valorem ipsius p sequentem esse $= p + qdx$, eritque ipsius pdx valor sequens

$$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

a quo subtrahatur pdx, eritque differentiale secundum

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

quia $qdxddx$ prae $pddx$ euanescit.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis est simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius x incrementis tribuatur, tamen frequenter euenire solet, vt non eius quantitatis variabilis x, cuius y est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cuiuspiam quantitatis, cuius ipsa x sit functio quaedam. Quin etiam saepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima statuantur ae-

qualis, cuius nequidem relatio ad x constet. Priori casu pendebunt differentialia secunda & sequentia ipsius x a ratione, quam x tenet ad illam quantitatem, quae aequabiliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia secunda ipsius y ex differentialibus ipsius x definire docuimus. Posteriori autem casu differentialia secunda & sequentia ipsius x tanquam incognita spectari, eorumque loco signa ddx, d^3x, d^4x, &c. vsurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his casibus differentiationes singulas absolui oporteat, infra fusius simus ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tanquam vniformiter crescentem assumere, ita vt eius differentialia prima dx, dx^I, dx^{II}, &c. inter se omnia aequalia, ac propterea differentialia secunda ac sequentia nihilo aequalia statuantur: quae conditio ita enunciari solet vt differentiale ipsius x nempe dx constans assumi dicatur. Sit deinde y functio quaecunque ipsius x, quae cum per x & constantes definiatur, singula quoque eius differentialia prima, secunda, tertia, quarta, &c. quae his signis indicantur dy, ddy, d^3y, d^4y, &c. per x & dx exprimi poterunt. Scilicet si in y loco x scribatur $x+dx$, ab hocque valore prior subtrahatur, remanebit differentiale primum dy: in quo si porro loco x ponatur $x+dx$, prodibit dy^I, eritque $ddy = dy^I - dy$, simili modo ponendo $x+dx$ loco x, ex ddy nascetur ddy^I, atque $ddy^I - ddy$ dabit d^3y & ita porro: in quibus

bus operationibus differentiale dx perpetuo tanquam quantitas constans spectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio y per x determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo expeditius ex iis, quae postea sumus tradituri, definietur valor functionis p, quae per dx multiplicata praebeat differentiale primum dy. Posito ergo $dy = pdx$, differentiale ipsius pdx dabit differentiale secundum ddy; vnde si fuerit $dp = qdx$, ob dx constans, orietur $ddy = qdx^2$, vti iam ante ostendimus. Vlterius igitur progrediendo, cum differentialis secundi differentiale praebeat differentiale tertium, ponamus esse $dq = rdx$, eritque $d^3y = rdx^3$: simili modo si huius functionis r differentiale quaeratur, fueritque $dr = sdx$, habebitur differentiale quartum $d^4y = sdx^4$; sicque porro, dummodo nouerimus differentiale primum cuiusque functionis inuenire, differentiale cuiusque ordinis assignare poterimus.

133. Quo igitur formae singulorum horum differentialium, simulque ratio ea inueniendi clarius menti repraesentetur, ea sequenti tabella complecti visum est.

Si y

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x,

erit	atque posito
$dy = p\,dx$	$dp = q\,dx$
$ddy = q\,dx^2$	$dq = r\,dx$
$d^3y = r\,dx^3$	$dr = s\,dx$
$d^4y = s\,dx^4$	$ds = t\,dx$
$d^5y = t\,dx^5$	&c.

Cum igitur functio p ex functione y per differentiationem cognoscatur, similique modo ex p inueniatur q, hincque porro r, & ex eo vlterius s, &c. differentialia cuiusuis ordinis ipsius y facile reperientur, dummodo differentiale dx assumatur constans.

134. Cum p, q, r, s, t, &c. sint quantitates finitae, functiones nimirum ipsius x, differentiale primum ipsius y, rationem finitam habebit ad differentiale primum ipsius x, scilicet vt p ad 1; hancque ob causam differentialia dx & dy vocantur homogenea. Deinde cum ddy ad dx^2 habeat rationem finitam vt q ad 1, erunt ddy & dx^2 homogenea; simili modo homogenea erunt d^3q & dx^3, itemque d^4y & dx^4, & ita porro. Vnde vti differentialia prima sunt inter se homogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius

sius y ordinis n, quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneum erit cum dx^n, hoc est cum potestate differentialis dx, cuius exponens est n.

135. Cum igitur prae dx euanescant omnes eius potestates, quarum exponentes sunt vnitate maiores, prae dy quoque euanescent dx^2, dx^3, dx^4, &c. & quae ad has potestates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum ddy, d^3y, d^4y, &c. Simili modo prae ddy quia est homogeneum cum dx^2, omnes ipsius dx potestates quadrato superiores dx^3, dx^4, &c. euanescent, euanescent ergo quoque d^3y, d^4y, &c. Atque prae d^3y, euanescent dx^4, d^4y; dx^5, d^5y; &c. Hincque facile, si propositae fuerint quaecunque expressiones huiusmodi differentialia inuoluentes, dignosci poterunt, vtrum sint homogeneae nec ne? Respici enim debebunt tantum differentialia, omissis quantitatibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus secundi altiorumque ordinum scribantur potestates ipsius dx ipsis homogeneae, quae si praebeant vbique eundem dimensionum numerum, expressiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ esse inter se homogeneas. Nam ddy^2 denotat quadratum ipsius ddy, & quia ddy homogeneum est cum dx^2, erit ddy^2 homogeneum cum dx^4. Deinde quia dy cum dx & d^3y cum dx^3 homogeneum est, erit productum dyd^3y cum dx^4 homogeneum: ex quo sequitur expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3y$ inter se esse homogeneas, ideo-

que rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$ & $\frac{Qd^5y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro dy, ddy, d^3y & d^5y his ipsius dx potestatibus ipsis homogeneis dx, dx^2, dx^3 & dx^5, orientur hae expressiones Pdx^3 & Qdx^3, quae vtique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius dx potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinities siue maior siue minor altera, hincque vna respectu alterius euanescet. Sic $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ ad $\frac{Qddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad Pdx & altera ad Qdx^3, vnde haec prae illa euanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy} \text{ \& } \frac{Pd^3y}{dx^2},$$

quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ob } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Hoc-

Hocque pacto expressiones differentiales quandoque mirifice contrahi possunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusuis quantitatis propositae differentiale primum inueniri potest: & quoniam differentialia secunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex secundis & ita porro sequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentialia inueniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina deriuantur, quae vsu sunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod significat *differentiale inuenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur. *Differentiatio* autem denotat operationem, qua differentialia inueniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentialia inueniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale inuestigatur, ita vicissim calculi species constituitur quoque in inuentione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propositum fuerit differentiale quodcunque, eius respectu ea quantitas, cuius est differentiale, vocari solet integrale. Cuius denominationis ratio est, quod, cum differentiale considerari possit, tanquam pars infinite parua, qua quantitas quaepiam crescit, ipsa illa quantitas respectu huius partis tanquam totum seu integrum spectari potest, hancque ob causam eius vo-

catur integrale. Sic cum dy fit differentiale ipfius y, viciffim y erit integrale ipfius dy, & cum ddy fit differentiale ipfius dy, erit dy integrale ipfius ddy. Similique modo erit ddy integrale ipfius d^3y, & d^3y ipfius d^4y & ita porro: vnde quaelibet differentiatio, fi inuerfe fpectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clariffime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo expofita explicari poteft. Poftquam enim effet oftenfum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inueniri oporteat, retrogrediendo quoque monftrauimus, quomodo, fi propofita fuerit differentia, ea quantitas inueniri queat, cuius illa fit differentia; quam quantitatem refpectu fuae differentiae vocauimus eius fummam. Vti igitur ad infinita parua procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita fummae quae ibi erant vocatae, integralium nomen fortiuntur: & hanc ob caufam integralia quoque non raro fummae appellari folent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem inuenire, idem eft, quod noftro more dati differentialis integrale inuenire dicimus.

141. Vti differentialia charactere d defignamus, ita ad integralia indicanda hac littera $\int$ vtimur, quae ergo quantitatibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa funt differentialia. Sic fi differentiale ipfius y fuerit pdx, feu $dy = pdx$, erit y integrale ipfius pdx,

$p\,dx$, quod hoc modo ſcribitur $y = \int p\,dx$, cum ſit $y = \int dy$. Integrale ergo ipſius $p\,dx$, quod per $\int p\,dx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale eſt $p\,dx$. Simili modo cum ſit $ddy = q\,dx^2$ exiſtente $dp = q\,dx$; erit integrale ipſius ddy hoc eſt $dy = p\,dx$, atque ob $p = \int q\,dx$, erit $dy = dx\int q\,dx$, ac propterea $y = \int dx\int q\,dx$. Si vlterius ſit $dq = r\,dx$, erit $q = \int r\,dx$ & $dp = dx\int r\,dx$; vnde ſi character $\int$ denuo praefigatur, fiet $p = \int dx\int r\,dx$, porroque $dy = dx\int dx\int r\,dx$, atque $y = \int dx\int dx\int r\,dx$.

142. Quia differentiale dy eſt quantitas infinite parva, eius integrale autem y quantitas finita, parique modo differentiale ſecundum ddy infinities minus eſt, quam eius integrale dy, manifeſtum eſt differentialia prae ſuis integralibus euaneſcere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parua in ordines diuidi ſolent, diciturque infinite paruum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima dx, dy. Infinite paruum ſecundi ordinis complectitur differentialia ſecundi ordinis, quae homogenea ſunt cum dx^2; ſimilique modo infinite parva, quae cum dx^3 ſunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; ſicque porro. Vnde vti infinite parua primi ordinis prae quantitatibus finitis euaneſcunt, ſic infinite parua ſecundi ordinis prae infinite paruis primi ordinis, atque generatim infinite parua cuiusque ordinis altioris prae infinite paruis ordinis inferioris euaneſcent.

143. His igitur infinite paruorum ordinibus conſtitutis, vti differentiale quantitatis finitae eſt infinite par-

vum primi ordinis, atque differentiale infinite parui primi ordinis est infinite paruum secundi ordinis, & ita porro; ita vicissim manifestum est integrale infinite parui primi ordinis esse quantitatem finitam, integrale autem infinite parui secundi ordinis esse infinite paruum primi ordinis sicque deinceps. Quare si differentiale propositum fuerit infinite paruum ordinis n, eius integrale erit infinite paruum ordinis $n-1$; hincque vti differentiando ordo infinite paruorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipsas quantitates finitas perueniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum secundum hanc legem perueniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione instituta ad quantitates adhuc infinities maiores, sicque progrediendo obtinebimus similes infinitorum ordines, quorum quisque praecedentem infinities superat.

144. Superest vt in hoc Capite quaedam de vsu signorum recepto moneamus, ne ambiguitati vllus locus relinquatur. Ac primo quidem signum differentiationis d tantum afficit literam immediate sequentem solam: sic dxy non denotat differentiale producti xy, sed differentiale ipsius x per ipsam quantitatem y multiplicatum. Solet autem, quominus confusio nascatur, quantitas y ante signum d hoc modo scribi ydx, quo productum ex y in dx indicatur. Attamen si y sit quantitas vel signum radicale $\surd$ vel logarithmicum habens praefixum, tum post differentiale poni solet: nimirum $dx\surd(aa-xx)$ significat productum ex quantitate finita $\surd(aa-xx)$ in dif-

differentiale dx, ſimilique modo $dxl(1+x)$ eſt productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per dx multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\sqrt{x}$ exprimit productum differentialis ſecundi ddy & quantitatis finitae $\sqrt{x}$.

145. Neque vero ſignum d litteram immediate ſequentem ſolam afficit, ſed etiam nequidem exponentem ſi quem habet, ſpectat. Ita dx^2 non exprimit differentiale ipſius x^2, ſed quadratum differentialis ipſius x, ita vt exponens 2 non ad x, ſed ad dx referri debeat. Poſſet etiam ſcribi $dxdx$, quemadmodum productum duorum differentialium dx & dy hoc modo $dxdy$ exponitur, verum prior modus dx^2, vti eſt breuior, ita vſitatior. Praeſertim ſi altiores poteſtates ipſius dx eſſent indicandae, nimis prolixum foret dx toties repeti: ſic dx^3 denotat cubum ipſius dx, & in differentialibus altiorum ordinum ſimilis ratio obſeruatur. Scilicet ddy^4 denotat poteſtatem quartam differentialis ſecundi ordinis ddy; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ ſignificat quadratum differentialis tertii ordinis ipſius y multiplicatum eſſe per $\sqrt{x}$; ſin autem per quantitatem rationalem x multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo xd^3y^2.

146. Sin autem velimus, vt ſignum d plus quam ſolam litteram ſubſequentem afficiat, id peculiari modo indicari debet. Vtimur hoc caſu praecipue vncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Vti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum ſi velimus differentiale poteſtatis hu-

huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix euitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita vt $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum d ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius xdy; & $d.^3xdy\sqrt{(aa+xx)}$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdy\sqrt{(aa+xx)}$, quae est productum ex quantitatibus finitis x & $\sqrt{(aa+xx)}$ atque ex differentiali dy.

147. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dxlx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $xdx\int dxlx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx\int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx\int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita vt $\int ydx.\int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148.

148. Analyſis infinitorum igitur cum in differentialibus tum in integralibus inueniendis verſatur, & hanc obrem in duas praecipuas partes diuiditur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur quantitatum quarumvis differentialia inueniendi; in poſteriori vero via monſtratur differentialium propoſitorum integralia inueſtigandi: in vtroque autem ſimul ſummus vſus, quem iſti calculi tam ad ipſam Analyſin quam ad Geometriam ſublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob cauſam iſta Analyſeos pars iam tanta accepit incrementa, vt modico volumine prorſus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam noua artificia integrandi, quam adiumenta eius in ſoluendis variis generis problematibus, deteguntur, vt ob haec noua inuenta, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte deſcribi atque explicari poſſit. Dabo autem operam, vt quae adhuc ſunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel ſaltem methodos explicem, vnde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures Analyſeos infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inueniuntur paſſim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi ſolet methodus differentialia ſecundi atque altiorum ordinum inueniendi: quoniam autem modum cuiusque ordinis differentialia inueniendi in ipſo calculo differentiali ſum expoſiturus, hac ſubdiuiſione, quae potius

ex merito inuentionis, quam ex re ipſa facta eſſe videtur, ſuperſedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyſeos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales transtulit, quia vtrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam transcendentes accommodare conſtitui, hinc partem peculiarem facere ſuperfluum atque inſtituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare ſtatui, modumque ſum expoſiturus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non ſolum prima, ſed etiam ſecunda & altiorum ordinum expedite inueniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, ſiue ſint functiones vnius variabilis, ſiue plurium, ſiue demum explicite dentur, ſiue per aequationes. Deinde inuentionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem ſine calculi integralis ſubſidio peruenire licet: cuiusmodi ſunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, viciſſimque arcuum circularium ſinus, & tangentes. Denique etiam quantitates vtcunque ex his compoſitas & permixtas differentiare docebo; ſicque calculi differentialis pars prior, methodus ſcilicet differentiandi abſoluetur.

151. Altera pars vsui, quem methodus differentiandi tam ad Analysin quam Geometriam sublimiorem affert, explicando est destinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inueniendas, partim ad series tractandas atque summandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expressionum, quae certis casibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae sunt alia. Geometria autem sublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curuarum, eorumque curuatura ipsa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curuis vel reflexos vel refractos resolui possunt. Quibus etsi amplissimus tractatus impleri posset, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breuiter ac perspicue explicare.



CAPUT V.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM VNICAM VARIABILEM INUOLUENTIUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale eſt $= dx$ erit x in proximum promouendo $x^{I} = x + dx$. Quare ſi fuerit y quaecunque functio ipſius x, ſi in ea loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^{I}, atque differentia $y^{I} - y$ dabit differentiale ipſius y. Si igitur ponamus $y = x^{n}$ fiet

$$y^{I} = (x + dx)^{n} = x^{n} + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^{2} + \&c.$$

eritque ergo

$$dy = y^{I} - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^{2} + \&c.$$

At in hac expreſſione terminus ſecundus cum reliquis ſequentibus prae primo euaneſcit, eritque idcirco $nx^{n-1}dx$ differentiale ipſius x^{n}, ſeu $d.x^{n} = nx^{n-1}dx$. Vnde ſi a ſit numerus ſeu quantitas conſtans, erit quoque $d.ax^{n} = nax^{n-1}dx$. Cuiuscunque ergo ipſius x poteſtatis differentiale inuenitur, multiplicando eam per exponentem, diuidendo per x, & reliquum per dx multiplicando, quae regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipſius x^{n}, ex eo facile differentiale ſecundum reperitur, dummodo, vt hic

hic constanter assumemus, differentiale dx constans statuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}dx$ factor ndx sit constans, alterius factoris x^{n-1} differentiale sumi debet, quod proinde erit $(n-1)x^{n-2}dx$. Hoc ego per ndx multiplicatum dabit differentiale secundum: $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo si differentiale ipsius x^{n-2} quod est $=(n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d.^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d.^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d.^5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

vnde simul forma sequentium differentialium facillime colligitur.

154. Quoties ergo n est numerus integer affirmatiuus, toties ad differentialia tandem peruenitur euanescentia; quae scilicet ita sunt $=0$, vt prae omnibus ipsius dx potestatibus euanescant. Horum autem notandi sunt casus simpliciores.

$$d.x = dx;\quad dd.x = 0;\quad d.^3x = 0;\quad \&c.$$

$$d.x^2 = 2xdx;\quad dd.x^2 = 2dx^2;\quad d.^3x^2 = 0;\quad d.^4x^2 = 0\ \&c.$$

$$d.x^3 = 3x^2dx;\quad dd.x^3 = 6xdx^2;\quad d.^3x^3 = 6dx^3;\quad d.^4x^3 = 0$$

$$d.x^4 = 4x^3dx;\quad dd.x^4 = 12x^2dx^2;\quad d.^3x^4 = 24xdx^3;\quad d.^4x^4 = 24dx^4$$

$$d.x^5 = 5x^4dx;\quad dd.x^5 = 20x^3dx^2;\quad d.^3x^5 = 60x^2dx^3;$$

$$d.^4x^5 = 120xdx^4;\quad d.^5x^5 = 120dx^5;\quad d.^6x^5 = 0.$$

 Pa-

Patet ergo ſi n fuerit numerus integer affirmatiuus, poteſtatis x^n differentiale ordinis n eſſe conſtans, nempe $= 1.2.3. \ldots n dx^n$, adeoque differentialia ſuperiorum ordinum omnium eſſe $= 0$.

155. Si n ſit numerus integer negatiuus, huiusmodi ipſius x poteſtatum negatiuarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, &c. differentialia ſumi poterunt, cum ſit $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur $n = -m$, erit ipſius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$; differentiale ſecundum $= \frac{m(m+1)dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2)dx^3}{x^{m+3}}$ &c. vnde ſequentes caſus ſimpliciores imprimis notari merentur.

$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2}$; $dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3}$; $d.^3\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4}$

$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3}$; $dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4}$; $d.^3\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5}$

$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4}$; $dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5}$; $d.^3\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6}$

$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5}$; $dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6}$; $d.^3\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7}$

$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6}$; $dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7}$; $d.^3\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8}$

&c.

156.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim $n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$ differentiale primum

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} \quad \text{secundum}$$

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}} \quad \&c.$$

Hinc erit:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}; \quad d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3\,dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2\,dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}; \quad d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5\,dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3\,dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}; \quad d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7\,dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquiretur huiusmodi differentialia, etiam sine praeuia reductione ad formam potestatis, inueniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius siue affirmatiuus siue negatiuus integer, differentialia aeque facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriuentur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

$d.x\sqrt{x} = \frac{3}{2}\, dx\sqrt{x}$; $d.x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}\, xdx\sqrt{x}$; $d.x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}\, x^2 dx\sqrt{x}$;

$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$; $d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}$; $d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}}$;

$d.\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; $d.x\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}\, dx\sqrt[3]{x}$; $d.x\sqrt[3]{x^2} = \frac{5}{3}\, dx\sqrt[3]{x^2}$;

$d.xx\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}\, xdx\sqrt[3]{x}$; $d.xx\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}\, xdx\sqrt[3]{x^2}$; &c.

$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}$; $d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; $d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}$;

$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$; $d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}$; &c.

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integrarum differentialia poterunt inueniri, propterea quod earum finguli termini funt poteftates ipfius x, quas differentiare nouimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p + q + r + s +$ &c. pofito $x + dx$ loco x abeat in $p + dp + q + dq + r + dr + s + ds +$ &c. erit eius differentiale $= dp + dq + dr + ds +$ &c. Quare fi fingularum quantitatum p, q, r, s, differentialia affignare queamus, fimul quoque aggregati earum differentiale innotefcet. Atque cum multipli ipfius p differentiale fit aeque multiplum ipfius dp, hoc eft $d.ap = adp$; erit quantitatis $ap + bq + cr$ differentiale $= adp + bdq + cdr$. Cum denique quantitatum conftantium differentialia fint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap + bq + cr + f$ differentiale $= adp + bdq + cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum finguli termini fint vel conftantes vel poteftates ipfius x, diffe-

differentiando secundum praecepta data facile absoluetur. Sic erit:

$d(a+x) = dx \quad ; \quad d(a+bx) = bdx \; ;$
$d(a+xx) = 2xdx \quad ; \quad d(aa-xx) = -2xdx \; ;$
$d(a+bx+cxx) = bdx+2cxdx \; ;$
$d(a+bx+cxx+ex^3) = bdx+2cxdx+3ex^2dx \; ;$
$d(a+bx+cxx+ex^3+fx^4) = bdx+2cxdx+3ex^2ax$
$+4fx^3dx.$

Atque si exponentes fuerint indefiniti erit:

$d(1-x^n) = -nx^{n-1}dx \quad ; \quad d(1+x^m) = mx^{m-1}dx \; ;$
$d(a+bx^m+cx^n) = mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx \, .$

160. Cum igitur functiones rationales integrae secundum maximam ipsius x dignitatem in gradus distinguantur, manifestum est, si huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri constantia, posteaque in nihilum abire, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx est constans, secundum cum sequentibus nullum. Sit functio secundi gradus

$a+bx+cxx=y$; erit $dy=bdx+2cxdx$;
$ddy = 2cdx^2 \quad ; \quad d^3y = 0.$

Simili modo si ponatur functio tertii gradus

$a+bx+cxx+ex^3=y$; erit $dy=bdx+2cxdx+3ex^2dx$;
$ddy=2cdx^2+6exdx^2$ & $d^3y=6edx^3$ atque $d^4y=0$.

Quare generaliter si huiusmodi functio sit gradus n, eius differentiale ordinis n erit constans, & sequentia omnia nulla.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, si inter potestates ipsius x, quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes sint numeri negatiui seu fracti. Ita

I. Si sit $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$

erit $dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{xx}$.

II. Si sit $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$

erit $dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx$,

& $ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$.

III. Si sit $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{xx}$

erit $dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2fdx}{x^3}$,

& $ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}$.

cuiusmodi exempla secundum praecepta data facillime absoluuntur.

162. Si quantitas differentianda proposita fuerit potestas eiusmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta sufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipsius x, cuius differentiale dp in potestate est, erit

ipsi-

ipsius potestatis p^n differentiale primum $= n p^{n-1} dp$. Hinc sequentia exempla soluuntur:

I. Si sit $y = (a+x)^n$; erit $dy = n(a+x)^{n-1} dx$

II. Si sit $y = (aa - xx)^2$; erit $dy = -4xdx(aa-xx)$

III. Si sit $y = \frac{1}{aa+xx}$ seu $y = (aa+xx)^{-1}$

erit $dy = \frac{-2xdx}{(aa+xx)^2}$.

IV. Si sit $y = \sqrt{(a+bx+cxx)}$ erit

$$dy = \frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{(a+bx+cxx)}}.$$

V. Si sit $y = \sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}$ seu $y = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3}x^3dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)}}$.

VI. Si sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ seu $y = (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = xdx(1-xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1-xx)\sqrt{(1-xx)}}$.

VII. Si sit $y = \sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)}$

erit $dy = \frac{dx\sqrt{b}:2\sqrt{x}+dx}{3\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}} = \frac{dx\sqrt{b}+2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}.\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}}$.

VIII. Si sit $y = \frac{1}{x+\sqrt{(aa-xx)}}$,

ob $d.\sqrt{(aa-xx)} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = \frac{-dx+xdx:\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2} = \frac{xdx-dx\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2\sqrt{(aa-xx)}}.$$

seu $dy = \frac{dx(x-\sqrt{(aa-xx)})^3}{(2xx-aa)^2\sqrt{(aa-xx)}}$.

IX.

IX. Si sit $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1-xx)^2} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$, erit $dy = \frac{-3\,dp + 3\,dq}{4\sqrt[4]{(1-p+q)}}$.

Iam per antecedentia est

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \quad \& \quad dq = \left(\frac{3\sqrt[3]{(1-xx)}}{-4x\,dx}\right)\frac{-4x\,dx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}},$$

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{3\,dx : 2x\sqrt{x} - 4x\,dx : \sqrt[3]{(1-xx)}}{4\sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusue functionibus ipsius x, quarum differentialia constant, eius differentiale sequente modo commodissime inuenietur. Sint p & q functiones ipsius x, quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x + dx$ loco x; p abit in $p + dp$ & q in $q + dq$; productum pq transmutabitur in

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq,$$

vnde producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$; vbi cum pdq & qdp sint infinite parua primi ordinis, at $dpdq$ secundi ordinis, vltimus terminus euanescet, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$. Differentiale ergo producti pq constat ex duobus membris, quae obtinentur, si

si vterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus constantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + rdq$, quibus valoribus loco z & dz substitutis erit

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp,$$

Simili modo si quantitas differentianda quatuor habeat factores erit:

$$d.pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp,$$

vnde quilibet differentiationem plurium factorum facile perspiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a + x)(b - x)$, erit

$$dy = -dx(a + x) + dx(b - x) = -adx + bdx - 2xdx$$

quod idem differentiale quoque inuenitur, si quantitas proposita euoluatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per superiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $\sqrt{(aa - xx)} = q$, quia est $dp = \frac{-dx}{xx}$

& $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, erit

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt $\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$. Hinc erit differentiale quaesitum, $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$.

III.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$; quia inuenimus $dp = 2xdx$ & $dq = \frac{-2x^3 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{2a^4 xdx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4 xdx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}.$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = q$, ob $dp = dx$ & $dq = \frac{-dx - xdx : \sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2} = \frac{-dx(x + \sqrt{(1 + xx)})}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2 \sqrt{(1 + xx)}}$ $= \frac{-dx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$, erit $pdq + qdp =$

$$= \frac{-xdx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}} + \frac{dx}{x + \sqrt{(1 + xx)}} =$$

$$= \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}.$$ Fiet ergo differentiale quaesitum $dy = \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $\sqrt{(1-}$

$\sqrt{(1+xx)}-x$, fiet $dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{(1+xx)})}{\sqrt{(1+xx)}}$
$= \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx$.

Idem differentiale alio modo commodius inueniri poteſt; cum enim ſit $y = \frac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$, multiplicetur numerator ac denominator per $\sqrt{(1+xx)}-x$, fietque

$$y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2+x^4)} - xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam eſt

$$dy = \frac{xdx+2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Si fuerit $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)}$$
$$- \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4+aaxx-4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendi poſſunt, tamen commodius vtemur regula fractionibus differentiandi inſeruiente. Sit ergo propoſita haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inueniri oporteat. Quoniam poſito $x+dx$ loco x fractio illa abit in

$p+$

$\frac{p+dp}{q+dq} = (p+dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq}$, vnde si fractio ipsa $\frac{p}{q}$ subtrahatur, remanet eius differentiale $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, ob euanescentem terminum $\frac{dpdq}{qq}$. Hinc ergo erit $d.\frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, vnde haec regula pro differentiatione cuiusque fractionis enascitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato subtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, residuum diuidatur per quadratum denominatoris, quotusque erit differentiale fractionis quaesitum.* Cuius regulae vsus per sequentia exempla illustrabitur.

I. Si fuerit $y = \frac{x}{aa+xx}$, erit per hanc regulam

$$dy = \frac{(aa+xx)dx - 2xxdx}{(aa+xx)^2} = \frac{(aa-xx)dx}{(aa+xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{V(aa+xx)}{aa-xx}$; reperitur

$$dy = \frac{(aa-xx)xdx : V(aa+xx) + 2xdx\,V(aa+xx)}{(aa-xx^2)},$$

& facta reductione $dy = \frac{(3aa+xx)xdx}{(aa-xx)^2 V(aa+xx)}$.

Saepenumero expedit ea regula vti, quae sequitur ex formula priori $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per deno-

nominatorem diuiſo, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at pér quadratum denominatoris diuiſo. Ita

III. Si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, erit

$$dy = \frac{-2xdx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aaxdx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

quae ad eundem determinatorem reuocata praebet.

$$dy = \frac{-2xdx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}.$$

165. Haec iam ſufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipſius x propoſitae differentiale inueſtigandum; ſi enim fuerit integra modus differentiandi iam ſupra eſt expoſitus. Sit igitur functio propoſita fracta, quae ſemper ad huiusmodi formam reducetur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, vt fiat

$y = \frac{p}{q}$; eritque $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. At cum ſit:

$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$

& $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.$

erit $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \&c.$

& $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \&c.$

S vnde

vnde per multiplicationem obtinebitur:

$$
\begin{aligned}
qdp = {} & \alpha B\,dx + 2\alpha C\,x\,dx + 3\alpha D\,x^2\,dx + 4\alpha E\,x^3\,dx + \&c.\\
& + \beta B\,x\,dx + 2\beta C\,x^2\,dx + 3\beta D\,x^3\,dx + \&c.\\
& + \gamma B\,x^2\,dx + 2\gamma C\,x^3\,dx + \&c.\\
& + \delta B\,x^3\,dx + \&c.\\
pdq = {} & \beta A\,dx + \beta B\,x\,dx + \beta C\,x^2\,dx + \beta D\,x^3\,dx + \&c.\\
& + 2\gamma A\,x\,dx + 2\gamma B\,x^2\,dx + 2\gamma C\,x^3\,dx + \&c.\\
& + 3\delta A\,x^2\,dx + 3\delta B\,x^3\,dx + \&c.\\
& + 4\varepsilon A\,x^3\,dx + \&c.
\end{aligned}
$$

Ex his itaque obtinebitur differentiale quaesitum:

$$
dy = \frac{\begin{array}{l}+\alpha B\\-\beta A\end{array} dx \begin{array}{l}+2\alpha C\\-2\gamma A\end{array} x\,dx \begin{array}{l}+3\alpha D\\+\beta C\\-\gamma B\\-3\delta A\end{array} x^2\,dx \begin{array}{l}+4\alpha E\\+2\beta D\\-2\delta B\\-4\varepsilon A\end{array} x^3\,dx \begin{array}{l}+5\alpha F\\+3\beta E\\+\gamma D\\-\delta C\\-3\varepsilon B\\-5\zeta A\end{array} x^4\,dx\ \&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.)^2}
$$

Quae expressio ad cuiusuis functionis rationalis differentiale expedite inueniendum maxime est accommodata. Quamadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propositae combinatur, ex inspectione mox intelligitur. Denominator vero differentialis est quadratum denominatoris functionis propositae.

166.

166. Si fractionis propositae vel numerator vel denominator vel vterque ex factoribus constet, multiplicatione actu instituta orietur quidem forma, qualem modo differentiauimus; attamen facilius pro his casibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur proposita huiusmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, vt fit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$, substitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$;

eius diff. $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Si fit $y = \frac{p}{qs}$, posito denominatore $qs = Q$, erit $dQ = qds + sdq$, & $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$. Quare

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$,

erit $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$, ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, vt habeatur $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem fit $dP = pdr + rdp$ & $dQ = qds + sdq$, prodibit sequens differentiatio:

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

erit $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$,

seu $dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}$.

Simili modo, si numerator ac denominator fractionis propositae plures habeant factores, differentialia eadem ratione inuestigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla huc pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem casus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi potest, quam per regulas generaliores hic expositas. Euenit hoc si factores, qui vel functionem ipsam, vel functionis numeratorem aut denominatorem constituunt, fuerint potestates.

Ponamus functionem differentiandam esse $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inueniendum sit $p^m = P$ & $q^n = Q$, vt fiat $y = PQ$ & $dy = PdQ + QdP$. Cum autem sit $dP = mp^{m-1}dp$ & $dQ = nq^{n-1}dq$, fiet his valoribus substitutis:

$dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$; vnde sequens oritur regula:

I. Si

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;
erit $dy = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp)$.

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale inuenietur, ac reperietur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;
erit $dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (mqrdp + nprdq + kpqdr)$.

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum proposita huiusmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inseruientem $dy = \frac{mp^{m-1} qdp - p^m dq}{qq}$, quod differentiale commodius sic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$,
erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$.

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem superiorem regulam $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1} dq}{q^{2n}}$, cuius expressionis si numerator ac denominator per q^{n-1} diuidatur, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$.

Quod si vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; inuenietur
$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1} dq}{q^{2n}}$, quae reducitur ad
$dy = \frac{mp^{m-1} q dp - np^m dq}{q^{n+1}}$. Quocirca

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$;

erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$.

Denique si proposita fuerit huiusmodi fractio $y = \frac{r}{p^m q^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1} q^n r dp - np^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}},$$

cuius expressionis cum numerator & denominator sit divisibilis per $p^{m-1} q^{n-1}$:

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^m q^n}$;

erit $dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}$.

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae speciales, quas verbis exprimere superfluum foret, facili negotio pro quouis casus erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas hactenus exposuimus tam late patent, vt nulla excogitari possit functio ipsius x algebraica, quae non earum ope differentiari que-

queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi fructiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absoluimus. Simul vero etiam compendia, si factores inuoluantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusuis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, siue ei per additionem, siue per subtractionem siue multiplicationem, siue diuisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos reuocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriumue variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad vnam maxime vniuersalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel diuisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro qualibet parte functio proposita seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis, reliquae vero partes omnes constantes.*

Quo

Quo facto ſingula iſta differentialia, quae ex ſingulis partibus modo deſcripto eliciuntur, in vnam ſummam colligantur, ſicque obtinebitur differentiale functionis propoſitae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, vti infra oſtendetur.

171. Ad regulam hanc illuſtrandam ponamus functionem y duabus conſtare partibus, ſiue per additionem ſiue ſubtractionem connexis, ita vt ſit $y = p \pm q$. Ponatur primo ſola pars p variabilis, altera q conſtans erit differentiale $= dp$, deinde ponatur altera pars $\pm q$ ſola variabilis, altera vero p conſtans, eritque differentiale $= \pm\, dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaeſitum ita componetur, vt ſit $dy = dp \pm dq$, omnino vti idem iam ſupra inuenimus. Hinc vero ſimul liquet, ſi functio pluribus conſtet partibus, ſiue inuicem additis ſiue ſubtractis, nempe $q = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inuentum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane vti & ſuperior regula docebat.

172. Si partes ſint in ſe inuicem multiplicatae, ita vt ſit $y = pq$; manifeſtum eſt poſita ſola parte p variabili, fore differentiale $= q\,dp$; at ſi altera pars q ſola variabilis ſtatuatur, erit differentiale $= p\,dq$. Addantur ergo haec duo differentialia inuicem, atque prodibit differentiale quaeſitum $dy = q\,dp + p\,dq$, quemadmodum ex iam allatis conſtat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, ſcilicet $y = pqrs$, ſi ſucceſſiue vna-

vnaquaeque ſola variabilis ſtatuatur, orientur iſta differentialia $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$, quorum ſumma dabit differentiale quaeſitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorſus vti iam ante inuenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, ſiue partes functionem conſtituentes ſint inuicem additae ſubtractaeve, ſiue in ſe inuicem multiplicatae.

173. Si partes functionem formantes per diuiſionem ſint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$, ponatur ſecundum regulam primum ſola pars p variabilis, eritque ob q conſtans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur ſola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$, erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propoſitae $dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq}$, ſicut iam ſupra inuenimus. Simili modo ſi functio propoſita ſit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo ſucceſſiue ſingulas partes ſolas p, q, r & s variabiles, prodibunt ſequentia differentialia: $\frac{qdp}{rs}$; $\frac{pdq}{rs}$; $\frac{-pqdr}{rrs}$; & $\frac{pqds}{rss}$, vnde fit

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}.$$

174. Dummodo ergo ſingulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae, vt earum differentialia exhiberi queant, ſimul quoque totius functionis differentiale inueniri poterit. Quodſi igitur partes fuerint functiones rationales, tum earum differentialia non ſolum ope praeceptorum ante iam datorum inueniuntur, ſed ea quoque ex hac ipſa regula generali erui poterunt: ſin autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad poteſtates, quarum exponentes ſunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem poteſtatum, qua eſt $d.x^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias inſuper expreſſiones ſurdas inuoluunt. Vnde patet ſi cum regula generali hic data, infra vero demonſtranda, coniungatur regula differentiandi poteſtates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi poſſe.

175. Ex his omnibus iam dilucide ſequitur, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, differentiale eius dy huiusmodi habiturum eſſe formam $dy = pdx$, in qua valor ipſius p per praecepta hic expoſita ſemper aſſignari queat. Erit autem p functio ipſius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, niſi conſuetae, quibus functiones algebraicae conſtitui ſolent. Hancobrem ſi y fuerit functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipſius x. Atque ſi z fuerit etiam functio algebraica ipſius x, ita vt

ſi dz

si $dz = q\,dx$, ob q functionem algebraicam ipsius x, erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipsius x, quippe quae est $= \frac{p}{q}$. Quare si huiusmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expressionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impedient, quominus ea expressio sit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia secunda & superiorem ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipsius x, fuerit $dy = p\,dx$, atque $dp = q\,dx$; erit sumto differentiali dx constante, $ddy = q\,dx^2$ vti supra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas sit quoque q functio algebraica ipsius x, erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non solum quantitas finita, sed etiam functio algebraica ipsius x, dummodo y fuerit eiusmodi functio. Simili modo perspicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones algebraicas ipsius x, modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x, omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusuis ordinis ipsarum y, z, & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dz\,ddy}$; $\frac{dx\,d^4y}{dy^3\,ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x.

177. Cum igitur nunc methodus sit tradita cuiusque functionis ipsius x algebraicae differentiale primum inueniendi, eadem methodo poterimus quoque differentialia secunda altiorumque ordinum inuestigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipsius x, ex eius differentiatione $dy = pdx$ innotescet valor ipsius p. Qui si denuo differentietur atque reperiatur $dp = qdx$, erit $ddy = qdx^2$, posito dx constante, sicque definietur differentiale secundum. Differentiando porro q, vt sit $dq = rdx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = rdx^3$; sicque vlterius differentialia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r, &c. omnes sunt functiones ipsius x algebraicae, ad quas differentiandas praecepta data sufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omissis enim dx, in differentiatione ipsius y, prodibit valor ipsius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatus ac diuisus per dx, quod fit dum vbique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipsius $q = \frac{ddy}{dx^2}$. Simili modo porro inuenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa + xx}$ cuius differentialia tam prima quam sequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando simulque per dx diuidendo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa+xx)^2}$, hincque porro

ddy

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa+xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile vlterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem supremarum ipsius x potestatum semper est productum numerorum naturalium ab 1 vsque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim si has formas vlterius continuemus atque perpendamus, deprehendemus fore generaliter, si $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\Big(x^n + \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ldots 6}x^{n-6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.\ 2\ldots\ldots 8}x^{n-8} + \&c.\Big)$$

Huiusmodi ergo exempla non solum inseruiunt, ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, sed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum obseruantur, per se sunt notatu dignissimae, atque ad alias inuentiones deducere possunt.

CAPUT

CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium seu non algebraicarum genera, quae calculus integralis suppeditabit, in Introductione ad analysin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis vsitatarum nobis peruenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus suggesserat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide exposuimus, vt fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite inuestigabimus, quo earum indoles ac proprietates clarius perspiciantur; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium est fons proprius, patefiat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicae, seu eiusmodi functiones ipsius x, quae praeter expressiones algebraicas quoque logarithmum ipsius x, seu cuiusuis ipsius functionis inuoluunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius facessant, omnis difficultas in inueniendo differentiali logarithmi cuiusque ipsius x functionis erit posita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diuersa, quae

quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumtus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob causam lp perpetuo hic designabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p.

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x, ponaturque $y = lx$, ita vt differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x, sicque transibit y in $y^{I} = y + dy$; quare habebitur $y + dy = l(x + dx)$ & $dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x})$. At iam supra logarithmum hyperbolicum huiusmodi expressionis $1 + z$ ita per seriem infinitam expressimus, vt esset $l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \&c.$

Posito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z, obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \&c.$$

Cum igitur huius seriei omnes termini prae primo euanescant, erit $d.\, lx = dy = \frac{dx}{x}$. Vnde alius cuiuscunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio est vt $n:1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181.

181. Si igitur cuiusque ipsius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale esse $= \frac{dp}{p}$, vnde ad logarithmorum differentialia inuenienda haec habetur regula. *Quantitatis* p, *cuius logarithmus proponitur, sumatur differentiale, hocque per ipsam quantitatem* p *diuisum dabit differentiale logarithmi quaesitum.* Sequitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^0 - 1^0}{0}$, ad quam superiori libro logarithmum ipsius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum sit $lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$; erit $d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p}$ ob $\omega = 0$. Notandum autem est $\frac{dp}{p}$ esse differentiale logarithmi hyperbolici ipsius p; ita vt, si logarithmus vulgaris ipsius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inueniri poterit, quemadmodum ex sequentibus exemplis perspicietur:

I. Si sit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si sit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$, vt sit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At est $dp = nx^{n-1}dx$, vnde fit $dy = \frac{ndx}{x}$.

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim sit $lx^n = nlx$, erit $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Si sit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2xdx}{1+xx}$.

IV. Si sit $y = l\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; quia erit $y = -l\sqrt{(1-xx)}$ $= -\frac{1}{2}l(1-xx)$, inuenitur $dy = \frac{xdx}{1-xx}$.

V. Si sit $y = l\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$; fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si sit $y = l(x+\sqrt{(1+xx)})$, fiet

$$dy = \frac{dx+xdx:\sqrt{(1+xx)}}{x+\sqrt{(1+xx)}} = \frac{xdx+dx\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}},$$

cuius fractionis cum numerator ac denominator per $x+\sqrt{(1+xx)}$ sit diuisibilis fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

VII. Si sit $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})$, ponatur $x\sqrt{-1} = z$. Atque ob $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(z+\sqrt{(1+zz)})$, erit per praecedens $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}dz:\sqrt{(1+zz)}$.

Quare, ob $dz = dx\sqrt{-1}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quamuis ergo logarithmus propositus imaginaria inuolvat, tamen eius differentiale sit reale.

183.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resoluetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit $y = lp + lq + lr + ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$. Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim $y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp + lq - lr - ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$. Neque etiam potestates difficultatem mouebunt, si enim fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$, erit $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum $dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2}l(1+x) - \frac{1}{2}l(1-x)$, hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si sit $y = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, ob $y = \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}+x) - \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$. Hoc idem facilius inuenitur, si in fractione

$\frac{V(1+xx)+x}{V(1+xx)-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per $V(1+xx)+x$, prodibit enim

$$y = \tfrac{1}{2}\, l(V(1+xx)+x)^2 = l(V(1+xx)+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{V(1+xx)}$.

IV. Si sit $y = l\frac{V(1+x)+V(1-x)}{V(1+x)-V(1-x)}$. Ponatur huius fractionis numerator $V(1+x)+V(1-x) = p$ & denominator $V(1+x)-V(1-x) = q$, erit $y = l\frac{p}{q} = lp - lq$, & $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$. Est vero $dp = \frac{dx}{2V(1+x)} - \frac{dx}{2V(1-x)} = \frac{-dx}{2V(1-xx)}(V(1+x)-V(1-x)) = \frac{-q\,dx}{2V(1-xx)}$; & $dq = \frac{dx}{2V(1+x)} + \frac{dx}{2V(1-x)} = \frac{p\,dx}{2V(1-xx)}$. Hinc fiet

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-q\,dx}{2pV(1-xx)} - \frac{p\,dx}{2qV(1-xx)} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pqV(1-xx)}.$$

At est $pp+qq = 4$ & $pq = 2x$, vnde erit $dy = -\frac{dx}{xV(1-xx)}$. Hoc autem differentiale facilius inuenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y = l\frac{1+V(1-xx)}{x} = l\left(\frac{1}{x} + V\left(\frac{1}{xx} - 1\right)\right).$$

Posito

Posito enim $\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = p$, erit

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\sqrt{(\frac{1}{xx} - 1)}} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= \frac{-dx(1 + \sqrt{(1 - xx)})}{xx\sqrt{(1 - xx)}},$$ ideoque, ob $p = \frac{1 + \sqrt{(1 - xx)}}{x}$,

erit $dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1 - xx)}}$ vt ante.

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx diuidantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inueniuntur, siquidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$$y = lx, \quad \text{erit}$$
$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \quad \& \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$
$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \quad \& \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4}$$

&c.

Atque si p fuerit quantitas algebraica, sitque $y = lp$, etiamsi y non sit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipsius x.

185. Exposita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis solis componuntur; vti ex sequentibus exemplis fiet perspicuum.

I. Si sit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x} lx$.

II. Simili modo si sit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x} (lx)^{n-1}$, vnde, si sit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque si p fuerit functio quaecunque ipsius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p} (lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia assignari possit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum.

IV. Si sit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quaecunque ipsius x, per regulam factorum supra datam erit $dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp$.

V. Si sit $y = x\,lx$; erit per eandem regulam $dy = dx\,lx + \frac{xdx}{x} = dx\,lx + dx$.

VI.

VI. Si sit $y = x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione secundum partes instituta, reperietur $d.x^m lx = mx^{m-1} dx lx + x^{m-1} dx$, & $d.\frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, vnde erit $dy = mx^{m-1} dx lx$.

VII. Si sit $y = x^m (lx)^n$, fiet $dy = mx^{m-1} dx (lx)^n + nx^{m-1} dx (lx)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, vti si fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$; vnde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Atque si fuerit $y = lllx$, si statuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{plp}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus substitutis habebitur $dy = \frac{dx}{xlx.llx}$.

186. Exposita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, seu eiusmodi potestates, quarum exponentes sint variabiles. Huiusmodi autem ipsius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inueniri possunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipsius a^x, ad quod inuestigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis sumendis $ly = xla$. Sumantur iam differentialia, atque obtinebitur $\frac{dy}{y} = dxla$; vnde fit $dy = ydxla$, cum autem sit $y = a^x$, erit $dy = a^x dxla$, quod est differentiale ipsius a^x. Simili mo-

modo, si sit p functio quaecunque ipsius x, huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dp\, la$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione exposita deduci potest. Sit enim proposita a^p, denotante p functionem quamcunque ipsius x, quae, posito $x + dx$ loco x, abeat in $p + dp$. Vnde si ponatur $y = a^p$, si x abeat in $x + dx$, erit $y + dy = a^{p+dp}$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Ostendimus autem supra, quamuis quantitatem exponentialem a^z per huiusmodi seriem exprimi $1 + z\,la + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} +$ &c. vnde erit $a^{dp} = 1 + dp\,la + \frac{dp^2(la)^2}{2} +$ &c., & $a^{dp} - 1 = dp\,la$, quia sequentes termini prae $dp\,la$ omnes euanescunt. Consequenter erit $dy = d.\,a^p = a^p\, dp\, la$. *Quare quantitatis exponentialis* a^p *differentiale erit productum ex ipsa quantitate exponentiali, exponentis differentiali* dp, *&* *logarithmo quantitatis constantis* a, *quae ad exponentem variabilem est euecta.*

188. Si igitur e sit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, vt sit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque si dx sumatur constans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod est differentiale secundum ipsius e^x. Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare si sit

$y =$

$$y = e^{nx}, \quad \text{erit} \quad \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$$

$$\text{porroque} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = n^3 e^{nx}; \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = n^4 e^{nx}; \quad \&c.$$

Vnde patet ipſius e^{nx} differentialia primum, ſecundum & reliqua ſequentia conſtituere progreſſionem geometricam: eritque ergo differentiale ordinis m ipſius $e^{nx} = y$, nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y\,dx^m}$ quantitas conſtans n^m.

189. Si ipſa quantitas, quae eleuatur, fuerit variabilis, eius differentiale ſimili modo inueſtigabitur. Sint p & q functiones quaecunque ipſius x, ac proponatur quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit $ly = qlp$, quibus differentiatis erit $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{q\,dp}{p}$, vnde fit $dy = ydqlp + \frac{yq\,dp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$, ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale conſtat duobus membris, quorum prius $p^q dqlp$ oritur, ſi quantitas propoſita p^q ita differentietur, quaſi p eſſet quantitas conſtans, ſolusque exponens q variabilis: alterum vero membrum $qp^{q-1}dp$ oritur, ſi in quantitate propoſita p^q exponens q tanquam conſtans ſpectetur, ſolaque quantitas p, quaſi eſſet variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per regulam generalem differentiandi ſupra traditam inueniri potuiſſet.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, vtique $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resoluatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)\, p^{q+dq-1} dp$$
$$+ \frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1 \cdot 2} p^{q+dq-2} dp^2 + \&c.$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)\, p^{q+dq-1} dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates inuoluunt, prae $(q+dq)p^{q+dq-1}dp$ euanescunt. At est $p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q(1 + dq\, lp + \frac{dq^2 (lp)^2}{2} + \&c. - 1)$ $= p^q dq\, lp$. In altero vero termino $(q+dq)p^{q+dq-1}dp$, si loco $q+dq$ scribamus q, orietur $qp^{q-1}dp$, ideoque differentiale erit vt ante $dy = p^q dq\, lp + qp^{q-1}dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium inuestigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, sit $p^q = e^{qlp}$, vtriusque enim logarithmus est idem qlp; erit $y = e^{qlp}$. Quare, cum nunc quantitas eleuata e sit constans, erit $dy = e^{qlp}\left(dq\, lp + \frac{q\,dp}{p}\right)$, vti ante ostendimus in regula §. 187 data. Restituatur igitur p^q loco e^{qlp}, fietque

$$dy = p^q dq\, lp + p^q q\, dp : p = p^q dq\, lp + qp^{q-1}dp.$$

Si

Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dx lx + x^x dx$; atque hinc quoque eius vlteriora differentialia definientur: reperietur enim:

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1+lx)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1+lx)^3 + \frac{3(1+lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$

&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatione formulae $e^x p$ originem habent; est autem

$$d.\, e^x p = e^x dp + e^x p dx = e^x (dp + p dx).$$

I. Si sit $y = e^x x^n$; erit $dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx$
seu $dy = e^x dx (n x^{n-1} + x^n)$

II. Si sit $y = e^x (x - 1)$
Erit $dy = e^x x dx$.

III. Si sit $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$
Erit $dy = e^x xx dx$.

IV. Si sit $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$
Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta in-

ſtituetur. Sic ſi haec quantitas e^{e^x} differentiari debeat, ſtatuatur $e^x = p$, vt ſit $y = e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at eſt $dp = e^x dx$, vnde ſi fuerit

$$y = e^{e^x}; \text{ erit } dy = e^{e^x} e^x dx,$$

$$\text{atque ſi ſit } y = e^{e^{e^x}}; \text{ erit } dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Quod ſi vero fuerit $y = p^{q^r}$, ſtatuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dz lp + z p^{z-1} dp$, at $dz = q^r dr lq + r q^{r-1} dq$, vnde $dy = p^z q^r dr lp . lq + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$. Quare ſi ſit:

$$y = p^{q^r}, \text{ erit } dy = p^{q^r} q^r \left(dr lp . lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inueniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem conſideratio arcuum circularium nos ſupra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium conſtanter ponimus vnitati aequalem, propoſitus arcus, cuius ſinus ſit $= x$, quem arcum hoc modo exprimamus A ſin x; huiusque arcus differentiale inueſtigemus, ſeu incrementum quod accipit, ſi ſinus x differentiali ſuo dx au-

augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praestari poterit, quia in introductione ostendimus hanc expressionem A sin x reduci posse ad hanc logarithmicam: $\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$. Posito ergo $y = \text{A sin} x$, erit quoque $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}},$$

vnde fit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

195. Istud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius sine logarithmorum subsidio inueniri potest. Si enim sit $y = \text{A sin} x$, erit x sinus arcus y, seu $x = \sin y$. Cum igitur, posito $x + dx$ loco x, abeat y in $y + dy$, fiet $x + dx = \sin(y + dy)$. At quia est

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$, erit

$\sin(y+dy) = \sin y.\cos dy + \cos y.\sin dy$:

arcus autem euanescentis dy sinus ipsi illi arcui dy, eiusque cosinus sinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$\sin(y+dy) = \sin y + dy \cos y$, ideoque $x + dx = \sin y + dy \cos y$. Quia vero est

$\sin y = x$, erit cosinus ipsius y seu $\cos y = \sqrt{(1-xx)}$, quibus valoribus substitutis, erit $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$,

ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Arcus ergo, cuius finus proponitur, differentiale aequatur differentiali finus per cofinum diuifo.

196. Cum igitur, fi p fuerit functio quaecunque ipfius x, atque y denotet arcum, cuius finus eft $= p$, feu $y = A \sin p$, fit huius arcus differentiale $dy = \frac{dp}{V(1-pp)}$, vbi $V(1-pp)$ exprimit cofinum eiusdem arcus, inueniri quoque poterit differentiale arcus, cuius cofinus proponitur. Sit enim $y = A \cos x$, erit eiusdem arcus finus $= V(1-xx)$, ideoque $y = A \sin V(1-xx)$. Facto ergo $p = V(1-xx)$, erit $dp = \frac{-x\,dx}{V(1-xx)}$, & $V(1-pp) = x$; vnde fiet $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$. *Arcus ergo, cuius cofinus proponitur, differentiale aequatur differentiali cofinus negatiue fumto, atque per finum eiusdem arcus diuifo.* Quod etiam hoc modo oftendi poteft: fi fit $y = A \cos x$, ponatur $z = A \sin x$, erit $dz = \frac{dx}{V(1-xx)}$; at arcus $y + z$ fimul fumti dant arcum conftantem $90°$, eritque $y + z =$ conftans ideoque $dy + dz = 0$, feu $dy = -dz$; vnde fit $dy = \frac{-dx}{V(1-xx)}$, vt ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita vt fit $y = A \operatorname{tang} x$. Arcus autem cuius tangens eft x, finus erit $= \frac{x}{V(1+xx)}$, & cofinus $= \frac{1}{V(1+xx)}$. Pofito ergo $\frac{x}{V(1+xx)} = p$, vt fit $V(1-pp) = \frac{1}{V(1+xx)}$, fiet

fiet $y = A \sin p$: vnde per regulam modo datam erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At, ob $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, erit $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; quibus valoribus ſubſtitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. *Arcus ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur differentiali tangentis per quadratum ſecantis diuiſo.* Eſt enim $\sqrt{(1+xx)}$ ſecans, ſi x ſit tangens.

198. Simili modo ſi proponatur arcus, cuius cotangens datur, ita vt ſit $y = A \cot x$; quia eiusdem arcus tangens eſt $= \frac{1}{x}$, poſito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = A \operatorname{tang} p$, ac propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc ſit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta ſubſtitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod eſt differentiale cotangentis negatiue ſumtum, atque per quadratum coſecantis diuiſum. Porro ſi proponatur $y = A \sec. x$, quia eſt $y = A \cos \frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$.

Atque, ſi ſit $y = A \operatorname{cosec}. x$, erit $y = A \sin \frac{1}{x}$, ideoque $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Saepe etiam ſinus verſus occurrit, ita ſi proponatur $y = A \operatorname{sv}. x$, quia eſt $y = A \cos(1-x)$, huiusque arcus ſinus eſt $= \sqrt{(2x-xx)}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

199.

199. Quanquam ergo arcus, cuius ſinus, vel coſinus, vel tangens, vel cotangens, vel ſecans, vel coſecans, vel denique ſinus verſus datur, eſt quantitas transcendens, tamen eius differentiale, ſi per dx diuidatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia ſecunda, tertia, quarta &c. ſi per poteſtates ipſius dx conuenientes diuidantur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus ſequentia exempla.

I. Si ſit $y = A \text{ ſin } 2x\sqrt{(1-xx)}$, ponatur $p = 2x\sqrt{(1-xx)}$, vt ſit $y = A \text{ ſin } p$, eritque $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$. At eſt $dp = 2dx\sqrt{(1-xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{(1-xx)}}$, & $\sqrt{(1-pp)} = 1-2xx$, quibus valoribus ſubſtitutis, erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\sqrt{(1-xx)}$ ſit ſinus arcus dupli, dum x eſt ſinus ſimpli, erit ergo $y = 2 A \text{ ſin } x$, ideoque $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

II. Si ſit $y = A \text{ ſin } \frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ & $\sqrt{(1-pp)} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum ſit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$, erit $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III.

III. Si sit $y = \text{A} \sin \sqrt{\frac{1-x}{2}}$, ponatur $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$, erit $\sqrt{(1-pp)} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, & $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)}}$, vnde fit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$.

IV. Si sit $y = \text{A tang} \frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$, erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197), erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si sit $y = \text{A tang} \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, posito $p = \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, & $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$. Atqui $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod etiam inde intelligitur, quod sit $\text{A tang} \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = \frac{1}{2} \text{A tang}\, x$.

VI. Si sit $y = e^{\mathrm{A}\,\mathrm{sin}\,x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{\mathrm{A}\,\mathrm{sin}\,x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hoc ergo modo omnes functiones ipsius x, in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx diuisa sunt quantitates algebraicae, eorum differentialia secunda & sequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione exposuimus, inuenientur. Sit $y = \mathrm{A}\,\mathrm{sin}\,x$, quia est $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, cuius differentiale dabit valorem pro $\frac{ddy}{dx^2}$, si quidem dx sumatur constans: vnde differentialia ipsius y cuiusuis ordinis ita se habebunt.

Si sit $y = \mathrm{A}\,\mathrm{sin}\,x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}; \quad \text{\& sumto } dx \text{ constante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

d^5y

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

vnde concludimus vt ſupra §. 177 fore generaliter:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3\ .\ .\ .\ .\ .\ n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}x^{n-4}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}x^{n-6} + \&c.\right)$$

201. Superſunt quantitates, quae ex harum inuerſione naſcuntur, ſcilicet ſinus, tangentesue arcuum datorum, quas quomodo differentiare oporteat, oſtendamus. Sit igitur x arcus circuli, & $\sin x$ denotet eius ſinum, cuius differentiale inueſtigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac poſito $x + dx$ loco x, quia y abit in $y + dy$, erit

$$y + dy = \sin(x + dx), \ \& \ dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Eſt autem $\sin(x + dx) = \sin x.\cos dx + \cos x.\sin dx$, atque cum ſit, vti in introductione oſtendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

 erit

erit reiectis terminis euanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, vnde fit $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusuis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d.\sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x, cuius differentiale inuestigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x+dx$ loco x, fiet $y+dy = \cos(x+dx)$. Est vero $\cos(x+dx) = \cos x . \cos dx - \sin x . \sin dx$, & quia vt modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y+dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = -dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negatiue sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x, erit $d.\cos p = -dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = \sqrt{(1-yy)}$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, vt ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $\sqrt{(1-yy)} = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{-dy}{\sin p}$, vnde fit vt ante $dy = -dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \operatorname{tang} x$, erit $dy = \operatorname{tang}(x+dx) - \operatorname{tang} x$; at est $\operatorname{tang}(x+dx) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang}. dx}{1 - \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} dx}$, a qua

a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit $dy = \frac{\operatorname{tang} dx (1 + \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} x)}{1 - \operatorname{tang} x . \operatorname{tang} dx}$. Verum arcus euanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque $\operatorname{tang} dx = dx$, & denominator $1 - dx \operatorname{tang} x$, abit in vnitatem: quocirca fiet $dy = dx(1 + \operatorname{tang} x^2)$. Est vero $1 + \operatorname{tang} x^2 = \operatorname{sec.} x^2 = \frac{1}{\operatorname{cos} x^2}$, denotante $\operatorname{cos} x^2$ quadratum cosinus ipsius x: consequenter si fuerit $y = \operatorname{tang} x$, erit $dy = dx \operatorname{sec} x^2 = \frac{dx}{\operatorname{cos} x^2}$. Quod differentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inueniri potest; cum enim sit $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, erit

$$dy = \frac{dx \cos x . \cos x + dx \sin x . \sin x}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2},$$

ob $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale inuenitur. Cum sit $y = \operatorname{tang} x$, erit $x = A \operatorname{tang} y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1 + yy}$. At cum sit $y = \operatorname{tang} x$, erit $\sqrt{(1 + yy)} = \operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$, ideoque $dx = dy \cos x^2$, & $dy = \frac{dx}{\cos x^2}$, vt ante. *Tangentis ergo cuiusuis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diuiso per quadratum cosinus eiusdem arcus.* Simili modo si proponatur

 $y =$

$y = \cot x$, fiet $x = \mathrm{A}\cot y$, & $dx = \frac{-dy}{1+yy}$. At vero erit $\sqrt{(1+yy)} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, vnde habebitur $dx = -dy \sin x^2$, & $dy = \frac{-dx}{\sin x^2}$. *Cotangentis ergo cuiusuis arcus differentiale aequatur differentiali arcus negatiue sumto ac per quadratum sinus eiusdem arcus diuiso.* Vel quia est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx \sin x^2 - dx \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2},$$

vti modo inuenimus.

205. Si proponatur secans arcus, vt sit $y = \sec. x$, quia erit $y = \frac{1}{\cos x}$, erit $dy = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \tan x. \sec. x$. Simili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec}. x$, ob $y = \frac{1}{\sin x}$, erit $dy = \frac{-dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec}. x$, pro quibus casibus peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur $y = \mathrm{sv}. x$, quia est $y = 1 - \cos x$, erit $dy = dx \sin x$. Omnes ergo casus, quibus linea quaepiam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per sinum cosinumue exprimi potest, sine difficultate differentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia prima, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas inuenientur. Ponamus esse $y = \sin x$ & $z = \cos x$, atque dx esse constans: erit vt sequitur:

$y =$

$y = \sin x$	$z = \cos x$
$dy = dx \cos x$	$dz = - dx \sin x$
$ddy = - dx^2 \sin x$	$ddz = - dx^2 \cos x$
$d^3y = - dx^3 \cos x$	$d^3z = dx^3 \sin x$
$d^4y = dx^4 \sin x$	$d^4z = dx^4 \cos x$
&c.	&c.

206. Simili modo inueniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x. Sit enim $y = \text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, & ponatur dx constans, erit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin x}{\cos x^5} - \frac{8 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos x^6} - \frac{120}{\cos x^4} + \frac{16}{\cos x^2}$$

d^6y

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \sin x}{\cos x^7} - \frac{480 \sin x}{\cos x^5} + \frac{32 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\cos x^8} - \frac{6720}{\cos x^6} + \frac{2016}{\cos x^4} - \frac{64}{\cos x^2}.$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas finus vel cofinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, vti ex fequentibus exemplis videre licet.

I. Si fit $y = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$
Erit $dy = 2 dx \cos x^2 - 2 dx \sin x^2 = 2 dx \cos 2x$.

II. Si fit $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, vel $y = \sin \frac{1}{2} x$
Erit $dy = \frac{dx \sin x.}{2\sqrt{2(1-\cos x)}}$. Cum autem fit $\sqrt{2(1-\cos x)} = 2 \sin \frac{1}{2} x$, & $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x$; fiet $dy = \frac{1}{2} dx . \cos \frac{1}{2} x$, vti ex forma $y = \sin \frac{1}{2} x$ immediate fequitur.

III. Si fit $y = \cos l \frac{1}{x}$; erit, pofito $l \frac{1}{x} = p$, $y = \cos p$, & $dy = - dp \sin p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x} \sin l \frac{1}{x}$.

IV. Si fit $y = e^{\sin x}$; erit $dy = e^{\sin x} dx \cos x$.

V. Si

V. Si sit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}} n\,dx \sin x}{\cos x^2}$.

VI. Si sit $y = l\left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)$; ponatur $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1 - \sqrt{(1-p)})$, erit

$dy = \frac{dp}{2(1-\sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}$. At est $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n\,dx \cos x}{\sin x^2}$.

Quo valore substituto prodibit

$$dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\sin x}} dx \cos x}{2 \sin x^2 \left(1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)\sqrt{(1 - e^{\frac{-n}{\sin x}})}}.$$

CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESUE VARIABILES INUOLUENTIUM.

208.

Si duae pluresue quantitates variabiles x, y, z, a se inuicem prorsus non pendeant, fieri potest, vt etiamsi omnes sint variabiles, tamen dum vna crescit decrescitue, reliquae maneant inuariatae: quia enim nullum nexum inter se habere ponuntur, immutatio vnius reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendebunt a differentiali ipsius x; ideoque dum x differentiali suo dx augetur, quantitates y & z, vel eaedem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari possunt. Quodsi igitur differentiale quantitatis x statuatur dx, reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio nostro vel prorsus nihil, vel infinite parua ad dx quamuis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipsius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non spectatur, significare solent, hocque casu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Siue autem y & z pendeant ab x siue secus, ratio differentiationis; quam hic spectamus, eodem redit. Quaerimus enim

enim functionis, quae ex pluribus variabilibus x, y, & z vtcunque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variabiles x, y, & z suis differentialibus dx, dy, & dz crescunt. Ad hoc ergo inueniendum in functione proposita vbique loco variabilium quantitatum x, y, z scribatur respectiue $x + dx$; $y + dy$; $z + dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur, quemadmodum ex natura differentialium luculenter constat.

210. Sit X functio ipsius x, eiusque differentiale, seu augmentum, dum x differentiali suo dx crescit, sit $= Pdx$. Deinde sit Y functio ipsius y, eiusque differentiale $= Qdy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y + dy$; atque Z sit functio ipsius z, eiusque differentiale sit $= Rdz$, quae differentialia Pdx, Qdy, Rdz ex natura functionum X, Y & Z ope praeceptorum supra datorum inueniri poterunt. Quod si ergo proposita fuerit haec quantitas $X + Y + Z$, quae vtique erit functio trium variabilium x, y, & z, eius differentiale erit $= Pdx + Qdy + Rdz$. Vtrum autem haec tria differentialia sint inter se homogenea nec ne? perinde est. Termini enim qui continent potestates ipsius dx prae Pdx aeque euanescunt, ac si reliqua membra Qdy & Rdz abessent, similique est ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z sunt neglecti.

211. Retineant X, Y & Z easdem significationes, sitque proposita ista functio XYZ ipsarum x, y & z, cuius

ius differentiale inuestigari oporteat. Quoniam, si $x+dx$ loco x, $y+dy$ loco y, & $z+dz$ loco z scribatur, abit X in $X+Pdx$; Y in $Y+Qdy$; & Z in $Z+Rdz$, ipsa functio proposita XYZ abibit in

$$(X+Pdx)(Y+Qdy)(Z+Rdz)$$
$$=XYZ+YZPdx+XZQdy+XYRdz$$
$$+ZPQdxdy+YPRdxdz+XQRdydz+PQRdxdydz.$$

At quia dx, dy, & dz sunt infinite parua, siue inter se sint homogenea siue non; vltimus terminus prae uno quoque praecedentium euanescit. Deinde terminus $ZPQdxdy$ tam prae $YZPdx$ quam prae $XZQdy$ euanescit; atque ob eandem rationem termini $YPRdxdz$ & $XQZdydz$ euanescent. Ablata ergo ipsa functione proposita XYZ, erit eius differentiale $=YZPdx+XZQdy+XYRdz$.

212. Exempla haec functionum trium variabilium x, y, & z, quibus pro lubitu quisque plura adiicere potest, sufficiunt ad ostendendum, si functio quaecunque trium variabilium x, y, & z proponatur, vtcunque etiam hae variabiles inter se fuerunt permixtae, eius differentiale semper huiusmodi formam esse habiturum $pdx+qdy+rdz$: vbi p, q, & r futurae sint singulae functiones, vel omnium trium variabilium x, y, & z, vel binarum, vel vnius tantum, prout ratio compositionis, qua functio proposita ex variabilibus x, y, & z atque constantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, si proponatur functio quatuor pluriumue variabilium

lium x, y, z, & v, eius differentiale ſemper huius modi formam habebit $pdx + qdy + rdz + sdv$.

213. Conſideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y, quae ſit $= V$, cuius ergo differentiale ita ſe habebit, vt ſit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y aſſumeretur conſtans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale eſſet pdx: ſin autem x ſtatueretur conſtans, vt eſſet $dx = 0$, ſolaque y maneret variabilis, tum ipſius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur vtraque quantitate x & y variabili poſita ſit $dV = pdx + qdy$, iſta regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y inuoluente reſultabit: *Ponatur primum ſola* x *variabilis, altera vero* y *tanquam conſtans tractetur, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= pdx$. *Deinde ponatur ſola quantitas* y *variabilis, altera* x *pro conſtanti habita, & quaeratur ipſius* V *differentiale, quod ſit* $= qdy$. *Quibus factis, poſita vtraque quantitate* x *&* y *variabili, fiet* $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y, & z, quae ſit $= V$, differentiale huiusmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifeſtum eſt, ſi ſola quantitas x fuiſſet variabilis poſita, reliquae vero y & z conſtantes manſiſſent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiiſſet ipſius V differentiale $= pdx$. Pari modo inueniretur differentiale ipſius $V = qdy$, ſi x & z eſſent conſtantes ſolaque y poneretur variabilis; atque ſi x & y tanquam conſtantes tractarentur ſolaque z ſtatueretur variabilis, pro-

diret differentiale ipsius $V = r\,dz$. Quare ad functionem trium pluriumue variabilium differentiandam, consideretur seorsim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quasi reliquae omnes essent constantes; tum singula haec differentialia, quae ex singulis quantitatibus variabilibus sunt inuenta, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaesitum functionis propositae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium inuenimus, continetur demonstratio regulae supra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque vnicam variabilem complectens differentiari potest. Si enim pro singulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diuersae collocentur, functio speciem induet functionis totidem diuersarum variabilium, atque adeo modo hic praescripto differentiabitur, successiue vnamquamque partem, quasi sola esset variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex singulis partibus oriuntur, in vnam summam coniiciendo: quae summa erit differentiale quaesitum, postquam pro singulis litteris valores fuerint restituti. Haec ergo regula latissime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Vnde eius vsus per vniuersum calculum differentialem est amplissimus.

216. Inuenta ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiari possunt, eius vsum in nonnullis exemplis ostendisse iuuabit.

I. Si

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = x\,dy + y\,dx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; erit

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yx\,dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Si fuerit $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$;

erit

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n(\alpha\,dx + \beta\,dy)$$
$$+ n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta\,dx + \varepsilon\,dy),$$

siue

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \quad \text{in}$$

$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix}\, x\,dx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix}\, x\,dy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix}\, y\,dx\right.$$
$$\left.\begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix}\, y\,dy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix}\, dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix}\, dy\right).$$

V. Si fuerit $V = y\,lx$; erit $dV = dy\,lx + \frac{y\,dx}{x}$.

VI. Si fuerit $V = x^y$; erit $dV = yx^{y-1}dx + x^y dy\,lx$.

VII. Si fuerit $V = \text{A tang}\,\frac{y}{x}$; erit $dV = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy}$.

VIII. Si fuerit $V = \sin x . \cos y$; erit

$$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x . \sin y.$$

IX. Si fuerit $V = \frac{e^z y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; erit

$$dV = \frac{e^z y dz}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)}}.$$

X. Si fuerit $V = e^z A \sin \frac{x - \sqrt{(xx-yy)}}{x + \sqrt{(xx-yy)}}$,

reperietur $dV = e^z dz A \sin \frac{x - \sqrt{(xx-yy)}}{x + \sqrt{(xx-yy)}}$

$$+ e^z \frac{xydy - yydx}{(x + \sqrt{(xx-yy)})(xx-yy)^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}}.$$

217. Quoniam vidimus, si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x & y, eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV = Pdx + Qdy$, in qua sint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: sequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo etiam a se inuicem pendere, propterea quod vtraque ab eadem functione V pendet. Quicunque igitur sit iste nexus inter quantitates finitas P & Q, quem deinceps inuestigabimus, perspicuum est, non omnes formulas differentiales huiusmodi $Pdx + Qdy$, in quibus P & Q pro lubitu sint ex x & y formatae, posse esse differentialia cuiuspiam functionis finitae V ipsarum x & y. Nisi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiusmodi differentiale $Pdx + Qdy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque vicissim integrale non habebit.

218.

218. In integratione igitur plurimum intereſt noſſe hanc relationem inter quantitates P & Q, vt differentialia, quae reuera ex differentiatione functionis cuiuspiam finitae ſunt orta, dignoſci queant ab iis, quae ad libitum ſunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quanquam autem hic nondum integrationis negotium ſuſcipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitius inſpiciendam conueniet hanc relationem inueſtigari; quippe cuius cognitio non ſolum ad calculum integralem, ad quem hic viam paramus, eſt maxime neceſſaria, ſed etiam in ipſo calculo differentiali inſignem lucem accendit. Primum igitur patet, ſi V ſit functio duarum variabilium x & y, in eius differentiali $Pdx + Qdy$ vtriusque differentiale dx & dy ineſſe oportere. Neque ergo poteſt eſſe $P = 0$ neque $Q = 0$. Hinc ſi P fuerit functio ipſarum x & y, formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit eſt differentiale, ſeu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale ſit Pdx.

219. Sic nulla datur quantitas finita V ſiue algebraica ſiue transcendens, cuius differentiale ſit $yxdx$, ſi quidem ſit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiusmodi quantitatem finitam V, quia y in eius differentiale ingreditur, neceſſe eſt, vt y quoque in ipſa quantitate V inſit; verum ſi V contineret y, ob variabilitatem ipſius y neceſſario quoque in differentiali ipſius V differentiale dy ineſſe deberet. Quod tamen cum non adſit, fieri nequit, vt differentiale $yxdx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione ſit ortum. Cum

igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit o, & P contineat y, differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ inuestigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y: a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione. V quantitas x prorsus euanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t. Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdx$, vbique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$, quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est vt sit $P + Qt = o$; ideoque $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, seu erit $Px + Qy = o$, vnde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t, hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y. Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y.

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y, quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale $dV =$

$dV = P\,dx + Q\,dy$, semper ita erit comparatum, vt sit $Px + Qy = 0$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y, resultabit quantitas $= 0$: vti in his exemplis vsu venire patet:

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy, erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit $dV = -\frac{yy\,dx + yx\,dy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, vnde fit $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y; erit $dV = \frac{2xx\,dy - 2xy\,dx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$, quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = l\frac{x + y}{x - y}$; erit $dV = \frac{2x\,dy - 2y\,dx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A \sin \frac{\sqrt{(x - y)}}{\sqrt{(x + y)}}$, erit $dV = \frac{y\,dx - x\,dy}{(x + y)\sqrt{2y(x - y)}}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y. Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n, existente T functione ipsius t, sitque

$$dT = \Theta dt, \quad \text{erit} \quad dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1}dx.$$

Quodsi ergo statuamus:

$$dV = Pdx + Qdy, \quad \text{ob} \quad dy = tdx + xdt,$$

fiet $$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt:$$

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \quad \text{ob} \quad V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, vt si altera sit cognita, altera facile inueniatur. Quia porro est $Qx = x^n\Theta$, erit Qx, ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y.

223. Si ergo in differentiali cuiusuis functionis homogeneae ipsarum x & y, loco dx & dy, ponatur x & y, quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si sit $V = \surd(xx+yy)$; erit $n = 1$, & ob

$$dV = \frac{xdx + ydy}{\surd(xx+yy)}, \text{ fiet } \frac{xx+yy}{\surd(xx+yy)} = V = \surd(xx+yy).$$

II. Si

II. Si sit $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3 dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3 dx + y^3 dx - x^3 dy}{(y-x)^2}.$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3 x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V.$$

III. Si sit $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$, erit $n = -4$, atque $dV = -\frac{4ydy - 4xdx}{(yy+xx)^3}$. Quae formula positis x & y loco dx & dy abit in $-\frac{4yy - 4xx}{(yy+xx)^3} = -4V$.

IV. Si sit $V = xx\,l\frac{y+x}{y-x}$; erit $n = 2$, atque $dV = 2xdx\,l\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}$, facta autem memorata substitutione oritur $2xx\,l\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

224. Similis proprietas obseruabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium: sit ergo V functio quantitatum x, y, z, quae coniunctim vbique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $Pdx + Qdy + Rdz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, vt sit $dy = tdx + xdt$, & $dz = sdx + xds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n, existente U

functione binarum variabilium t & s; hinc ergo si statuatur $dU = p\,dt + q\,ds$, fiet

$$dV = x^n p\,dt + x^n q\,ds + nUx^{n-1}dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = P\,dx + Qt\,dx + Qx\,dt + Rs\,dx + Rx\,ds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

vnde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quotcunque plures variabiles extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quotcunque variabilium x, y, z, v, &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, vt si loco differentialium dx, dy, dz, dv, &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v, &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea vnicae tantum variabilis x: Hoc enim casu erit V potestas ipsius x, puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia datur functio ipsius x, in qua x vbique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n. Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx, atque prodibit nax^n, hoc est nV. Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur, cum in calculo integrali maximam afferat vtilitatem.

226.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q, quae differentiale $Pdx + Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituunt, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y; atque ponamus V abire in R, si loco x ponatur $x + dx$; posito autem $y + dy$ loco y abeat V in S: quodsi autem simul $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^{I}. Cum itaque R oriatur ex V, posito $x + dx$ loco x, manifestum est si vlterius in R ponatur $y + dy$ loco y, tum prodire V^{I}; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y. Simili modo si in S ponatur $x + dx$ loco x, quia S iam orta est ex V posito $y + dy$ loco y, denuo prodibit V^{I}; vti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^{I}	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^{I}	y	$y + dy$
S	V^{I}	x	$x + dx$

227.

227. Si igitur V ita differentietur, vt tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia posito $x+dx$ loco x, functio V abit in R, eius differentiale erit $=R-V$; at ex forma $dV=Pdx+Qdy$, sequitur idem differentiale fore $=Pdx$, vnde erit $R-V=Pdx$. Quod si iam loco y ponatur $y+dy$, x vero tanquam constans tractetur, quia R abit in V^{I} & V in S, quantitas $R-V$ abibit in $V^{I}-S$; ideoque ipsius $R-V=Pdx$ differentiale, quod oritur si sola y variabilis assumatur, erit $V^{I}-R-S+V$. Simili modo, cum posito $y+dy$ loco y, abeat V in S, erit $S-V$ differentiale ipsius V posita sola y variabili, eritque propterea $S-V=Qdy$; nunc quia loco x posito $x+dx$, transit S in V^{I} & V in R, quantitas $S-V$ abibit in $V^{I}-R$; atque ipsius $S-V=Qdy$ differentiale, quod oritur si sola x variabilis statuatur, erit $=V^{I}-R-S+V$, quod prorsus congruit cum differentiali ante inuento.

228. Ex hac conuenientia deducitur sequens conclusio: Si functionis V cuiuscunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV=Pdx+Qdy$, tum differentiale ipsius Pdx, quod oritur si sola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam constans tractetur, aequale erit differentiali ipsius Qdy, quod oritur si sola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur. Si scilicet posita sola y variabili fuerit $dP=Zdy$ erit differentiale ipsius Pdx praescripto modo sumtum $=Zdxdy$; atque posita sola x variabili erit quoque $dQ=Zdx$; sic enim differentiale ipsius Qdy praescripto modo

modo sumtum fiet quoque $= Z\,dx\,dy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc consistit, vt differentiale ipsius $P\,dx$ posito x constante aequale sit differentiali ipsius $Q\,dy$ posito y constante.

229. Ista insignis proprietas clarius perspicietur, si eam nonnullis exemplis illustremus.

I. Sit igitur $V = yx$; erit $dV = y\,dx + x\,dy$, ideoque $P = y$ & $Q = x$; vnde posito x constante erit $d.P\,dx = dx\,dy$, & posito y constante erit $d.Q\,dy = dx\,dy$, sicque haec duo differentialia inter se aequantur.

II. Sit $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; erit $dV = \frac{x\,dx + y\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, ideoque $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, & $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, vnde posito x constante erit $d.P\,dx = \frac{xy\,dx\,dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Q\,dy = \frac{xy\,dx\,dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin A\,y + y \sin A\,x$; eritque $dV = dx \sin A\,y + x\,dy \cos y + dy \sin A\,x + y\,dx \cos x$: Quare erit

$$P\,dx = dx \sin A\,y + y\,dx \cos x,$$

$$\&\quad Q\,dy = dy \sin A\,x + x\,dy \cos y.$$

Posito ergo x constante erit
$$d.Pdx = dxdy \cos y + dxdy \cos x,$$
& posito y constante erit
$$d.Qdy = dxdy \cos y + dxdy \cos x.$$

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dylx + yx^{y-1}dx$, atque
$$Pdx = yx^{y-1}dx, \quad \& \quad Qdy = x^y dylx.$$
Quamobrem posito x constante habebitur
$$d.Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdylx,$$
& posito y constante erit
$$d.Qdy = yx^{y-1}dxdylx + x^{y-1}dxdy.$$

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, vnde eximia omnium functionum, quae duas variabiles inuoluunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inuerso functio V primum posita sola y variabili differentiaretur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentiaretur: vtroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Zdxdy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy, horum differentia-

tialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstrauimus. Caeterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§.227) allato.

231. Relatio inter P & Q, si $Pdx + Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y, differentientur ambae posita vtraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$
fit $dP = pdx + rdy$
& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit
$dP = rdy$, & $d.Pdx = rdxdy$.
Deinde posito y constante erit
$dQ = qdx$, & $d.Qdy = qdxdy$.

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita inuicem connectuntur, vt si ambae differentientur, vti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Breuitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, vt r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, quae scriptura designatur P ita differentiari, vt sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy diuidatur: sic enim prodibit quantitas finita r. Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ quantitatem

 fini-

finitam q, quia hac ratione indicatur functionem Q fola x pofita variabili differentiari, tumque differentiale per dx diuidi debere.

232. Vtamur ergo hoc fcribendi modo, etiamfi alias ambiguitatem afferre poffit, quae tamen hic per claufulas euitatur, vt ambages in defcribendis differentiandi conditionibus euitemus, ficque breuiter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, vt dicamus effe $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi fcilicet fractionibus denominator praeter propriam fignificationem, qua numerator per eum diuidi debet, indicat numeratoris differentiale ita effe capiendum, vt ea fola quantitas cuius differentiale denominatorem conftituit, tanquam variabilis fpectetur. Hoc enim modo per diuifionem differentialia prorfus ex calculo egredientur, iftaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praefenti cafu erunt inter fe aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, vt fit $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, fi quidem vt monitum eft, differentiatio numeratoris per denominatorem reftringatur.

233. Confentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis ineffe oftendimus. Sit enim V functio homogenea n dimenfio-

sionum ipsarum x & y, ponaturque $dV = Pdx + Qdy$, atque demonstrauimus fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}.$$ Sit $dP = pdx + rdy$;

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, cui aequale esse $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita ostendetur. Differentietur Q posita sola x variabili, & quia in hac hypothesi est $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$,

fiet $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$, debebitque esse

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r \quad \text{seu} \quad (n-1)P = px + ry.$$

Quae aequalitas inde fit perspicua, quod P sit functio homogenea $n-1$ dimensionum ipsarum x & y, vnde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet esse comparatum, vt sit $(n-1)P = px + ry$.

234. Ista proprietas, quod sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem esse ostendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumue variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod si igitur in hac differentiatione z tanquam constans tractaretur, foret vtique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem casu per an-

antecedentia debet esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde si quantitas y constans assumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique posito x constante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P, Q, & R ita a se inuicem pendent, vt sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \ \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Sequitur hinc ista functionum, quae tres pluresue variabiles inuoluunt, proprietas analoga ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, eaque continuo ter differentietur, ita vt primum vna quantitatum, puta x, sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y, atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Zdxdydz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x, y, & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Zdxdydz$ peruenietur, quoniam ordo quantitatum x, y, & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum

rum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, vtcunque ordo quantitatum x, y, & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P, Q, & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata, ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdy + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx; quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdxdy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dxdydz$ fuerit diuisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variabiles hoc ordine y, x, z, atque prima differentiatio dabit Qdy, secunda $sdxdy$, & tertia (facta diuisione per $dxdydz$) dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ vt ante. Disponantur variabiles hoc ordine z, y, x, ac prima differentiatio dabit Rdz secunda $udydz$, tertia vera post diuisionem per $dxdydz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$. At cum posito y constante sit $dQ = sdx + udz$; erit $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, vti pariter est demonstratum.

237.

237. Ponamus esse $V = \frac{xxy}{aa - zz}$; hancque functionum toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari potest:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
posito variabili	solo x	solo y	solo z
	$\frac{2xydx}{aa-zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa-zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo x	solo z	solo y
	$\frac{2xydx}{aa-zz}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo x	solo z
	$\frac{xxdy}{aa-zz}$;	$\frac{2xdxdy}{aa-zz}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo y	solo z	solo x
	$\frac{xxdy}{aa-zz}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo x	solo y
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
posito variabili	solo z	solo y	solo x
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$;	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variabiles fuerint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$.

238.

238. Vti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est peruentum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus, quae secunda differentiatio suppeditauit. In iis scilicet expressio quaeuis bis occurrit; vnde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales; atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dxdydz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quotcunque variabilium x, y, z, v, u, &c. eaque successiue aliquoties differentietur, vt semper vnica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perueniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Zdxdy$, dum in altera sola x, in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est vtra prius, posteriusue sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Zdxdydz$; atque viginti quatuor variis modis peruenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Zdxdydzdv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita leui attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, vt non solum has proprietates ipsi diligen-

ter meditentur, earumque veritatem ſcrutentur, ſed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto ſibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos poſtmodum facilius percipere queant. Neque vero ſolum tyrones, ſed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam ſunt imbuti, ad hoc ſunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyſeos partem hoc argumentum penitus praetermitti ſolet. Plerumque enim Auctores ſolas differentiationis regulas praeſcripſiſſe, earumque vſum in Geometria ſublimiori oſtendiſſe fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquiſiuerunt; vnde tamen maxima ſubſidia in calculum integralem redundant. Quam ob cauſam hoc argumentum fere nouum in iſto Capite fuſius perſequi viſum eſt, quo ſimul via ad integrationes alias difficiliores pararetur, atque negotium poſtea ſuſcipiendum ſubleuaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresue variabiles inuoluentium gaudent, facile poterimus dignoſcere, vtrum formula differentialis propoſita, in qua occurrunt duae pluresue variabiles, ſit orta ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae an ſecus? Si enim in formula $Pdx + Qdy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam exiſtere functionem ipſarum x & y, cuius differentiale ſit $= Pdx + Qdy$: neque ergo infra in calculo integrali huiusmodi formulae integrale indagari poteſt. Sic cum

cum in $yxdx + xxdy$ requisita conditio non adsit, nulla datur functio, cuius differentiale est $= yxdx + xxdy$. Vtrum autem semper, quoties est $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, formula ex differentiatione cuiuspiam functionis sit orta? quaestio est, quae demum ex integrationis principiis solide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali proposita tres pluresue insint variabiles, vti $Pdx + Qdy + Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxisse omnino nequit, nisi tres istae conditiones in ea locum habeant, vt sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right);\ \&\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Quarum conditionum, si vna tantum desit, certo affirmare debemus, nullam extare functionum ipsarum x, y, & z, cuius differentiale sit $Pdx + Qdy + Rdz$; huius modi ergo formularum differentialium nequidem requiri possunt integralia, hincque integrationem prorsus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignosci oportere, vtrum integrationis sint capaces, quam inuestigatio integralis actu suscipiatur.

CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM VLTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si vnica variabilis adſit, eiusque differentiale primum conſtans aſſumatur, ſupra iam methodus eſt tradita differentialia cuiusque gradus inueniendi. Scilicet ſi functionis cuiusuis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale ſecundum, hocque iterum differentiatum dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, ſiue functio plures inuoluat variabiles ſiue vnicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur conſtans. Sit igitur V functio quaecunque ipſius x, neque vero dx ſit conſtans, ſed vtcunque variabile, ita vt ipſius dx differentiale ſit $= ddx$, huiusque differentiale $= d^3x$, & ita porro, atque inueſtigemus differentialia ſecundum & ſequentia functionis V.

243. Ponamus differentiale primum functionis V eſſe $= Pdx$, vbi erit P functio quaepiam ipſius x pendens ab V. Si iam functionis V differentiale ſecundum inuenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum ſit productum ex duabus quantitatibus variabilibus P & dx, quarum illius differentiale ſit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale

ddx,

ddx, per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo vlteriora differentialia inuenientur.

224. Applicemus haec ad potestates ipsius x, quarum singula differentialia inuestigemus, si dx non ponatur constans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;

$$d^3V = d^3x; \quad d^4V = d^4x;$$

&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &

$$ddV = 2xddx + 2dx^2$$

$$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$$

$$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$$

$$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$$

&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit

$$dV = nx^{n-1}dx$$

$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$

$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$

$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x$$
$$+ 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2$$
$$+ 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$
&c.

Si igitur fuerit dx constans, ac propterea

$$ddx = 0, \quad d^3x = 0, \quad d^4x = 0, \quad \&c.$$

orientur eadem differentialia, quae iam supra pro hac hypothesi sunt inuenta.

245. Quoniam igitur differentialia cuiusque ordinis ipsius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expressiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, secundum praecepta supra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illustrabimus.

I. Si fuerit $V = \frac{xddx}{dx^2}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{xd^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2xddx^2}{dx^3}.$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$; erit $dV = 1 - \frac{xddx}{dx^2}$, vbi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam posuimus.

III. Si fuerit $V = xxl\frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

V in

$$V \text{ in } xx\,l\,ddx - 2xx\,l\,dx;$$

erit ſecundum regulas conſuetas differentiando:

$$dV = 2x\,dx\,l\,ddx + \frac{xx\,d^3x}{ddx} - 4x\,dx\,l\,dx - \frac{2xx\,ddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipſius V reperientur.

246. Si expreſſio propoſita duas variabiles inuoluat, nempe x & y, vel vnius differentiale ponitur conſtans vel neutrius; arbitrarium enim eſt alterutrius differentiale conſtans aſſumi, quia ab arbitrio noſtro pendet, quemadmodum vnius valores ſucceſſiuos creſcere ſtatuere velimus. Neque vero vtriusque variabilis differentialia ſimul ſtatui poſſunt conſtantia, hoc ipſo enim relatio inter variabiles x & y aſſumeretur, quae tamen vel nulla eſt, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter creſcere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere ſtatueretur, tum eo ipſo indicaretur fore $y = ax + b$; ſicque y ab x penderet, quod tamen aſſumere non licet. Hancobrem vel vnius tantum variabilis differentiale conſtans aſſumi poteſt vel nullum. Quodſi autem differentiationes abſoluere nouerimus nullo differentiali aſſumto conſtante, ſimul quoque differentialia conſtabunt, ſi alterutrum differentiale ponatur conſtans: tantum enim opus eſt, vt ſi dx conſtans ſtatuatur, vbique termini continentes ddx, d^3x, d^4x, &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipſarum x & y, ſitque $dV = P\,dx + Q\,dy$. Ad diffe-

differentiale ipſius V ſecundum inueniendum aſſumamus vtrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q ſint functiones ipſarum x & y ſtatuamus:

$$dP = p\,dx + r\,dy$$
$$dQ = r\,dx + q\,dy$$

ſupra enim vidimus eſſe $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$.
His poſitis differentietur $dV = P\,dx + Q\,dy$, & reperietur:

$$ddV = P\,ddx + p\,dx^2 + 2r\,dx\,dy + Q\,ddy + q\,dy^2.$$

Si igitur differentiale dx ſtatuatur conſtans, erit

$$ddV = p\,dx^2 + 2r\,dx\,dy + Q\,ddy + q\,dy^2,$$

ſin autem differentiale dy ſtatueretur conſtans, foret

$$ddV = P\,ddx + p\,dx^2 + 2r\,dx\,dy + q\,dy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipſarum x & y bis differentietur, nullo differentiali poſito conſtante, eius differentiale ſecundum ſemper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = P\,ddx + Q\,ddy + R\,dx^2 + S\,dy^2 + T\,dx\,dy$$

pendebunt autem quantitates P, Q, R, S, & T ita a ſe inuicem, vt ſit ſignandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ R = \left(\frac{dP}{dx}\right);\ S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$
$$\&\ \ T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum ſi vel vnica deſit, certo affirmare poteri-

terimus, formulam propositam nullius functionis esse differentiale secundum. Statim ergo dignosci poterit, vtrum huiusmodi formula sit cuiuspiam quantitatis differentiale secundum an minus?

242. Simili modo differentialia tertia ac sequentia inuenientur, quod in exemplo particulari ostendisse expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

$$
\begin{aligned}
\text{Erit } dV &= y\,dx + x\,dy \\
ddV &= yddx + 2dxdy \quad + xddy \\
d^3V &= yd^3x + 3dyddx + xd^3y \\
d^4V &= yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y
\end{aligned}
$$

&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem potestatum binomij sequuntur, indeque quousque libuerit continuari possunt.

At si fuerit $V = \frac{y}{x}$;

$$
\begin{aligned}
\text{Erit } dV &= \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx} \\
ddV &= \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2} \\
d^3V &= \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2} \\
&\quad + \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}
\end{aligned}
$$

&c.

in quo exemplo progressio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adstringitur, sed etiam eodem negotio cuiusuis expressionis, quae iam differentialia in se continet, differentiale inueniri potest, siue vnum quoddam differentiale assumitur constans siue minus. Cum enim singula differentialia aeque & eadem lege differentientur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque obseruari debent. Denotet igitur V eam expressionem, quam differentiari oportet, siue sit finita, siue infinite magna siue infinite parua; atque ratio differentiationis ex his exemplis perspicietur:

I. Sit $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

Erit $dV = \dfrac{dx\,ddx + dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

II. Sit $V = \dfrac{y\,dx}{dy}$;

Erit $dV = dx + \dfrac{y\,ddx}{dy} - \dfrac{y\,dx\,ddy}{dy^2}$.

III. Sit $V = \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy - dy\,ddx}$;

Erit $dV = \dfrac{(3dx\,ddx + 3dy\,ddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx\,ddy - dy\,ddx}$

$- \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dx\,d^3y - dy\,d^3x)}{(dx\,ddy - dy\,ddx)^2}$.

quae

quae differentialia cum sint generalissime sumta, nullo differentiali pro constante habito, hinc facile ea differentialia deriuari poterunt, quae oriuntur, si vel dx vel dy statuatur constans.

251. Quia nullo differentiali constante assumto, nulla etiam lex, secundum quam successiui variabilium valores progrediantur, praescribitur, differentialia secunda & sequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi significabunt. Hinc formula, in qua differentialia secunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, nisi quodpiam differentiale constans sit assumtum; sed eius significatio erit vaga, atque variabitur, prouti aliud atque aliud differentiale fuerit constans positum. Interim tamen dantur quoque eiusmodi expressiones differentialia secunda continentes, quae, etiamsi nullum differentiale positum sit constans, tamen significatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale constans statuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius scrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoscendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas vnicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit eius variabilis x differentiale secundum ddx, nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valo-

 rem

rem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2xdx$ seu xdx constans ponatur, cum ipsius xdx differentiale $xddx + dx^2$ sit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1}dx$ seu $x^{n-1}dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diuersissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel 0 vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xxddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parua homogenea. finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in 0, si sit $d.x^2$ constans, ea abit in $-x$; si sit $d.x^3$ constans, ea abit in $-2x$; si $d.x^4$ sit constans, ea abit in $-3x$, & ita porro. Neque ergo determinatum valorem habere potest, nisi definiatur, cuiusmodi differentiale constans sit assumtum.

253. Ista inconstantia significationis simili ratione ostenditur, si differentiale tertium in quapiam formula insit. Consideremus hanc formulam $\frac{x^3d^3x}{dxddx}$, quae pariter

riter finitum valorem prae se fert. Si differentiale dx sit constans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit $d.x^2$ constans, erit $ddx = -\frac{dx^2}{x}$; & denuo differentiando $d^3x = -\frac{2dx\,ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}$, ob $ddx = -\frac{dx^2}{x}$: hoc ergo casu formula proposita $\frac{x^3d^3x}{dx\,ddx}$ abit in $-3x^2$. At si fuerit $d.x^n$ constans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$, hincque

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dx\,ddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2dx^3}{xx}$$
$$+ \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}.$$

Hoc ergo casu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \quad \& \quad \frac{x^3d^3x}{dx\,ddx} = -(2n-1)x^2,$$

vnde patet si sit $n=1$, seu dx constans, valorem formulae fore $=-x^2$. Ex quo manifestum est, si in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque simul indicetur, cuiusmodi differentiale assumtum sit constans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil prorsus significare; quamobrem tales expressiones in calculo occurrere non possunt.

254. Simili modo si formula contineat duas pluresue variabiles, in eaque occurrant differentialia secundi altiorisue gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non posse, nisi differentiale quodpiam constans statuatur, iis tantum exceptis casibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula inest, quoniam pro variis differentialibus, quae constantia ponuntur, valor ipsius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, vt formula statum obtineat valorem; hocque idem valet de quouis differentiali altiori ipsius x, atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium secundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumue variabilium differentialia secunda insint, fieri potest, vt inconstantia ab vno oriunda per inconstantiam reliquarum destruatur; hincque nascitur ille casus, cuius meminimus, quo formula huiusmodi differentialia secunda duarum pluriumue variabilium inuoluens valorem definitum habere potest, non obstante quod nullum differentiale constans sit positum.

255. Haec igitur formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, statam atque fixam significationem habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans statuatur. Nam si dx constans ponatur habebitur $\frac{xddy}{dxdy}$; sin autem dy constans ponatur, habebitur $\frac{yddx}{dxdy}$; manifestum autem est has formulas non necessario inter se esse aequales. Si enim ne-

necessario essent aequales, tales manere deberent, quaecunque functio ipsius x loco y substitueretur. Ponamus tantum esse $y = xx$, & cum posito dx constante, sit $ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dxdy}$ abibit in 1, sin autem dy seu $2xdx$ ponatur constans, fiet

$ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$,

vnde formula $\frac{yddx}{dxdy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in vnico casu reperiatur discrepantia, multo minus in genere erit $\frac{xddy}{dxdy}$ posito dx constante aequalis $\frac{yddx}{dxdy}$ posito dy constante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ sibi non constat, dummodo vel dx vel dy constans ponatur, multo minus sibi constabit, si functionis cuiusuis vel ipsius x vel ipsius y vel vtriusque differentiale constans ponatur.

256. Hinc apparet huiusmodi formulam statum valorem habere non posse, nisi ita sit comparata, vt postquam loco variabilium y, & z, quae praeter x insunt, functiones quaecunque ipsius x fuerint substitutae, differentialia secunda & altiora ipsius x, nempe ddx, d^3x, &c. penitus ex calculo excedant. Si enim post talem substitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx, vel d^3x, vel d^4x, &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque constantia assumuntur, significationem suam variant, valor quoque ipsius formulae erit vagus. Sic comparata est for-

formula ante propoſita $\frac{y\,ddx + x\,ddy}{dx\,dy}$, quae ſi ſtatum haberet valorem, quicquid y ſignificet, ſtatum quoque habere deberet valorem, ſi y denotaret functionem quampiam ipſius x. At ſi tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2x\,ddx}{dx^2}$, quae vtique ob ddx in ea contentum eſt vaga, atque alios aliosque valores induit, prouti alia atque alia differentialia conſtantia ponuntur, vti ex §. 252 ſatis eſt manifeſtum.

257. Dubium autem hic ſubnaſcetur, vtrum dentur tales formulae duo pluraue differentialia ſecundi altiorisue gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, vt ſi loco reliquarum variabilium quaecunque functiones vnius ſubſtituantur, differentialia ſecundi gradus prorſus ſe deſtruant. Huic dubio primum ita occurramus, vt huiusmodi formulam proponamus, quae iſta proprietate ſit praedita, quo per explorationem vis quaeſtionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$ memoratam proprietatem poſſidere: quaecunque enim functio ipſius x loco y ſubſtituatur, ſemper differentialia ſecundi gradus penitus euaneſcent; quam proprietatem ſequentibus exemplis comprobemus.

I. Sit $y = x^2$; erit $dy = 2x\,dx$,
& $ddy = 2x\,ddx + 2dx^2$,

qui

qui valores in formula $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$ ſubſtituti dabunt,

$$\frac{2x\,dx\,ddx - 2x\,dx\,ddx - 2\,dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = n x^{n-1} dx$, &

$$ddy = n x^{n-1} ddx + n(n-1) x^{n-2} dx^2,$$

qui valores ſubſtituti formulam $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{n x^{n-1}\,dx\,ddx - n x^{n-1}\,dx\,ddx - n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -\sqrt{(1-xx)}$; erit $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, &

$$ddy = \frac{x\,ddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

atque formula $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx^3}$, abit in

$$\frac{x\,ddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{x\,ddx}{dx^2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia ſecunda *ddx* ſe mutuo tollunt, hocque ita eueniet, quaecunque aliae functiones loco *y* ſubſtituantur.

258. Cum iſta exempla iam probauerint veritatem noſtrae propoſitionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ fixum habeat valorem, etiamſi nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, demonſtrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipſius x, eiusque differentiale dy huiusmodi erit, vt ſit $dy = pdx$, atque p erit functio quaepiam ipſius x, eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = qdx$, eritque q iterum functio ipſius x. Cum igitur ſit $dy = pdx$, erit differentiando $ddy = pddx + qdx^2$, & $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = - qdx^3$; in qua expreſſione cum nullum inſit differentiale ſecundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ erit $= -q$. Quomodocunque igitur y pendeat ab x, differentialia ſecunda in hac formula ſemper ſe mutuo tollent, hancque ob cauſam eius valor, qui alioquin eſſet vagus, fiet ſtatus ac fixus.

259. Quanquam hic poſuimus y eſſe functionem ipſius x, tamen veritas aeque ſubſiſtit, ſi y ab x prorſus non pendeat, vti aſſumſimus. Dum enim pro y functionem quamcunque ſubſtituimus, neque qualis ſit determinauimus, nullam pendentiam ab x ipſi y tribuimus. Interim tamen ſine functionis mentione demonſtratio formari poteſt; quaecunque enim y ſit quantitas ſiue pendens ab x ſiue non pendens, eius differentiale dy homoge-

geneum erit cum dx, ſicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum, neque a differentialium ſecundorum lege pendebit. Sit igitur $\frac{dy}{dx}=p$; erit $dy=pdx$, & $ddy=pddx+dpdx$, vnde fit

$$dxddy-dyddx=dpdx^2,$$

cuius valor non eſt vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, ſiue quodpiam differentiale conſtans accipiatur, qualecunque id demum ſit, ſiue nullum differentiale poſitum ſit conſtans.

260. Quia igitur $dyddx-dxddy$ non obſtantibus differentialibus ſecundis, quae potentia ſe mutuo deſtruere cenſeri poſſunt, ſignificationem habet fixam; expreſſio quaecunque, in qua nulla alia differentialia ſecunda praeter formulam $dyddx-dxddy$ inſunt, pariter ſignificationem habebit fixam. Seu ſi ponatur $dyddx-dxddy=\omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y, earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω vtcunque compoſita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrariae, qua valores ſucceſſiui ipſius x creſcere ponuntur, in ω differentialia ſecunda ſe mutuo tollunt, etiam ipſa quantitas V non erit vaga ſed fixa. Sic iſta expreſſio $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}$ valorem obtinet fixum,

 quam-

quamuis ea differentialibus ſecundis inquinata videatur, atque inſuper, quia numerator eſt homogeneus denominatori, valorem obtinet finitum, niſi is caſu vel infinite magnus vel infinite paruus euadat.

261. Quemadmodum formula $dxddy - dyddx$ valorem fixum habere oſtenſa eſt, ita quoque ſi tertia variabilis z accedat, hae formulae $dxddz - dzddx$ & $dyddz - dzddy$ valores fixos habebunt. Hinc expreſſiones, quas tres variabiles x, y, & z inuoluunt, ſi in eis nulla alia differentialia ſecunda occurrant, praeter haec aſſignata, tum perinde erunt fixae, ac ſi nulla plane differentialia ſecunda ineſſent. Ita haec expreſſio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)\,ddy - (dy + dz)\,ddx + (dx - dy)\,ddz}$$

non obſtantibus differentialibus ſecundis, fixa gaudet ſignificatione. Similique modo formulae exhiberi poſſunt, plures variabiles continentes, in quibus differentialia ſecunda non impediunt, quominus earum ſignificatio ſit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia ſecunda complectuntur, reliquae omnes ſignificationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere poſſunt, niſi quodpiam differentiale primum definiatur, quod conſtans ſit aſſumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum conſtans aſſumitur, omnes expreſſiones quotcunque variabiles conti-

tineant, & cuiuscunque ordinis differentialia post primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt significationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx assumtum sit constans, ipsius x differentialia secunda & sequentia euanescunt; & quaecunque functiones ipsius x loco reliquarum variabilium y, z, &c. substituantur, earum differentialia secunda per dx^2, tertia per dx^3, &c. determinabuntur, sicque inconstantia a differentialibus secundis oriunda tollitur. Idem euenit, si alius variabilis seu functionis cuiuscunque differentiale primum constans ponatur.

263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda & altiorum ordinum reuera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta. Quando enim differentialia secunda adesse videntur, vel differentiale quodpiam primum constans assumitur, vel nullum. Priori casu differentialia secunda prorsus ex calculo euanescunt, dum per differentialia prima determinantur. Posteriori casu autem nisi se mutuo destruant, significatio erit vaga, & propterea in Analysi locum nullum inueniunt; sin autem se mutuo destruunt, tantum apparenter adsunt, & reuera solae quantitates finitae cum suis differentialibus primis adesse censendae sunt. Quoniam tamen saepissime apparenter tantum in calculo vsurpantur, necesse fuit, vt methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox ostendemus, cuius ope differentialia secunda & altiora semper exterminari queant.

264. Si expressio vnicam contineat variabilem x, eiusque differentialia altiora ddx, d^3x, d^4x, &c. in ea occurrant, ea significatum fixum habere nequit, nisi quodpiam differentiale primum constans sit positum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt sit constans positum, ita vt sit $ddt = 0$, $d^3t = 0$, $d^4t = 0$, &c. Ponatur $dx = pdt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga significatione differentialium secundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp = qdt$, similique modo vlterius $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c. erunt q, r, s, &c. quantitates finitae fixos significatus habentes. Cum igitur sit $dx = pdt$; erit

$$ddx = dpdt = qdt^2 \;;\; d^3x = dqdt^2 = rdt^3 \;;$$
$$d^4x = drdt^3 = sdt^4 \;;\; \&c.$$

qui valores si loco ddx, d^3x, d^4x, &c. substituantur, tota expressio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam significationem habebit.

265. Si x sit functio ipsius t, poterit hoc modo quantitas x prorsus eliminari, ita vt sola quantitas t cum suo differentiali dt in expressione remaneat: sin autem t sit functio ipsius x, vicissim quoque x erit ipsius t functio. Interim tamen ipsa quantitas x cum suo differentiali primo dx, in calculo retineri potest, dummodo post substitutiones ante factas vbique loco t & dt earum valores per x & dx expressi restituantur. Quod quo pla-

planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita vt differentiale primum ipsius x^n constans sit positum. Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx \text{ ; erit } p = \frac{1}{nx^{n-1}} \text{ ; \&}$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = q\,dt = nqx^{n-1}dx \text{ ;}$$

vnde fit $q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}}$; &

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = r\,dt = nrx^{n-1}dx.$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \text{ ; \& } s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = -\frac{(n-1)\,dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)\,dx^3}{xx}$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\,dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variabiles x & y, earumque vnius x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentialia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy, d^3y, &c. Haec autem eodem modo, quo ante vsi sumus, tolli poterunt ponendo

$dy =$

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.
fiet enim

$ddy = qdx^2$; $d^3y = rdx^3$; $d^4y = sdx^4$ &c.

quibus substitutis expressio orietur, quae praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. nonnisi differentiale primum dx continebit. Sic si proposita fuerit haec expressio

$$\frac{y\,dx^4 + x\,dy\,d^3y + x\,d^4y}{(xx + yy)\,ddy},$$

in qua dx est constans assumtum; ponatur

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; & $dr = sdx$;

quibus valoribus substitutis expressio proposita transmutabitur in hanc: $\frac{(y + xpr + xs)\,dx^2}{(xx + yy)\,q}$, quae nulla amplius differentialia secunda altioraue continet.

267. Simili modo differentialia secunda & altiora tollentur, si dy fuerit constans assumtum. Verum si aliud differentiale primum quodcunque dt statuatur constans, tum primum modo ante indicato differentialia ipsius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$dx = pdt$; $dp = qdt$; $dq = rdt$; $dr = sdt$; &c.
vnde fit

$ddx = qdt^2$; $d^3x = rdt^3$; $d^4x = sdt^4$; &c.

Deinde simili modo differentialia altiora ipsius y ponendo

$dy =$

$dy = Pdt$; $dP = Qdt$; $dQ = Rdt$; $dR = Sdt$; &c.
vnde fiet

$ddy = Qdt^2$; $d^3y = Rdt^3$; $d^4y = Sdt^4$; &c.

quibus substitutis obtinebitur expressio, quae praeter quantitates finitas, x, p, q, r, s, &c. y, P, Q, R, S, &c. solum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit significationem.

268. Si differentiale primum, quod constans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab vtroque simul pendet, tum non opus est, vt duplex quantitatum finitarum p, q, r, &c. series introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae p, q, r, &c. fient functiones ipsius x, solaeque litterae P, Q, R, &c. ingrediuntur; idemque euenit, si differentiale constans dt ab y tantum pendeat. At si dt ab vtraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale ydx constans esse assumtum, eritque $yddx + dxdy = 0$; vnde fit $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Sit nunc $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dy = rdx$ &c. eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$; vlteriusque differentiando

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

substituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{pdx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy};$$ porroque

 d^4x

$$d^4x = -\frac{r\,dx^4}{y} + \frac{pq\,dx^4}{yy} + \frac{6pq\,dx^4}{yy} - \frac{6p^3\,dx^4}{y^3}$$
$$+ \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3\,dx^2\,ddx;$$

& pro ddx ſubſtituto valore $-\frac{p\,dx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4 \quad \text{\&c.}$$

Deinde cum ſit $dy = p\,dx$; erit

$$ddy = q\,dx^2 + p\,ddx = \left(q - \frac{pp}{q}\right) dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{p\,dx^2}{y}$ ſubſtituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \quad \&$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4 \quad \text{\&c.}$$

qui valores loco differentialium altiorum ipſarum x & y ſubſtituti mutabunt expreſſionem propoſitam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque conſideratione cuiuspiam differentialis conſtantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia ſecunda non inſunt, nequidem opus eſt, vt quale differentiale ſumtum ſit conſtans, commemoretur.

269. Saepiſſime autem in calculo ad lineas curuas applicato euenire ſolet, vt hoc differentiale primum $V(dx^2 + dy^2)$ conſtans aſſumatur: quare quemadmodum hoc caſu differentialia ſecunda & altiora eliminari de-

debeant, ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absoluendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum

$dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c.

atque differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1+pp)}$, quae cum sit constans fiet

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0,$$

ideoque $$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp};$$

vnde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

Deinde fiet

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Quia autem assumsimus $dy = pdx$, fiet differentiando

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp},$$ ideoque

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

 por-

porroque differentiando:

$$d^4y = \frac{s\,dx^4}{1+pp} - \frac{13pqr\,dx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora vtriusque variabilis x & y per quantitates finitas & poteſtates ipſius dx exprimentur, atque poſt has ſubſtitutiones factas reſultabit expresſio a differentialibus ſecundis prorſus libera.

270. Expoſito igitur modo differentialia ſecunda & altiora exuendi, conueniet hoc negotium aliquot exemplis illuſtrari.

I. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{x\,ddy}{dx^2}$, in qua dx poſitum eſt conſtans. Poſito ergo $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$, ob $ddy = q\,dx^2$, expreſſio propoſita abit in hanc finitam xq.

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua poſitum ſit dy conſtans. Ponatur $dx = p\,dy$; $dp = q\,dy$, ob $ddx = q\,dy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem vt ante ſtatuere velimus $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$; ob dy conſtans erit $0 = p\,ddx + dp\,dx$ & $ddx = -\frac{q\,dx^2}{p}$; vnde expreſſio propoſita transibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit propoſia haec expreſſio $\frac{y\,ddx - x\,ddy}{dx\,dy}$ in qua $y\,dx$ poſitum ſit conſtans. Ponatur $dy = p\,dx$ & $dp =$

$dp = q\,dx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{p\,dx^2}{y}$, $ddy = q\,dx^2 - \frac{pp\,dx^2}{y}$, quibus fubftitutis expreffio propofita transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit propofita ifta expreffio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conftans fit pofitum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ponatur iterum $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, & ex paragrapho praecedente erit $ddy = \frac{q\,dx^2}{1+pp}$; vnde expreffio propofita abibit in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Ex his autem exemplis fatis intelligitur, quemadmodum in quouis cafu oblato, quodcunque differentiale primum affumtum fit conftans, differentialia fecunda atque altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quantitatibus finitis p, q, r, s, &c. differentialia fecunda & altiora ita eliminari queant, vt tota expreffio praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. folum differentiale dx complectatur: viciffim fi huiusmodi expreffio reducta proponatur, ea iterum in formam priorem transmutari poterit loco litterarum p, q, r, s, &c. introducendis differentialibus fecundis & altioribus. Nunc autem perinde erit, quodnam differentiale primum conftans affumatur; atque vel id ipfum, quod ante fuit affumtum conftans

 po-

poni poteſt, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorſus nullum differentiale conſtans aſſumi poterit, hocque modo prodibunt expreſſiones differentialia ſecunda altioraue continentes, quae etiamſi nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, tamen fixas ſignificationes obtineant, cuiusmodi expreſſiones dari ſupra oſtendimus.

272. Sit ergo propoſita expreſſio quaecunque continens litteras finitas x, y, p, q, r, &c. vna cum differentiali dx, in qua ſit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dy}{dx}$; &c. Si enim has litteras p, q, r, &c. ita eliminare velimus, vt earum loco introducamus differentialia ſecunda & altiora ipſarum x & y, nullo differentiali conſtante aſſumto: fiet $dp = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, hincque $q = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$,

quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,ddx\,ddy + 3\,dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^4},$$

vnde fit

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,ddx\,ddy + 3\,dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

Quod ſi inſuper littera s, quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, inſit, pro ea ſubſtitui debebit hic valor $s =$

$$\frac{dx^3 d^4y - 6dx^2 ddx\,d^3y - 4dx^2 ddy\,d^3x + 15dx\,ddx^2 ddy + 10dx\,dy\,ddx\,d^3x - 15dy\,ddx^3 - dx^2 dy\,d^4x}{dx^7}$$

His

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s, &c. ſubſtitutis expreſſio propoſita transmutabitur in aliam differentialia altiora ipſarum x & y continentem, quae etiamſi nullum differentiale primum conſtans ſit aſſumtum, tamen non vagam ſed fixam habebit ſignificationem.

273. Hoc ergo modo quaeuis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum aſſumtum eſt conſtans, transmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale conſtans ponitur, quae hoc non obſtante eundem valorem fixum habeat. Primum ſcilicet ope methodi ante traditae aſſumtis valoribus $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dy = rdx$; $dr = sdx$; &c. differentalia altiora eliminentur, tum loco p, q, r, s, &c. valores nunc inuenti ſubſtituantur; atque orietur expreſſio priori aequalis nullum differentiale conſtans inuoluens: quam transformationem exempla ſequentia illuſtrabunt.

I. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx poſitum conſtans, quae transmutari debeat in aliam formam nullum differentiale conſtans inuoluentem.

Ponatur $dy = pdx$; $dp = qdx$; atque vt ante (270) vidimus expreſſio propoſita transibit in hanc: qx. Nunc loco q ſubſtituatur valor, quem obtinet nullo differentiali conſtanti aſſumto $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ atque reperietur haec expreſſio $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$ propoſitae aequalis, & nullum amplius differentiale conſtans inuoluens.

II. Sit

II. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua dy affumtum eft conftans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$; eaque transibit in hanc: $-\frac{p(1+pp)}{q}$, ftatuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$ & $q = \frac{dxddy - dyddy}{dx^3}$, atque inuenietur: $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$ quae nullo differentiali affumto eundem fixum habet valorem, quem propofita.

III. Sit propofita haec expreffio: $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conftans eft affumtum. Ponatur $dy = pdx$, atque vti fupra (270) vidimus haec expreffio transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali conftante affumto transformabitur in iftam:

$$-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2 dy} + \frac{xdy}{ydx}$$
$$= \frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}$$

IV. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conftans affumtum eft differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Pofito $dy = pdx$, & $dp = qdx$, orietur haec expreffio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$, & $q =$

$q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, atque nullo assumto differentiali constante nanciscemur istam expressionem $\frac{(dx^2 + dy)^2}{dx^2 ddy - dxdyddx}$ propositae aequiualentem.

V. Sit proposita haec expressio $\frac{dxd^3y}{xddy}$, in qua differentiale dx constans sit assumtum. Ponatur

$$dy = pdx\ ; \quad dp = qdx \quad \& \quad dq = rdx\ ;$$

atque ob

$$ddy = qdx^2 \quad \& \quad d^3y = rdx^3$$

formula proposita abibit in hanc $\frac{rdx^2}{xq}$. Nunc loco q & r substituantur valores, quos nullo differentiali constante assumto recipiunt scilicet: $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, &

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5},$$

atque obtinebitur sequens expressio propositae aequiualens:

$$\frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dxddy - dyddx}$$

$$= \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x)}{dxddy - dyddx} - 3ddx.$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita vt non opus sit litteras p, q, r, &c. introdu-

 cere

cere. Varii autem modi hoc opus absoluendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula proposita constans fuerit assumtum. Ponamus primum in formula proposita differentiale dx constans esse assumtum; & quia loco dy posuimus pdx, rursusque $\frac{dy}{dx}$ loco p: differentialia prima dx & dy, vbicunque in expressione occurrunt, sine alteratione relinquuntur. Vbi autem occurrit ddy, quia eius loco scribitur qdx^2, & porro loco q valor $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$, transmutatio absoluetur, si vbique loco ddy statim ponatur $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$ seu $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$. Si insuper in expressione proposita occurrat d^3y, quia eius loco ponitur rdx^3, ob valorem ipsius r ante inuentum, vbique loco d^3y scribi debebit

$$d^3y - \frac{3\,ddx\,ddy}{dx} + \frac{3\,dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx},$$

quo facto expressio proposita transmutabitur in aliam, quae nullum differentiale constans inuoluit. Sic si proponatur ista expressio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, in qua dx positum est constans, ei aequalis erit posito $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$ loco ddy, haec nullum differentiale constans inuoluens:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy - dy\,ddx}.$$

275. Hinc facile colligitur, si in expressione quapiam proposita assumtum fuerit differentiale dy constans, tum vbique loco ddx scribi debere $ddx - \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$; vt obtineatur expressio aequiualens, in qua nullum differentiale constans ponatur. Sin autem in expressione proposita constans fuerit assumtum ydx, quoniam fit

$$ddx = -\frac{pdx^2}{y}, \quad \& \quad ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y};$$

loco ddx vbique scribi debebit $-\frac{dxdy}{y}$, & loco ddy vbique $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentialia, quia in hoc negotio rarissime occurrere solent, non progredior. Quod si vero in expressione proposita hoc differentiale $V(dx^2 + dy^2)$ assumtum fuerit constans, quia inuenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$: pro ddx vbique scribi debet $\frac{dy^2ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$, & loco ddy vbique $\frac{dx^2ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$. Sic si proposita fuerit expressio $\frac{dyV(dx^2+dy^2)}{ddx}$, in qua $V(dx^2+dy^2)$ assumtum sit constans, ea transmutabitur in hanc:

$\frac{(dx^2 + dy^2)^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, in qua nullum differentiale constans assumitur.

276. Quo istae reductiones facilius ad usum accommodari queant, eas in sequenti tabella complecti visum est.

Formula igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale constans inuoluentem transmutabitur ope substitutionum sequentium:

I. Si differentiale dx fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddy	$ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3\,ddx\,ddy}{dx} + \frac{3\,dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx}$

II. Si differentiale dy fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$ddx - \frac{dx\,ddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3\,ddx\,ddy}{dy} + \frac{3\,dx\,ddy^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$

III.

III. Si differentiale $y\,dx$ fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$-\dfrac{dx\,dy}{y}$
ddy	$ddy - \dfrac{dy\,ddx}{dx} - \dfrac{dy^2}{y}$
d^3x	$\dfrac{dy\,ddx}{y} - \dfrac{dx\,ddy}{y} + \dfrac{3\,dx\,dy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \dfrac{3\,ddx\,ddy}{dx} + \dfrac{3\,dy\,ddx^2}{dx^2} - \dfrac{dy\,d^3x}{dx}$ $- \dfrac{4\,dy\,ddy}{y} + \dfrac{4\,dy^2\,ddx}{y\,dx} + \dfrac{3\,dy^3}{yy}$.

IV. Si differentiale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\dfrac{dy^2\,ddx - dx\,dy\,ddy}{dx^2+dy^2}$
ddy	$\dfrac{dx^2\,ddy - dx\,dy\,ddx}{dx^2+dy^2}$
d^3x	$\dfrac{dy^2\,d^3x - dx\,dy\,d^3y}{dx^2+dy^2}$ $+ \dfrac{(dx\,ddy - dy\,ddx)(3dy^2\,ddy - dx^2\,ddy + 4dx\,dy\,ddx)}{(dx^2+dy^2)^2}$
d^3y	$\dfrac{dx^2\,d^3y - dx\,dy\,d^3x}{dx^2+dy^2}$ $+ \dfrac{(dy\,ddx - dx\,ddy)(3dx^2\,ddx - dy^2\,ddx + 4dx\,dy\,ddy)}{(dx^2+dy^2)^2}$

277. Expreſſiones ergo iſtae, quae nullum differentiale conſtans includunt, ita erunt comparatae, vt pro lubitu quoduis differentiale conſtans aſſumi queat. Hincque expreſſiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale conſtans aſſumtum perhibetur, examinari poſſunt, vtrum ſignificatio earum ſit vaga an fixa? Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx conſtans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expreſſio iterum ad formam, in qua nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, quae ſi cum propoſita conueniat, ea erit fixa, neque ab inconſtantia differentialium ſecundorum pendebit: ſin autem expreſſio prodeat diuerſa, tum propoſita vagam habet ſignificationem. Sic ſi ponatur haec expreſſio $yddx - xddy$, in qua nullum differentiale poſitum ſit conſtans; ad inueſtigandum, vtrum ſignificationem fixam habeat an vagam? ponatur dx conſtans, eaque abibit $-xddy$: nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponat,

$ddy - \frac{dyddx}{dx}$ ac prodibit $-xddy + \frac{xdyddx}{dx}$,

cuius a propoſita diſcrepantia indicat, propoſitam expreſſionem fixam ſtatamque ſignificationem non habere.

278. Simili modo ſi proponatur expreſſio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiri poterit, ſub qua ea nullo differentiali conſtante aſſumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx conſtans, atque expreſſio propoſita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, vt

eius

eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx + Rdy = 0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P = -\frac{Rdy}{dx}$ seu $R = -\frac{Pdx}{dy}$ tum expressio proposita $Pddx + Qdxdy + Rddy$ valorem fixum non habebit, sed eius significatio erit vaga atque diuersa, prout aliud atque aliud differentiale constans assumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialem, in qua quodpiam differentiale constans est positum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans inuoluat, quo facto illud alterum differentiale constans ponatur. Sic si in expressione proposita differentiale dx assumtum sit constans, eaque transmutanda sit in aliam, quae differentiale dy constans implicet: in formulis supra loco ddy & d^3y substituendis ob dy constans ponatur $ddy = 0$, $d^3y = 0$, atque quaesito satisfiet, si loco ddy substituatur $-\frac{dyddx}{dx}$ & $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyddx}{dx}$ loco d^3y. Hoc modo ista formula $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$, in qua dy ponitur constans.

280. Si contra formula, in qua dy constans est positum, transmutari debeat in aliam, in qua dx sit constans, tum loco ddx substitui debet $-\frac{dx\,ddy}{dy}$ & loco d^3x haec expressio $\frac{3\,dx\,ddy^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$. Simili modo si formula, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ positum est constans, transmutari debeat in aliam, in qua dx sit constans, tum loco ddx scribatur $-\frac{dx\,dy\,ddy}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{dx^2\,ddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. At si formula, qua dx constans est assumtum, transmutari debeat in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ sit constans, quia ob dx^2+dy^2 constans fit $dx\,ddx+dy\,ddy=0$; & $ddx=-\frac{dy\,ddy}{dx}$, hoc valore loco ddx assumto, pro ddy scribi debebit $ddy+\frac{dy^2\,ddy}{dx^2}=\frac{(dx^2+dy^2)\,ddy}{dx^2}$: Sic haec formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, in qua dx est constans, transmutabitur in aliam, in qua $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ponitur constans, quae erit $-\frac{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{ddy}$.

CAPUT

CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS.

281.

In hoc Capite imprimis eſt propoſitum earum functionum ipſius x, quae non explicite, ſed implicite per aequationem, qua relatio functionis iſtius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriantur, oſtendemus. Cum enim in calculo integrali ſummum negotium conſiſtat in integratione aequationum differentialium, ſeu in inuentione eiusmodi aequationum finitarum, quae cum differentialibus conueniant; neceſſe eſt, vt hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine ſequuntur, diligentius ſcrutemur, ſicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Vt igitur hoc negotium abſoluamus, ſit y functio eiusmodi ipſius x, quae per hanc aequationem quadratam $yy + Py + Q = 0$ definiatur. Cum ergo haec expreſſio $yy + Py + Q$ ſit $= 0$, quicquid x ſignificet, nihilo quoque aequalis erit, ſi loco x ſcribatur $x + dx$, quo caſu y abit in $y + dy$. Facta autem hac ſubſtitutione, ſi a quantitate reſultante ſubtrahatur prior

$yy + Py + Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $= 0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $= 0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales, earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit $yy + Py + Q = 0$, erit quoque

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0:$$

quia vero P & Q sunt functiones ipsius x, earum differentialia huiusmodi formam habebunt,

$$dP = p\,dx, \quad \& \quad dQ = q\,dx;$$

vnde fiet

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$$

ex qua oritur $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}$.

283. Quemadmodum ergo aequatio finita $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x, ita aequatio differentialis exprimit relationem seu rationem, quam dy tenet ad dx. Quoniam vero est $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - q}{2y + P}$, haec ratio $dy : dx$ cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita: neque vero res aliter se habere potest; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, vterque suum peculiare habebit differentiale, & vtriusque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expressione $-\frac{yp - q}{2y + P}$ loco y substituatur. Simili modo functio y per aequatio-

tionem cubicam definiatur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici scilicet ipsius y valori respondens. Si in aequatione proposita finita y quatuor pluresue habeat dimensiones, necesse est vt $\frac{dy}{dx}$ totidem significationes sortiatur.

284. Interim tamen ipsa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita scilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimensiones assurget, quot ante habuerat y, sicque ista aequatio omnes diuersas rationes ipsius dy ad dx simul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$, cuius differentialis est:

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = -\frac{Pdy - dQ}{2dy + dP}$, qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q-PP)dy^2 + (4Q-PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\tfrac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP-4Q)}},$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita:

$$y = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(PP-4Q)}.$$

285. Inuento valore ipſius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipſius ddy, porroque ipſorum d^3y, d^4y, &c. qui autem, cum determinati non ſint, niſi aliquod differentiale primum conſtans ſtatuatur. Ponamus commoditatis ergo dx conſtans, atque ad hoc oſtendendum ſumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, vnde per differentiationem oritur

$$3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx,$$

hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, ſumantur denuo differentialia poſito dx conſtante atque inuenietur $\frac{ddy}{dx} =$

$$- \frac{ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

ſubſtituatur loco dy eius valor modo inuentus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$, atque diuiſione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3}$$

$$+ \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

ſeu

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

$$= - \frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum ex aequatione finita ſit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae his valores in innumeras formas transmutari poſſunt.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis potest variari, dum cum aequatione finita permiscetur. Sic cum exemplo praecedente inuenta esset aequatio differentialis

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

si ea multiplicetur per y, orietur

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx,$$

in qua si loco y^3 substituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio noua

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

quae denuo per y multiplicata, postquam loco y^3 eius valor fuerit substitutus, praebebit

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Generaliter autem si P, Q, R, denotent functiones quascunque ipsarum x & y. Si aequatio differentialis multiplicetur per P erit

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum sit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes inuicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex proposita aequatione finita natam

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy +$$
$$Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

287. Possunt vero etiam per ipsam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequa-

 tio-

tione finita inueniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut diuiditur. Sic si P fuerit functio quaecunque ipsarum x & y, vt sit $\partial P = p\,dx + q\,dy$, si aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diuersas induet, prouti pro P aliae atque aliae functiones assumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, si ad hanc aequationem differentialem inuentam addatur ipsa aequatio finita per huiusmodi formulam $Q\,dx + R\,dy$ multiplicata, vbi pro Q & R functiones quascunque ipsarum x & y assumere licet. Quanquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx, quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipsius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potissimum explicabitur.

288. Non solum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci possunt, sed etiam plures imo infinitae exhiberi possunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy = ax + ab$ & $yy = ax$ omnino sunt diuersae, dum in priori quaecunque quantitas constans in locum ipsius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatae eandem dant aequationem differentialem $2y\,dy = a\,dx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy = ax$. contenten-

tentae, quicunque valor ipsi a tribuatur, in vna aequatione differentiali, in qua a non insit, comprehendi possunt. Diuidatur enim aequatio illa per x vt sit $\frac{yy}{x} = a$, haecque differentia dabit $2xdy - ydx = 0$. Possunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perduci, vti fit in istis aequationibus

$$yy - ax = 0 \quad \& \quad yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}},$$

si enim vtraque per $e^{\frac{x}{a}}$ diuidatur, vt habeantur istae aequationes:

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0 \quad \& \quad e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb,$$

ex vtriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diuersitatis in hoc consistit, quod quantitatis constantis differentiale sit $= 0$. Quodsi ergo aequatio finita ad eiusmodi formam reducatur, vt quantitas quaepiam constans sola adsit, neque per variabiles vel multiplicetur vel diuidatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas constans prorsus non adsit. Hoc modo quaelibet quantitas constans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli potest. Sic si proposita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; si ea per xy diuidatur vt habeatur

x^3

$\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam constans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates constantes, quae in aequatione finita insunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesue repetitam; sicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis constantibus prorsus carentes. Sit proposita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem constantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tolletur prima differentiatione, vnde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae sumto dx constante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0,$$

quae etsi nullam constantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m, n & aa tribuantur, in se aeque comprehendit.

291. Non solum vero quantitates constantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli possunt, sed etiam altera variabilis, eius scilicet, cuius differentiale constans assumitur, per differentiationem eliminari poterit. Ex aequatione enim inter x & y proposita quaeratur valor x, vt sit $x = Y$ denotante Y func-

functionem ipsius y; eritque $dx = dY$, & sumto dx constante, fiet differentiando $0 = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $0 = d^3Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $0 = d^4Y$. Quanquam autem in his aequationibus vna tantum variabilis inesse videtur, quae propterea variabilis esse cessaret, dum vnica variabilis in nulla aequatione adesse potest; tamen quia differentiale dx constans est assumtum, eiusque ratio in aequatione haberi debet, reuera in aequationem ingredi censendum est. Hinc mirandum non est, si saepius aequationes differentiales secundi altiorisue gradus occurrant, in quibus vnica tantum variabilis inesse videatur.

292. Praecipue autem notandum est, per differentiationem quantitates irrationales ac transcendentes ex aequatione tolli posse. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitas irrationalitas eliminari potest, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc saepenumero commodius sine ista reductione fieri potest, dum per comparationem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, si vna tantum insit, eliminari potest. Sin autem duae pluresue partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, sicque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad singulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli pote-

 runt.

runt. Vti ſi fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, poſt differentiationem habebitur

$$my^{m-1}dy = -2n(aa - xx)^{n-1}xdx,$$

quae per finitam diuiſa dat $\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa-xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam ortam eſſe poſſe ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes inuoluente.

293. Vt autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminentur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum ſint algebraica, negotium ſine difficultate abſoluetur. Sit enim $y = xlx$: erit $\frac{y}{x} = lx$, vnde differentiando fit $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$, ideoque $xdy - ydx = xdx$. Si bini inſint logarithmi duplici differentiatione erit opus: fit enim $ylx = xly$; erit $\frac{ylx}{x} = ly$, & differentiando, $\frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y}$, ex qua concluditur fore $lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}$. Haec aequatio iam iterum differentietur poſito dx conſtante, atque prodibit

$$\frac{dx}{x} = \frac{xxddy + 2xdxdy - 2ydxdy}{yxdy - yydx}$$

$$+ \frac{(yydx - xxdy)(yxddy + xdy^2 - ydxdy)}{(yxdy - yydx)^2}$$

seu $\frac{dx}{x} =$

$$\frac{y^2xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3}{(yxdy - yydx)^2}$$

quae reducta dabit:

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$
$$+ 3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0$$

seu

$$yyx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx)$$
$$- 2yyxxdxdy(dx + dy) = x^4dy^3 + y^4dx^3.$$

294. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi proposita fuerit $P = e^Q$, vbi P & Q functiones quascunque ipsarum x & y denotent; ea aequatio transmutari poterit in hanc logarithmicam $lP = Q$; cuius differentialis est $\frac{dP}{P} = dQ$ seu $dP = PdQ$. Neque obstat, si quantitates exponentiales magis fuerint complicatae; tum enim si vna differentiatio non sufficit, duabus pluribusue negotium absoluetur.

I. Sit $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, vnde fit

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \& \quad 2x = l\frac{y+1}{y-1},$$

cuius differentiale est

$$dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}.$$

II. Sit $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentiationem $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, seu $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, atque $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$. Ergo $2x = l\frac{dy + dx}{dx - dy}$.

Sumto ergo dx constante erit

$$dx = \frac{dx\,ddy}{dx^2 - dy^2} \quad \text{seu} \quad dx^2 = ddy + dy^2.$$

295. Simili modo quantitates transcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, vti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y = a\,\mathrm{A}\sin\frac{x}{a}$; erit $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

II. Sit $y = a\cos\frac{y}{x}$; erit

$$\frac{y}{a} = \cos\frac{y}{x}, \quad \& \quad \frac{dy}{a} = -\frac{x\,dy + y\,dx}{xx}\sin\frac{y}{x}.$$

At

At cum sit

$$\operatorname{cof}\frac{y}{x} = \frac{y}{a}\,; \quad \text{erit} \quad \operatorname{fin}\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a},$$

quo valore substituuo habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(aa - yy)}}{axx}$$

seu $\quad xxdy = (ydx - xdy)\sqrt{(aa - yy)}$.

III. Sit $y = m \operatorname{fin} x + n \operatorname{cof} x$, erit post differentiationem primam $dy = mdx \operatorname{cof} x - ndx \operatorname{fin} x$: quae denuo differentiata posito dx constante dabit

$$ddy = - mdx^2 \operatorname{fin} x - ndx^2 \operatorname{cof} x,$$

haec autem per primam diuisa dat

$$\frac{ddy}{y} = - dx^2 \quad \text{seu} \quad ddy + ydx^2 = 0,$$

ex qua non solum finus & cofinus, sed etiam constantes m & n euanuerunt.

IV. Sit $y = \operatorname{fin} lx$; erit $A \operatorname{fin} y = lx$, vnde per differentiationem fit $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{dx}{x}$; quae sumtis quadratis dat $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, haecque posito dx constante vlterius differentiata praebet,

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = - 2ydx^2dy$$

seu $\quad xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0$.

V. Sit $y = ae^{mx} \operatorname{fin} nx$, erit differentiando

$$dy = mae^{mx}dx \operatorname{fin} nx + nae^{mx}dx \operatorname{cof} nx,$$

 quae

quae per propositam diuisa dat:

$$\frac{dy}{y} = m\,dx + \frac{n\,dx\cos nx}{\sin nx} = m\,dx + n\,dx\cot nx.$$

Erit ergo $A\cot\left(\frac{dy}{ny\,dx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Quae aequatio posito dx constante differentiata dat:

$$n\,dx = \frac{n\,dx\,dy^2 - ny\,dx\,ddy}{m^2y^2dx^2 + n^2y^2dx^2 - 2my\,dx\,dy}$$

seu $(m^2 + n^2)y^2dx^2 - 2my\,dx\,dy = dy^2 - y\,ddy$.

Perspicuum igitur est, etiamsi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes insint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuisse, quae a quantitatibus transcendentibus vtcunque sit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales siue primi siue altioris gradus, quae duas variabiles x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variabiles exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variabiles x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y, qua y sit functio quaedam ipsius x. Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, vt si ea vbique loco y, eiusque differentiale loco dy, atque eius altiora differentialia loco ddy, d^3y, &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functionis

nis inueſtigatione verſatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, vt propoſita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipſius x, cui altera variabilis y eſt aequalis, definiatur; ſeu quod eodem redit, vt aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2y\,dy - a\,dx - \frac{yy\,dx}{a} + x\,dx = 0$$

ad quam ſupra §. 288 peruenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae ſimul hac aequatione finita $yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc ſit

$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$, patet $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$

eam eſſe functionem ipſius x, cui variabilis y vi propoſitae aequationis differentialis ſit aequalis. Namque ſi in aequatione loco yy, hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco $2y\,dy$ eius differentiale $a\,dx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx$ ſubſtituamus, orietur aequatio identica:

$$a\,dx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx - a\,dx - x\,dx - \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx + x\,dx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variabiles x & y exhibere, quae autem ſine ſubſidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x, quae ipsi y vi cuiuscunque aequationis differentialis siue primi siue altioris gradus, conueniat; sitque

$$dy = p\,dx; \quad dp = q\,dx; \quad dq = r\,dx; \quad \&c.$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = q\,dx^2$, $d^3y = r\,dx^3$, &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per diuisionem euanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r, &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r, &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio reuera tantum inter duas variabiles x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quantam relationem inter variabiles x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusuis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perveniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset perventum.

299. Hoc igitur modo aequatio quaeuis differentialis ita ad formam finitam reduci potest, vt in ea nonnisi quantitates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parua prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x, si ponatur

$$dy = p\,dx; \quad dp = q\,dx; \quad dq = r\,dx; \quad \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differentia-

tialia secunda & altiora per potestates ipsius dx exprimentur, quae deinceps per diuisionem penitus tollentur. Vt si proponeretur haec aequatio

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur constans; facto

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad \& \quad dq = rdx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

postquam scilicet tota aequatio per dx^3 est diuisa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque sint ordinis, his substitutionibus

$$dy = pdx; \quad dp = qdx; \quad dq = rdx; \quad \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque si aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita vt differentialia prima eam tantum ingrediantur, per istam reductionem praeter variabiles y & x insuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit secundi ordinis continens differentialia secunda, praeterea quantitas q; ac, si fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur insuper quantitas r, sicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorsus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis constantis penitus cessat; neque amplius, etiamsi insint quantitates q, r, ex differentialibus secundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale constans sit assumtum. Perinde enim est, vtrum

in euolutione aliquod differentiale pro lubitu constans statuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis secundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum constans esse assumtum perhibetur; hoc modo statim explorari poterit, vtrum ea determinatam relationem inter variabiles x & y contineat, nec ne? Quia enim nullum differentiale constans assumitur, in arbitrio nostro relinquitur, quodnam differentiale constans ponere velimus; hincque tantum erit dispiciendum, vtrum diversis differentialibus constantibus positis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quodsi non eueniat, certum est signum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in solutione nullius problematis locum habere posse. Tutissimus autem modus simulque facillimus hoc explorandi erit is ipse, quem supra in simili negotio pro expressionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant significatus? dignoscendis tradidimus.

302. Proposita ergo huiusmodi aequatione differentiali secundi altiorisue ordinis, in qua nullum differentiale constans sit positum, statuatur differentiale dx constans; deinde haec aequatio, vti supra de expressionibus differentialibus ostendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans supponat, statuendo scilicet $ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$ loco ddy;

&

$$\& \quad d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \text{ loco } d^3y;$$
&c.

Quo facto dispiciatur, vtrum aequatio hoc modo resultans conueniat cum aequatione proposita; quod si eueniat, aequatio proposita determinatam relationem inter x & y complectetur; sin autem secus accidat, aequatio erit vaga, neque definitam rationem inter variabiles x & y exprimet: quemadmodum hoc iam ante fusius est demonstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequatio proposita, quae nullo differentiali constante posito reperta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx constans, atque ea transibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum consideratio differentialis constantis exuatur, modo ante praescripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a proposita tantum ratione primi termini discrepat, videndum est, vtrum sit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod si deprehendatur, aequatio proposita fixam relationem inter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo integrali tradendas reperietur, quodcunque differentiale pri-

 mum

mum conſtans accipiatur. At, ſi fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio propoſita erit impoſſibilis.

304. Niſi igitur haec propoſita aequatio:

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

ſit abſurda, neceſſe eſt vt ſit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo euenire poteſt: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ ſeu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipſa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione propoſita eſt orta: quo poſteriore caſu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum propoſita, eandemque relationem inter x & y continebit, ſicque ſine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim ſit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione propoſita ſubtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Cum autem ſit $dy = -\frac{Pdx}{Q}$, differentialia prorſus extingui poterunt, naſceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in ſolutione problematis nullo differentiali conſtante aſſumto peruentum eſſe ad hanc aequationem:

$$x^3ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit

Erit ergo, cum aequationem absurdum non continere constet; $x^3 dx + xxy dy = 0$, seu $x dx + y dy = 0$: cuius differentiale erit

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a proposita subtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0, \text{ seu}$$
$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem sit

$$xdx + ydy = 0; \text{ erit } 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \text{ seu } yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, siquidem ea consentit cum differentiali primum inuenta $xdx + ydy = 0$. Qui consensus, nisi se manifestasset, aequatio proposita pro impossibili esset habenda; cum autem hoc casu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ sine calculo integrali elicere licuit.

306. Vt vero etiam exemplum aequationis impossibilis afferamus, proposita sit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale constans sit assumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy + 2xdxdy = 0,$$

quae propositae aequalis posita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

 Cum

Cum vero ſit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differentialibus obtinebitur:

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x} \quad \text{ſeu}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae vtrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ conſentiat, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{ſeu} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{9yy - ax + 4xy - 2xx},$$

$$\text{at ex illa eſt} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}, \quad \text{foretque ergo}$$

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{ſeu} \quad axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} =$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inuenta eſt

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab iſta ſubtracta relinquit:

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3,$$

quae reſoluitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$ conſtare poteſt, at vero aequationi finitae primum inuentae

tae aduersatur, nisi statuatur $a = 0$, vel nisi vtraque variabilis x & y constans statuatur, quo quidem casu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus satisfit, aequatio proposita subsistere nequit.

307. Consideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variabiles x, y, & z inuoluentes, quae erunt vel primi, vel secundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam scrutandam notari oportet, aequationem finitam tres variabiles complectentem determinare relationem, quam vnaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio sit z ipsarum x & y. Quemadmodum igitur aequatio huiusmodi finita resoluitur, si reperiatur qualis functio ipsarum x & y loco z substitui debeat, vt aequationi satisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variabiles complectens determinabit, qualis functio vna sit reliquarum; isque huiusmodi aequationem resoluisse censendus est, qui indicauerit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z substituta aequationi satisfaciat, seu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis resoluitur, si vel functio ipsarum x & y valorem ipsius z exhibens definiatur, vel aequatio finita assignetur, qua idem debitus ipsius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variabiles complectens, semper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non semper euenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiusmodi aequationes, quibus pla-

plane nullo modo satisfieri poterit, quaecunque functio ipsarum x & y in locum ipsius z substituatur. Vti si proposita fuerit haec aequatio $z\,dy = y\,dx$ facile patet, nullam prorsus dari functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta reddat $z\,dy = y\,dx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguentur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipsarum x & z, quae loco y substituta eidem aequationi satisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipsarum x & z, in eius differentiali dy inest dz, quod quia in aequatione non inest, destrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x, y, & z dari potest, quae aequationi differentiali $z\,dy = y\,dx$ conueniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variabiles continentes distribui oportet in imaginarias & reales. Huiusmodi autem aequatio erit imaginaria seu absurda, cui per nullam aequationem finitam satisfieri potest, cuiusmodi erat illa $z\,dy = y\,dx$, quam modo considerauimus. Aequatio autem erit realis, cui aequiualens aequatio finita exhiberi potest, quod euenit, si vna variabilis aequalis sit certae cuipiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$z\,dy + y\,dz = x\,dz + z\,dx + x\,dy + y\,dx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \quad \text{fitque} \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imagina-

ginarias & reales diligentissime est obseruandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integralem, hoc est aequationem finitam satisfacientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z, tantum inesse differentialia dx & dy, differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tollentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, vti fit in hac aequatione:

$$z\,dy - z\,dx = y\,dy - x\,dx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem inuestigatur, quibus casibus hoc eueniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variabiles inuoluens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse poterit. Quos casus vt euoluamus, ponamus

P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = P\,dx + Q\,dy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaepiam ipsarum x & y, cuius differentiale sit

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \text{eritque} \quad P = p \quad \& \quad Q = q.$$

At supra demonstrauimus $p\,dx + q\,dy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y, nisi sit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, vti ante assumsimus $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy diuisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q, posita sola x variabili, diuisum per dx. Quocirca aequatio $dz = P\,dx + Q\,dy$ realis esse nequit, nisi sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = P\,dx + Q\,dy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z, P vero & Q sint functiones ipsarum x & y, tertiam variabilem z non complectentes. Vt enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y, necesse est vt sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur, diiu-

diiudicari poteſt, vtrum ſit realis an abſurda. Sic patebit hanc aequationem $z\,dz = y\,dx + x\,dy$ eſſe realem, nam ob

$$P = y \quad \& \quad Q = x, \quad \text{fit} \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Haec vero aequatio $az\,dz = yy\,dx + xx\,dy$ eſt abſurda, fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$; qui valores ſunt inaequales.

313. Vt autem criterium latiſſime patens inueſtigemus, ſint P, Q, & R functiones quaecunque ipſarum x, y, & z; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, ſiquidem ſit primi gradus, continebitur in hac forma:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Quoties ergo haec aequatio eſt realis, z aequabitur functioni cuipiam ipſarum x & y; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = p\,dx + q\,dy$. Quare ſi in aequatione propoſita iſta functio ipſarum x & y loco z, & $p\,dx + q\,dy$ loco dz ſubſtituatur, neceſſe eſt, vt prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione propoſita fiat: $dz = -\frac{P\,dx}{R} - \frac{Q\,dy}{R}$, ſi in P, Q, & R valor ille loco z ſubſtituatur, neceſſe eſt vt fiat

$$p = -\frac{P}{R}, \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R}.$$

314. Quoniam vero est $dz = p\,dx + q\,dy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y sit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

erit $$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{R\,dP + P\,dR}{RR\,dy}\right)$$

& $$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{R\,dQ + Q\,dR}{RR\,dx}\right)$$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

vbi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP, dQ, dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitatibus P, Q, & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P, Q, & R sunt functiones ipsarum x, y, & z, ponamus

$$dP = \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$$
$$dQ = \delta\,dx + \epsilon\,dy + \zeta\,dz$$
$$dR = \eta\,dx + \theta\,dy + \iota\,dz$$

vbi

vbi α, β, γ, δ, ϵ, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z vbique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz, ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\epsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\theta + \iota q)dy.$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, vt sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inuenti valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante inuenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$ qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non substituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

seu $\quad 0 = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta).$

 Quia

Quia autem quantitates ϵ, δ, γ, η, ζ, θ, per differentiationem inueniuntur, erit superiori notandi modo adhibito:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Quae proprietas, nisi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, sed imaginaria & absurda.

317. Quanquam hanc regulam ex consideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aeque ingrediuntur, manifestum est, & reliquarum consideratione, eandem expressionem prodituram fuisse. Proposita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variabiles inuoluat, quacunque, statim diiudicari poterit vtrum sit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

qui si fuerit $= 0$, aequatio erit realis, sin autem non fuerit $= 0$, certum hoc est signum, aequationem esse imaginariam seu absurdam.

318. Aequatio proposita per diuisionem quoque semper ad huiusmodi formam reduci potest:

$$P\,dx + Q\,dy + dz = 0,$$

in

in quam, cum prior abeat si fiat $R = 1$, criterium simplicius exprimetur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Quoties enim haec expressio reuera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eueniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstrauimus, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, vtrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, fuerit P functio ipsius x, Q functio ipsius y, & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem. Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;\&\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0 \;;$$

ideoque tota expressio criterii sponte euanescet.

320. Si fuerit vt ante P ipſius x, & Q ipſius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipſarum x, y & z, aequatio erit realis ſi fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{ſeu} \quad \left(\frac{dR}{dx}\right):\left(\frac{dR}{dy}\right)=P:Q$$

Sic ſi propoſita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2\,dx}{x}+\frac{3\,dy}{y}+\frac{x^2y^3\,dz}{z^6}=0.$$

Quia hic eſt $P=\frac{2}{x}$; $Q=\frac{3}{y}$, & $R=\frac{x^2y^3}{z^6}$

hinc $\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{2xy^3}{z^6}$; atque $\left(\frac{dR}{dy}\right)=\frac{3xxyy}{z^6}$;

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio propoſita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipſarum x & y, at R functio ipſius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=0\;;\;\left(\frac{dQ}{dz}\right)=0\;;\;\left(\frac{dR}{dx}\right)=0\;\&\;\left(\frac{dR}{dy}\right)=0,$$

aequatio erit realis ſi fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec eadem vero conditio requiritur, ſi $P\,dx+Q\,dy$ debeat eſſe differentiale determinatum, ſeu ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae ipſarum x & y ortum. Hucque redit quod ſupra §. 312 iam obſeruauimus, aequatio-

tionem $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y, realem esse non posse, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ambo autem isti casus inter se prorsus conueniunt: nam loco $R\,dz$, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z.

322. Vt hoc criterium inuentum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^2z - 5yz^3)\,dx + (5x^2yz - 4xz^3)\,dy + (4x^2y^2 - 6xyz^2)\,dz = 0,$$

qua cum forma generali comparata fit:

$$P = 6xy^2z - 5yz^3 \;;\; \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3 \;;$$
$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2$$
$$Q = 5x^2yz - 4xz^3 \;;\; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3 \;;$$
$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xzz$$
$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2 \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2 \;;$$
$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2 .$$

His inuentis valoribus aequatio iudicium continens erit haec:

$$+ (6xy^4z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz)$$
$$+ (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+ (4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expressio si euoluatur, omnes termini actu se mutuo destruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propositam esse realem.

323. Quando autem expressio hoc modo ex criterio eruta non euanescit, tum id signum est aequationem propositam esse imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita inuenitur, ea, si quidem aequationi differentiali conueniat, simul relationem indicabit, quam variabiles inter se tenent. Atque hoc modo ii casus, quorum supra meminimus (310), euoluuntur. Sit enim proposita ista aequatio:

$$(z - x)\,dx + (y - z)\,dy = 0,$$

fiet $P = z - x$; $Q = y - z$; & $R = 0$,

porro $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$, & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$.

Aequatio iudicium exhibens fit $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$

seu $z - x = z - y$; vnde fit $y = x$.

Quoniam igitur hic casu euenit, vt aequatio $y = x$ simul aequationi differentiali satisfaciat, dicendum est propositam aequationem nil aliud significare, nisi esse $y = x$.

324.

324. Propoſita ergo aequatione differentiali tres variabiles continente:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

tres conſiderandi erunt caſus ſequentes, ad quos haec aequatio deducit:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Primus eſt ſi haec expreſſio reuera ſit $= 0$, tumque aequatio propoſita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non ſit identica, tum diſpiciendum eſt, vtrum ea aequationi propoſitae ſatisfaciat: quodſi euenit, habebitur aequatio finita, qui eſt caſus ſecundus. Tertius autem caſus locum habet, ſi aequatio finita cum propoſita differentiali ſubſiſtere nequeat, atque tum aequatio propoſita erit imaginaria: neque enim vlla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipſi ſatisfaciat.

325. Caſus primus ac tertius per ſe ſunt perſpicui, ſecundus autem, etſi rariſſime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam ſupra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia inſint:

$$(z - y)\,dx + x\,dy + (y - z)\,dz = 0.$$

 Erit

Erit ergo:

$$P = z - y \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1$$

$$Q = x \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$$

$$R = y - z \;;\; \left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \;;\; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$$

vnde aequatio finita criterium continens euadet:

$$z - x - y = 0, \quad \text{seu} \quad z = x + y$$

substituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque $\quad x\,dx + x\,dy - x(dx + dy) = 0;$

quae aequatio, cum sit identica, sequitur aequationem differentialem nil aliud significare, nisi $z = x + y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variabiles insunt contineri in hac forma:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

dubium hic nasci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresue dimensiones constituunt, cuiusmodi est haec:

$$P\,dx^2 + Q\,dy^2 + R\,dz^2 = 2S\,dx\,dy + 2T\,dx\,dz + V\,dx\,dz.$$

Ve-

Verum de huiusmodi aequationibus notandum est, eas nullo modo reales esse posse, nisi habeant diuisores prioris formae, qui propterea aequationes simplices constituent. Cum enim ex hac aequatione fiat:

$$dz = \frac{-Tdx-Vdy\pm\sqrt{(dx^2(T^2-PR)+2dxdy(TV+RS)+dy^2(V^2-QR))}}{R}$$

facile patet z functioni cuipiam ipsarum x & y, seu dz huiusmodi expressioni $p\,dx+q\,dy$ aequale fieri non posse, nisi quantitas irrationalis euadat rationalis, quod eueniet si fuerit:

$$(T^2-PR)(V^2-QR)=(TV+RS)^2$$

seu

$$R=\frac{PVV+2STV+QTT}{PQ-SS}.$$

Nisi ergo haec aequatio finita ipsa aequationi propositae satisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Superesset vt in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variabiles complectuntur, perpenderemus, casusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae euadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praesertim, cum ex iisdem fontibus,

bus, quos hic aperuimus, ſequantur. Ceterum ſi in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem cauſam hic quoque aequationes, quae plures variabiles complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, ſi vnquam occurrerent, ex principiis hic traditis ſine negotio examinari poſſent. Quare his expoſitis Inſtitutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progreſſuri ad inſignes vſus oſtendendos, quos iſte calculus cum in ipſa Analyſi, tum in Geometria ſublimiori affert.



INSTI-

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS
PARS POSTERIOR

CONTINENS

VSUM HUIUS CALCULI IN ANALYSI
FINITORUM, NEC NON IN DOCTRINA
SERIERUM.



CAPUT I.

DE TRANSFORMATIONE SERIERUM.

1.



Cum nobis propositum sit vsum Calculi differentialis tam in vniuersa Analysi, quam in doctrina de seriebus ostendere; nonnulla subsidia ex Algebra communi, quae vulgo tractari non solent, hic erunt repetenda. Quae quamuis maximam partem iam in Introductione sumus complexi, tamen quaedam ibi sunt praetermissa, vel studio quod expediat ea tum demum explicari, quando necessitas id exigat, vel quia cuncta, quibus opus sit futurum, praeuideri non poterant. Huc pertinet transformatio serierum, cui hoc Caput destinauimus, qua quaeuis series in innumerabiles alias series transmutatur, quae omnes eandem habeant summam communem; ita vt, si seriei propositae summa sit cognita, reliquae series omnes simul summari queant. Hoc autem capite praemisso, eo vberius doctrinam serierum per calculum differentialem & integralem amplificare poterimus.

2. Considerabimus autem potissimum eiusmodi series, quarum singuli termini per potestates successiuas quantitatis cuiusdam indeterminatae sunt multiplicati; quo-

niam hae latius patent, maioremque vtilitatem afferent.

Sit igitur propoſita ſequens ſeries generalis, cuius ſummam, ſiue ſit cognita ſiue ſecus, ponamus $= S$, ſitque

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

Ponatur iam $x = \frac{y}{1+y}$, & cum ſit per ſeries infinitas

$$\begin{array}{l}
x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \&c. \\
x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 6y^6 - 7y^7 + \&c. \\
x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \&c. \\
x^4 = y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \&c. \\
\&c.
\end{array}$$

hi valores ſubſtituti, ſerieque ſecundum poteſtates ipſius y diſpoſita, dabunt

$$\begin{array}{rrrrrl}
S = ay & - ay^2 & + ay^3 & - ay^4 & + ay^5 & \&c. \\
 & + b & - 2b & + 3b & - 4b & \\
 & & + c & - 3c & + 6c & \\
 & & & + d & - 4d & \\
 & & & & + e. &
\end{array}$$

3. Quoniam poſuimus $x = \frac{y}{1+y}$; erit $y = \frac{x}{1-x}$; quo valore loco y ſubſtituto, ſeries propoſita

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in hanc:

$$S = a.\frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \&c.$$

in

in qua coefficiens secundi termini $b - a$ est differentia prima ipsius a ex serie a, b, c, d, e, &c. quam supra per Δa exposuimus; coefficiens tertii termini $c - 2b + a$ est differentia secunda $\Delta^2 a$; coefficiens quarti est differentia tertia $\Delta^3 a$, &c. Hinc differentiis ipsius a continuis, quae formantur ex serie a, b, c, d, e, &c. adhibendis proposita Series transmutabitur in hanc

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \&c.$$

cuius ergo seriei summa habebitur, si propositae summa fuerit cognita.

4. Si igitur series a, b, c, d, &c. ita fuerit comparata, vt tandem differentias habeat constantes, quod euenit, si eius terminus generalis fuerit functio rationalis integra, tum series posterior $\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \&c.$ tandem habebit terminos euanescentes, sicque eius summa per expressionem finitam exhiberi poterit. Ita si seriei a, b, c, d, &c. differentiae primae iam fuerint constantes, tum seriei huius:

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$$

summa erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a.$ At si illius seriei coefficientium differentiae secundae fiant constantes, tum ipsius seriei propositae erit

$$= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta\Delta a.$$

Vnde

Vnde summae huiusmodi serierum ex differentiis coefficientium facile inuenientur.

I. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \&c.$$

Diff. I.	2,	2,	2,	2,	&c.

Cum ergo differentiae primae sint constantes, ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$, erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \&c.$$

Diff. I.	3,	5,	7,	9,	&c.
Diff. II.	2,	2,	2,	&c.	

Quia itaque est

$$a = 1; \quad \Delta a = 3; \quad \Delta^2 a = 2;$$

erit seriei propositae summa

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x+xx}{(1-x)^3}.$$

III. *Quaeratur summa huius seriei:*

$$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \&c.$$

Diff. I.	11,	25,	45,	71,	103
Diff. II.	14,	20,	26,	32	
Diff. III.	6,	6,	6,		

Quia

Quia est

$$a = 4;\ \Delta a = 11;\ \Delta^2 a = 14;\ \Delta^3 a = 6;$$

erit summa

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4},$$

siue

$$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+xx)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

5. Quanquam hoc modo istarum serierum in infinitum progredientium summae inueniuntur; tamen ex iisdem principiis hae Series quoque ad datum quemuis terminum summari possunt. Proposita enim sit haec series

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots\ldots + ox^n,$$

& quaeratur eius summa, si in infinitum progrediatur, quae erit $= \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a +$ &c. Nunc considerentur eiusdem seriei termini post vltimum ox^n sequentes, qui sint

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{\&c.}$$

cuius seriei, si per x^n diuidatur, summa, vt ante inueniri poterit; quae rursus per x^n multiplicata erit

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p + \text{\&c.}$$

quae summa si a totius seriei in infinitum continuatae

summa subtrahatur, remanebit summa portionis propositae quaesita: S =

$$\frac{x}{1-x}(a-x^np)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a-x^n\Delta p)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2a-x^n\Delta^2p)$$
&c.

I. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S=1x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots\ldots+nx^n.$$

Tam horum coefficientium, quam terminum vltimum sequentium quaerantur differentiae:

1, 2, 3, 4, &c.	$n+1$, $n+2$, $n+3$, &c.
1, 1, 1	1, 1;

eritque

$$a=1,\quad \Delta a=1,\quad p=n+1,\quad \Delta p=1,$$

unde summa quaesita est:

$$S=\frac{x}{1-x}(1-(n+1)x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(1-x^n),$$

seu

$$S=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. *Quaeratur summa huius seriei finitae.*

$$S=1x+4x^2+9x^3+16x^4+\ldots\ldots+n^2x^n.$$

Inuestigentur primum differentiae hoc modo:

1, 4, 9, 16, &c.	$(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $(n+2)^2$, &c.
3, 5, 7	$2n+3$, $2n+5$
2, 2,....	2

qui-

quibus inuentis erit ſumma quaeſita $S =$

$$\frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)x^n)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n),$$

ſeu $S =$

$$\frac{x+xx-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

6. Quodſi autem ſeries propoſita non eiusmodi habeat coefficientes, qui tandem ad differentias conſtantes deducantur, tum transmutatio hic exhibita nihil confert ad eius ſummam determinandam. Neque vero etiam eius ope ſumma proxime definiri poterit commodius, quam per ipſam ſeriei propoſitae additionem fieri licet. Si enim in ſerie $ax+bx^2+cx^3+dx^4+$ &c. fuerit $x<1$ quo ſolo caſu ſummatio proprie ſic dicta locum habere poteſt, erit $\frac{x}{1-x}>x$, ideoque non ſeries minus convergit quam propoſita. Sin autem in ſerie propoſita fuerit $x=1$ tum nouae ſeriei omnes plane termini fiunt infiniti, quo ergo caſu iſta transmutatio nullius prorſus erit vſus.

7. Conſideremus autem ſeriem, in qua ſigna $+$ & $-$ alternatim ſe excipiant, quae ex praecedente deducetur ponendo x negatiuum. Si itaque fuerit

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{\&c.}$$

cuius ſeriei negatiua oritur, ſi in praecedente ſtatuatur

tur x negatiuum. Sumantur ergo vt ante differentiae Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. ex ſerie coefficientium a, b, c, d, e, &c. ſignis ad ſolas ipſius x poteſtates relatis, atque ſeries propoſita transformabitur in hanc: $S =$

$$\frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4}\Delta^3 a + \&c.$$

vnde perſpicitur aequationem propoſitam iisdem caſibus ſummari poſſe quibus praecedens. Scilicet ſi ſeries a, b, c, d, &c. tandem ad differentias conſtantes deducatur.

8. Hoc autem caſu iſta transformatio commodam praebet approximationem ad valorem ſeriei propoſitae:

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - fx^6 + \&c.$$

quantuscunque enim x fuerit numerus, fractio $\frac{x}{1+x}$, ſecundum cuius poteſtates altera ſeries progreditur, fit vnitate minor: atque ſi ſit $x = 1$, erit $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. Sin autem ſit $x < 1$ puta $x = \frac{1}{n}$ fiet $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, ideoque ſeries per transformationem inuenta ſemper magis conuergit quam propoſita. Conſideremus imprimis caſum, quo $x = 1$, qui ad ſeries ſummandas ingens affert ſubſidium, ſitque

$$S = a - b + c - d + e - f + \&c.$$

ac denotentur differentiae primae, ſecundae & ſequentes ipſius a, quas progreſſio a, b, c, d, e, &c. praebet per

per Δ, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, &c. quibus inuentis erit.

$$S = \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \Delta a + \frac{1}{8} \Delta^2 a - \frac{1}{16} \Delta^3 a + \&c.$$

quae nisi actu terminatur, summam vero proximam satis commode exhibet.

9. Vsum igitur huius vltimae transmutationis, qua sumsimus $x = 1$, in aliquot exemplis ostendamus, ac primo quidem in eiusmodi, quibus vera summa finite exprimi potest. Tales sunt series diuergentes, quibus numeri a, b, c, d, &c. tandem ad differentias constantes deducant, quarum summae, cum recepto huius vocis significatu, proprie non exhiberi queant, vocem summae hic eo sensu, quem supra tribuimus, accipimus, ita vt denotet valorem expressionis finitae, ex cuius euolutione proposita series nascatur.

I. *Sit igitur proposita haec series Leibnitzii:*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \frac{1}{2}$.

II. *Sit proposita ista series:*

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.$$

Diff. 1 = 1, 1, 1, 1, 1, &c,

Cum ergo sit $a = 1$, $\Delta a = 1$, erit $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

III. *Sit proposita haec series:*

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \&c.$$

Diff. 1 = 2, 2, 2, 2, &c.

Ob $a = 1$ & $\Delta a = 2$ fit $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$.

IV. *Sit propoſita haec ſeries trigonalium numerorum.*

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \&c.$$

Diff. 1 = 2, 3, 4, 5, 6, &c.

Diff. 2 = 1, 1, 1, 1, &c.

Hic ergo ob $a = 1$, $\Delta a = 2$, & $\Delta\Delta a = 1$; erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. *Sit propoſita ſeries quadratorum:*

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \&c.$$

Diff. 1 = 3, 5, 7, 9, 11, &c.

Diff. 2 = 2, 2, 2, 2, &c.

Ob $a = 1$; $\Delta a = 3$; $\Delta\Delta a = 2$; erit $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0.$

VI. *Sit propoſita ſeries biquadratorum:*

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \&c.$$

Diff. 1 = 15, 65, 175, 369, 671

Diff. 2 = 50, 110, 194, 302

Diff. 3 = 60, 84, 108

Diff. 4 = 24, 24

Erit ergo $S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{4} + \tfrac{50}{8} - \tfrac{60}{16} + \tfrac{24}{32} = 0.$

10. Si ſeries magis diuergant vti geometriae aliaeque ſimiles, eae hoc modo ſtatim in ſeriem magis convergentem transmutantur, quae niſi adhuc ſatis conuergat, eodem modo in aliam magis conuergentem convertetur.

I. *Sit*

I. *Sit proposita haec series geometrica:*

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c.$$

Diff. 1 = 1, 2, 4, 8, 16, &c.

Diff. 2 = 1, 2, 4, 8, &c.

Diff. 3 = 1, 2, 4, &c.

Cum igitur in omnibus differentiis primus terminus ſit $= 1$. Summa ſeriei exprimetur hoc modo

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \&c.$$

cuius ſumma eſt $= \frac{1}{3}$, oritur enim ex euolutione fractionis $\frac{1}{2+1}$, dum propoſita oritur ex $\frac{1}{1+2}$.

II. *Sit propoſita haec ſeries recurrens:*

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \&c.$$

Diff. 1 = 1, 3, 7, 17, 41, 99 &c.

Diff. 2 = 2, 4, 10, 24, 58 &c.

Diff. 3 = 2, 6, 14, 34 &c.

Diff. 4 = 4, 8, 20 &c.

Diff. 5 = 4, 12 &c.

Diff. 6 = 8 &c.

&c.

Continuarum ergo differentiarum termini primi conſtituunt hanc progreſſionem geometricam geminatam:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, &c.

vnde erit

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} - \tfrac{2}{16} + \tfrac{4}{32} - \tfrac{4}{64} + \tfrac{8}{128}\ \&c.$$

Oo 2 cum

cum igitur praeter primum terminum reliqui bini se continuo destruant, erit $S = \frac{1}{2}$. Oritur autem series proposita ex euolutione fractionis $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, vti in expressione naturae serierum recurrentium ostendimus.

III. *Sit proposita series hypergeometrica:*

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \&c.$$

cuius differentias continuas hoc modo commodius inuestigabimus:

	Diff. 1.	Diff. 2.	Diff. 3.	
1	1	3	11	
2	4	14	64	
6	18	78	426	
24	96	504	3216	&c.
120	600	3720	27240	
720	4320	30960	256320	
5040	35280	287280	2656080	
40320	322560	2943360		
362880	3265920			
3628800				

Quibus differentiis vlterius continuatis erit:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \frac{16687}{256} + \frac{148329}{512} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} - \frac{190899411}{4096} + \&c.$$

Col-

Colligantur duo termini initiales, eritque $S = \frac{1}{4} + A$ existente

$$A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \&c.$$

Si nunc eodem modo differentiae capiantur, erit

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}}$$
$$- \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \&c.$$

Colligantur duo termini initiales, quia conuergunt, fietque

$$A = \frac{7}{2^6} + B \quad \text{existente} \quad B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \&c.$$

cuius seriei differentiis denuo sumendis fiet:

$$B = \frac{21}{29} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}}$$
$$+ \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \&c.$$

Colligantur quatuor termini initiales in vnum & statuatur $B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C$ existente $C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \&c.$ fietque aliquot terminis actu colligendis proxime:

$C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}$. Ex his ergo tandem concludetur summa seriei propositae: $S = 0,40082038$, quae tamen vix vltra tres quatuorue figuras pro accurata ha-

 beri

beri poteſt ob nimiam feriei diuergentiam; eſt tamen certe iuſto minor. Aliunde enim inueni hanc ſummam eſſe $= 0,4036524077$, vbi ne vltima quidem nota a vero aberrat.

11. Imprimis autem haec transmutatio ingentem affert vtilitatem ad ſeries iam quidem, ſed lente conuergentes in alias, quae multo promtius conuergant, transmutandas. Quoniam vero termini ſequentes minores ſunt quam praecedentes, differentiae primae fiunt negatiuae; vnde in ſequentibus ſignorum ratio probe eſt habenda.

I. *Sit propoſita haec ſeries:*

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2.3};\ -\frac{1}{3.4};\ -\frac{1}{4.5};\ -\frac{1}{5.6}$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{1}{3};\ \frac{2}{2.3.4};\ \frac{2}{3.4.5};\ \frac{2}{4.5.6}$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{1}{4};\ -\frac{2.3}{2.3.4.5};\ -\frac{2.3}{3.4.5.6}$$

$$\text{Diff. } 4 = +\frac{1}{5};\ \&c.$$

Hinc ergo erit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$$

vtramque autem hanc ſeriem logarithmum hyperbolicum binarii exhibere, iam in Introductione oſtendimus.

II. *Sit*

II. *Sit propoſita iſta ſeries pro circulo:*

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11} \ \&c.$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ - \ \&c.$$

&c.

Hinc ergo concluditur fore ſummam ſeriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \&c.$$

ſeu

$$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \&c.$$

III. *Quaeratur valor huius ſeriei infinitae:*

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 \ \&c.$$

Quia differentiae ab initio nimis fiunt inaequales, colligantur actu termini vsque ad $l10$ ex tabulis, quorum valor reperietur $= -0,3911005$; eritque

$$S = -0,3911005 + l10 - l11 + l12 - l13 + l14 - l15 + \&c.$$

in infinitum.

De

Desumantur hi logarithmi ex tabulis, eorumque differentiae quaerantur hoc modo

	Diff.1.	Diff.2.	Diff.3.	Diff.4.	Diff.5.
$l10 = 1,0000000$	+	−	+	−	+
$l11 = 1,0413927$	413927	36042			
$l12 = 1,0791812$	377885	30263	5779	1292	
$l13 = 1,1139434$	347622	25776	4487	924	368
$l14 = 1,1461280$	321846	22213	3563		
$l15 = 1,1760913$	299633				

Ex quibus reperitur

$$l10 - l11 + l12 - l13 + \&c. =$$

$$\frac{1,0000000}{2} - \frac{413927}{4} - \frac{36042}{8} - \frac{5779}{16} - \frac{1292}{32} - \frac{368}{64}$$

$$= 0,4891606.$$

Hinc valor seriei propositae erit

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + \&c. = 0,0980601;$$

cui logarithmo respondet numerus $1,253315$.

12. Quemadmodum has transmutationes obtinuimus ponendo in serie loco x hanc fractionem $\frac{y}{1 \pm y}$, ita innumerabiles aliae transmutationes oriuntur, si loco x aliae functiones ipsius y substituantur. Sit iterum proposita ista series:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

atque ponatur $x = y(1 - y)$, quo facto series orietur sequens

S =

$$S = ay - ayy$$
$$+ byy - 2by^2 + by^4$$
$$+ cy^3 - 3cy^4 + 3cy^5 - cy^6$$
$$+ dy^4 - 4dy^5 + 6dy^6$$
$$+ ey^5 - 5ey^6 \quad \&c.$$
$$+ fy^6$$

Quodſi ergo altera harum ſerierum fuerit ſummabilis, ſimul alterius ſumma erit cognita. Ita ſi ſtatuatur

$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c. = \frac{x}{1-x}$, erit

$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \&c.$

Cuius ergo feriei ſumma erit $= \frac{y - yy}{1 - y + yy}$.

13. Si altera ſeries alicubi abrumpatur, tum ſumma prioris abſolute exhiberi poterit. Ponamus eſſe $a = 1$, & in ſerie inuenta omnes terminos poſt primum euaneſcere, vt ſit $S = y$; ideoque ob $x = y - yy$, erit ſumma prioris $= \frac{1}{2} - V(\frac{1}{4} - x)$.

Fiet autem ob $a = 1$; vt ſequitur:

$$b = 1 = \frac{1}{4} . 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1.3}{4.6} . 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1.3.5}{4.6.8} . 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12} 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1.3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12.14} 2^{12} \quad \&c.$$

vnde prior ſeries abibit in hanc: $S =$
$\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \&c.$
quae eadem inuenitur, ſi quantitas ſurda $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ in ſeriem euoluatur, atque ab $\frac{1}{2}$ ſubtrahatur.

14. Statuamus, quo transmutatio latius pateat $x = y(1+ny)^{\nu}$, atque ſeries propoſita:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

transmutabitur in ſequentem:

$$\begin{aligned} S = ay &+ \tfrac{\nu}{1} nay^2 + \tfrac{\nu(\nu-1)}{1.\,2} n^2ay^3 + \tfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.\,2.\,3} n^3ay^4 + \tfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\,2.\,3.\,4} n^4ay^5 \\ &+ by^2 + \tfrac{2\nu}{1} nby^3 + \tfrac{2\nu(2\nu-1)}{1.\,2} n^2by^4 + \tfrac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)}{1.\,2.\,3} n^3by^5 \\ &+ cy^3 + \tfrac{3\nu}{1} ncy^4 + \tfrac{3\nu(3\nu-1)}{1.\,2} n^2cy^5 \\ &+ dy^4 + \tfrac{4\nu}{1} ndy^5 \\ &+ ey^5 \\ &\&c. \end{aligned}$$

Si ergo illius ſeriei ſumma fuerit cognita, & huius ſimul ſumma habebitur, ac viciſſim. Quoniam vero n & ν pro lubitu accipi poſſunt, hinc ex vna ſerie ſummabili innumerae aliae ſummabiles inueniri poſſunt.

15. Poſſunt etiam eiusmodi transmutationes fieri, vt ſeriei inuentae ſumma fiat irrationalis, hoc modo.

Sit

Sit proposita ista series:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \&c.$$

erit

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \&c.$$

Iam statuatur

$$x = \frac{y}{\sqrt{(1-nyy)}}; \quad \text{erit} \quad xx = \frac{y}{1-nyy},$$

atque series proposita transmutabitur in hanc:

$$\frac{Sy}{\sqrt{(1-nyy)}} =$$

$$\begin{array}{l} ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \&c. \\ \quad + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \&c. \\ \quad\quad + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \&c. \\ \quad\quad\quad + dy^8 + 4ndy^{10} + \&c. \\ \quad\quad\quad\quad + ey^{10} + \&c. \end{array}$$

Si igitur summa S ex priori serie fuerit cognita, habebitur simul summa sequentis seriei:

$$\frac{S}{\sqrt{(1-nyy)}} =$$

$$ay + (na+b)y^3 + (n^2a+2nb+c)y^5 + (n^3a+3n^2b+3nc+d)y^7 + \&c.$$

16. Si sumatur $n = -1$; erunt coefficientes huius seriei differentiae continuae ipsius a, ex serie $a, b, c, d,$ &c. sin autem signa in serie proposita alternentur, tum posito $n = 1$, coefficientes erunt istae differentiae. Denotent ergo $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a, \Delta^4 a,$ &c.

 diffe-

differentias primas, secundas, tertias, &c. ipsius a ex serie numerorum $a, b, c, d, e, f,$ &c.

Ac si fuerit:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \&c.$$

posito $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1+yy)}} = ay + \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 + \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Sin autem fuerit:

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \&c.$$

ponaturque $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$; erit

$$\frac{S}{\sqrt{(1-yy)}} = ay - \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 - \Delta^3 a.y^7 + \&c.$$

Quodsi ergo series $a, b, c, d, e,$ &c. tandem ad differentias constantes deducat, tum vtraque series absolute summari poterit; quae summatio autem quoque ex superioribus sequitur.

17. Ponamus coefficientes $a, b, c, d,$ &c. constituere hanc seriem $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9},$ &c. eritque, vti supra iam vidimus:

$$a = 1$$

$$\Delta a = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta^2 a = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\Delta^3 a = -\frac{2.4.6}{3.5.7} \quad \&c.$$

vnde

vnde sequentes duas series summabimus:

I. Sit $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x}$. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$, fiet

$$S = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{(1+yy)}+y}{\sqrt{(1+yy)}-y} = l(\sqrt{(1+yy)}+y):$$

vnde erit

$$\frac{l(\sqrt{(1+yy)}+y)}{\sqrt{(1+yy)}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

II. Sit $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$

Erit $S = A$ tang x. Posito iam $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$, fiet

$$S = A \text{ tang } \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}} = A \sin y = A \cos \sqrt{(1-yy)}.$$

Hancobrem obtinebitur ista summatio:

$$\frac{A \sin y}{\sqrt{(1-yy)}} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \&c.$$

18. Possimt quoque loco x functiones transcendentes ipsius y substitui, sicque summationes aliae inuentu difficiliores erui; verumtamen ne series nouae fiant nimis perplexae, eiusmodi functiones eligi debent, quarum potestates facile exhiberi queant; quales sunt quantitates exponentiales e^y. Proposita igitur hac serie:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \&c.$$

ponatur $x = e^{ny}y$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

erit $x^2 = e^{2ny}y^2$; $x^3 = e^{3ny}y^3$; &c.

Generaliter vero eſt, vti conſtat:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Quare ſeries propoſita in hanc transmutabitur:

$$\begin{aligned} S = ay &+ 1nay^2 + \tfrac{1}{2}n^2ay^3 + \tfrac{1}{6}n^3ay^4 + \tfrac{1}{24}n^4ay^5 + \&c. \\ &+ by^2 + \tfrac{2}{1}nby^2 + \tfrac{4}{2}n^2by^4 + \tfrac{8}{6}n^3by^5 + \&c. \\ &+ cy^3 + \tfrac{3}{1}ncy^4 + \tfrac{9}{2}n^2cy^5 + \&c. \\ &+ dy^4 + \tfrac{4}{1}ndy^5 + \&c. \\ &+ ey^5 + \&c. \end{aligned}$$

I. Sit ſeries propoſita geometrica:

$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$ erit $S = \frac{x}{1 - x}$.

Ponatur iam

$n = -1$; vt ſit $x = e^{-y}y$; & $S = \frac{e^{-y}y}{1 - e^{-y}y} = \frac{y}{e^y - y}$;

reperietur ſumma haec:

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{5}{24}y^5 + \frac{19}{120}y^6 - \&c.$$

cuius autem ſeriei lex non perſpicitur.

II. Sint in altera ſerie omnes termini praeter primum $= 0$; erit $b = -na$; $c = \frac{3}{2}n^2a$; $d = -\frac{8}{3}n^3a$;

$e = \frac{125}{24}n^4a$; $f = -\frac{29}{30}n^5a$; &c.

Cum

Cum ergo sit summa $S = ay$; & $x = e^{ny}$; fiet:

$$y = x - nx^2 + \frac{3}{2}n^2x^3 - \frac{8}{3}n^3x^4 + \frac{125}{24}n^4x^5$$

$$- \frac{29}{30}n^5x^6 + \&c.$$

Quoniam vero in his seriebus lex progressionis non est manifesta, summationes ex hac substitutione deductae parum habent vtilitatis. Praecipue autem notari merentur transformationes ex substitutione $x = \frac{y}{1 \pm y}$ deriuatae, quippe quae non solum eximias summationes, sed etiam idoneos modos ad summas serierum appropinquandi suppeditant. His ergo, quae sine calculi differentialis ope sunt expedita, praemissis, ad ipsum huius calculi vsum in doctrina serierum ostendendum progrediamur.

CAPUT

CAPUT II.

DE INUESTIGATIONE SERIERUM SUMMABILIUM.

19.

Si Seriei, in cuius terminis ineſt quantitas indeterminata x, ſumma fuerit cognita, quae vtique erit functio ipſius x; tum quicunque valor ipſi x tribuatur, ſeriei ſumma perpetuo aſſignari poterit. Quare ſi loco x ponatur $x + dx$, ſeriei reſultantis ſumma erit aequalis ſummae prioris, vna cum ipſius differentiali: vnde ſequitur fore differentiale ſummae $=$ differentiali ſeriei. Quia vero hoc modo tam ſumma, quam ſinguli ſeriei termini multiplicati erunt per dx, ſi vbique per dx diuidatur, habebitur noua ſeries, cuius ſumma erit cognita. Simili modo ſi haec ſeries cum ſua ſumma denuo differentietur, & vbique per dx diuidatur, noua exoritur ſeries cum ſua ſumma: ſicque ex vna ſerie ſummabili quantitatem indeterminatam x inuoluente, per continuam differentiationem innumerae nouae ſeries pariter ſummabiles elicientur.

20. Quo haec clarius perſpiciantur, propoſita ſit progreſſio geometrica indeterminata, quippe cuius ſumma eſt cognita, haec:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c.$$

Si

Si nunc differentiatio instituatur, erit:

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2xdx + 3x^2dx + 4x^3dx + 5x^4dx + \&c.$$

atque diuisione per dx instituta, habebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c.$$

Si denuo differentietur, atque per dx diuidatur, prodibit:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \&c.$$

seu

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \&c.$$

vbi coefficientes sunt numeri trigonales. Si haec porro differentietur, atque per $3dx$ diuidatur, obtinebitur:

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c.$$

cuius coefficientes sunt numeri pyramidales primi. Sicque vlterius procedendo oriuntur eaedem series quas ex euolutione fractionis $\frac{1}{(1-x)^n}$ nasci constat.

21. Latius autem patebit haec serierum inuestigatio, si antequam quaeuis differentiatio suscipiatur, ipsa series vna cum summa per quamuis ipsius x potestatem seu functionem multiplicetur. Sic cum sit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

multiplicetur vbique per x^m, eritque

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \&c.$$

nunc differentietur haec ſeries, fietque per dx diuiſo:

$$\frac{mx^{m-1}-(m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1}+(m+1)x^m$$
$$+(m+2)x^{m+1}+(m+3)x^{m+2}+\&c.$$

Diuidatur nunc per x^{m-1}, habebitur:

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2} = m+(m+1)x$$
$$+(m+2)x^2+\&c.$$

multiplicetur haec antequam noua differentiatio ſuſcipiatur per x^n, vt ſit

$$\frac{mx^n}{1-x}+\frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n+(m+1)x^{n+1}+(m+2)x^{n+2}+\&c.$$

Nunc inſtituatur differentiatio, & diuiſo per dx erit:

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x}+\frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2}+\frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mnx^{n-1}$$
$$+(m+1)(n+1)x^n+(m+2)(n+2)x^{n+1}+\&c.$$

Diuiſione autem per x^{n-1} inſtituta, fiet:

$$\frac{mn}{1-x}+\frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2}+\frac{2xx}{(1-x)^3} =$$
$$mn+(m+1)(n+1)x+(m+2)(n+2)x^2+\&c.$$

ſicque vlterius progredi licebit: inuenientur autem perpetuo eaedem ſeries, quae ex euolutione fractionum ſummam conſtituentium naſcuntur.

22. Quoniam progreſſionis geometricae primum aſſumtae ſumma ad quemuis terminum vsque aſſignari po-

poteſt, hoc modo quoque ſeries definito terminorum numero conſtantes ſummabuntur. Ita cum ſit

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$$

erit differentiatione inſtituta & terminis per dx diuiſis:

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$$

Hinc ſummae poteſtatum numerorum naturalium ad quemuis terminum inueniri poterunt. Multiplicetur enim haec ſeries per x, vt fiat:

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$$

quae denuo differentiata ac per dx diuiſa dabit:

$$\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2nn+2n-1)x^{n+1}-nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

quae per x multiplicata dabit:

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$$

quae differentiata, per dx diuiſa ac per x multiplicata producet ſeriem hanc:

$$x + 8x^2 + 27x^3 + \cdots + n^3x^n$$

cuius ſumma propterea inuenietur. Ex hacque ſimili modo ſumma biquadratorum altiorumque poteſtatum indefinita eruetur.

23. Methodus igitur haec ad omnes series quantitatem indeterminatam continentes accommodari potest, quarum quidem summae constant. Cum igitur praeter geometricas series recurrentes omnes eadem praerogatiua gaudeant, vt non solum in infinitum, sed etiam ad quemuis terminum summari queant; ex iis quoque hac methodo innumerae aliae series summabiles inueniri poterunt. Quod cum opus foret maxime diffusum, si id persequi vellemus, vnicum casum perpendamus.

Sit scilicet proposita haec series:

$$\frac{x}{1-x-xx} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \&c.$$

quae differentiata ac per dx diuisa dabit:

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 25x^4 + 48x^5 + 91x^6 + \&c.$$

Facile autem patet omnes has series hoc modo resultantes fore quoque recurrentes, quarum adeo summae ex ipsarum natura inueniri poterunt.

24. In genere igitur si seriei cuiuspiam in hac forma contentae: $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c.$ summa fuerit cognita, quam ponamus $= S$, eiusdem seriei, si singuli termini singulatim per terminos progressionis arithmeticae multiplicentur, summa inueniri poterit.

Sit enim

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$$

multiplicetur per x^m, erit

$$Sx^m = ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \&c.$$

dif-

differentietur haec aequatio, & diuidatur per dx:

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \&c.$$

diuidatur per x^{m-1}, eritque

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

Quodsi ergo huius sequentis seriei summa desideretur:

$$\alpha ax + (\alpha + \beta)bx^2 + (\alpha + 2\beta)cx^3 + (\alpha + 3\beta)dx^4 + \&c.$$

multiplicetur superior per β ac statuatur $m\beta + \beta = \alpha$ vt sit $m = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$; eritque huius seriei summa

$$= (\alpha - \beta)S + \frac{\beta x dS}{dx}.$$

25. Poterit etiam huius seriei propositae summa inueniri, si singuli eius termini multiplicentur per terminos seriei secundi ordinis singulatim, cuius scilicet differentiae demum secundae sint constantes. Quoniam enim iam inuenimus.

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \&c.$$

multiplicetur per x^n, vt sit

$$mSx^n + \frac{x^{n+1}dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + \&c.$$

differentietur posito dx constante, & per dx diuidatur:

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1}ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \&c.$$

Diuidatur per x^{n-1}, ac multiplicatur per k, vt fit:

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kx\,dS}{dx} + \frac{kx^2 ddS}{dx^2} =$$

$$(m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)cx^3 + \&c.$$

Comparetur nunc haec feries cum ifta:

erit:	Diff. 1.	Diff. 2.
$kmn + km + kn + k = \alpha$		
$kmn + 2km + 2kn + 4k = \alpha + \beta$	$km + kn + 3k = \beta$	
$kmn + 3km + 3kn + 9k = \alpha + 2\beta + \gamma$	$km + kn + 5k = \beta + \gamma$	$2k = \gamma$

Ergo $k = \frac{1}{2}\gamma$; & $m + n = \frac{2\beta}{\gamma} - 3$; atque

$$mn = \frac{\alpha}{k} - m - n - 1 = \frac{2\alpha}{\gamma} - \frac{2\beta}{\gamma} + 2 = \frac{2(\alpha - \beta + \gamma)}{\gamma}.$$

Hinc fumma feriei quaefita erit:

$$(\alpha - \beta + \gamma)S + \frac{(\beta - \gamma)x\,dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2}.$$

26. Simili modo fumma reperiri poterit feriei huius

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

fi quidem cognita fuerit fumma S feriei huius:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

atque A, B, C, D, &c. conftituant feriem, quae ad differentias conftantes deducitur. Fingatur enim fumma, quoniam eius forma ex antecedentibus colligitur, haec

$$\alpha S + \frac{\beta x\,dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} + \frac{\epsilon x^4 d^4S}{24dx^4} + \&c.$$

Nunc

Nunc ad litteras α, β, γ, δ, &c. inueniendas euoluantur singulae series, eritque:

$$\alpha S = \alpha a + \alpha b x + \alpha c x^2 + \alpha d x^3 + \alpha e x^4 + \&c.$$

$$\frac{\beta x dS}{dx} = \beta b x + 2\beta c x^2 + 3\beta d x^3 + 4\beta e x^4 + \&c.$$

$$\frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} = \gamma c x^2 + 3\gamma d x^3 + 6\gamma e x^4 + \&c.$$

$$\frac{\delta x^3 d^3 S}{6dx^3} = \delta d x^3 + 4\delta e x^4 + \&c.$$

$$\frac{\epsilon x^4 d^4 S}{24 dx^4} = \epsilon e x^4 + \&c.$$

quae simul sumtae comparentur cum proposita:

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

fietque comparatione singulorum terminorum instituta:

$$\alpha = A$$
$$\beta = B - \alpha = B - A$$
$$\gamma = C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A$$
$$\delta = D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A$$
&c.

His igitur valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$Z = AS + \frac{(B-A)xdS}{1\,dx} + \frac{(C-2B+A)x^2 ddS}{1.2\,dx^2} + \frac{(D-3C+3B-A)x^3 d^3S}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

seu si seriei A, B, C, D, E, &c. differentiae continuae more consueto indicentur, erit

Z =

$$Z = AS + \frac{\Delta A.x dS}{1\, dx} + \frac{\Delta^2 A.x^2 d^2 S}{1.2\, dx^2} + \frac{\Delta^3 A.x^3 d^3 S}{1.2.3\, dx^3} + \&c.$$

si quidem fuerit vti assumsimus:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

Si ergo series A, B, C, D, &c. tandem habeat differentias constantes, summa seriei Z finite exprimi poterit.

27. Quia sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, est:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

sumatur haec series pro priori, & cum sit

$$S = e^x \quad \text{erit}$$

$$\frac{dS}{dx} = e^x$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = e^x \quad \&c.$$

Quare huius seriei, quae ex illa & hac A, B, C, D, &c. componitur:

$$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

summa hoc modo exprimetur:

$$e^x \left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{xx\Delta^2 A}{1.2} + \frac{x^3 \Delta^3 A}{1.2.3} + \frac{x^4 \Delta^4 A}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

Sic si proponatur haec series:

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Ob

Ob feriem A, B, C, D, E, &c.

erit $A = 2, \quad 5, \quad 10, \quad 17, \quad 26$ &c.

$\Delta A = \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9,$ &c.

$\Delta^2 A = \quad 2, \quad 2, \quad 2$ &c.

erit huius ferei:

$$2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

fumma $= e^x(2 + 3x + xx) = e^x(1+x)(2+x)$: quod quidem fponte patet. Eft enim

$$2e^x = 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \&c.$$

$$3xe^x = \quad 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \&c.$$

$$xxe^x = \quad xx + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \&c.$$

$$e^x(2+3x+xx) = 2+5x+\frac{10xx}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \&c.$$

28. Quae hactenus funt tradita non folum ad feries in infinitum excurrentes fpectant, fed etiam ad fummas quotcunque terminorum: coefficientes enim a, b, c, d, &c. vel in infinitum progredi, vel vbicunque libuerit abrumpi poffunt. Verum cum hoc non egeat vberiori explicatione, quae ex hactenus allatis fequuntur, accuratius perpendamus. Propofita ergo quacunque ferie, cuius finguli termini duobus conftent factoribus, quorum alteri feriem ad differentias conftantes deducen-

tem constituant, huius seriei summa poterit assignari; dummodo omissis istis factoribus, series fuerit summabilis. Scilicet si proposita sit ista series

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \&c.$$

in qua quantitates A, B, C, D, E, &c. eiusmodi seriem constituant, quae tandem ad differentias constantes perducatur; tum istius seriei summa exhiberi poterit, dummodo habeatur summa S huius seriei

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

Sumtis enim ex progressione A, B, C, D, E, &c. differentiis continuis, vti initio huius libri ostendimus:

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F \quad \&c. \\ \Delta A, & \Delta B, & \Delta C, & \Delta D, & \Delta E & \&c. \\ \Delta^2 A, & \Delta^2 B, & \Delta^2 C, & \Delta^2 D & \&c. & \\ \Delta^3 A, & \Delta^3 B, & \Delta^3 C & \&c. & & \\ \Delta^4 A, & \Delta^4 B, & \&c. & & & \\ \Delta^5 A, & \&c. & & & & \\ \&c. & & & & & \end{array}$$

erit seriei propositae summa:

$$Z = SA + \frac{xdS}{1\,dx}\Delta A + \frac{x^2 ddS}{1.2\,dx^2}\Delta^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3}\Delta^3 A + \&c.$$

posito in altioribus ipsius S differentialibus dx constante.

29. Si igitur series A, B, C, D, &c. nunquam ad differentias constantes deducat, summa seriei Z per nouam seriem infinitam exprimetur, quae interdum magis

gis conuerget quam proposita; sicque ista series in aliam sibi aequalem transformabitur. Sit ad hoc declarandum proposita haec series:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \&c.$$

quam constat exprimere $l\frac{1}{1-y}$, ita vt sit $Y = -l(1-y)$. Diuidatur haec series per y, & statuatur $y = x$, & $Y = yZ$, vt sit $Z = -\frac{1}{y}l(1-y) = -\frac{1}{x}l(1-x)$, erit

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \&c.$$

quae comparata cum ista:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \&c. = \frac{1}{1-x},$$

dabit pro serie A, B, C, D, E, &c. hos valores:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{1.2},\quad -\frac{1}{2.3},\quad -\frac{1}{3.4},\quad -\frac{1}{4.5}$$

$$\frac{1.2}{1.2.3},\quad \frac{1.2}{2.3.4},\quad \frac{1.2}{3.4.5}$$

$$-\frac{1.2.3}{1.2.3.4},\quad -\frac{1.2.3}{2.3.4.5}$$

&c.

Erit ergo $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{2}$; $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$; $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$ &c.

 Porro

Porro cum sit $S = \frac{1}{1-x}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$$

&c.

Quibus valoribus substitutis orietur summa: $Z =$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5} + \&c.$$

Cum ergo sit $x = y$, & $Y = -l(1-y) = yZ$; erit

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4} + \&c.$$

quae series vtique exprimit

$$l\left(1+\frac{y}{1-y}\right) = l\frac{1}{1-y} = -l(1-y),$$

cuius adeo veritas per ante demonstrata constat.

30. Proposita nunc sit ista series, vt etiam vsus pateat, si potestates tantum impares occurrant, & signa alternentur.

$$Y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \&c.$$

ex qua constat esse $Y = A\,\mathrm{tang}\,y$.

Di-

Diuidatur haec feriei per y, & ponatur $\frac{Y}{y} = Z$,

& $yy = x$; erit:

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quae fi comparetur cum ifta:

$S = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - \&c.$ fiet $S = \frac{1}{1+x}$, & feries coefficientium A, B, C, D, &c. fiet:

$$A = 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9}\ \&c.$$

$$\Delta A = -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9}$$

$$\Delta^2 A = \frac{2.4}{3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9}$$

$$\Delta^3 A = -\frac{2.4.6}{3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9}$$

$$\Delta^4 A = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$$

&c.

At cum fit $S = \frac{1}{1+x}$; erit

$$\frac{dS}{1dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{ddS}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = -\frac{1}{(1+x)^4}\ \&c.$$

 Qua-

Quare substitutis his valoribus fiet forma $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2.4x^2}{3.5(1+x)^3} + \frac{2.4.6x^3}{3.5.7(1+x)^4} + \&c.$$

Restituto ergo $x = yy$; & per y multiplicato fiet:

$$Y = A \tang y =$$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2.4y^5}{3.5(1+yy)^3} + \frac{2.4.6y^7}{3.5.7(1+yy)^4} + \&c.$$

31. Potest quoque superior series, qua arcus circuli per tangentem exprimitur, alio modo transmutari, eam comparando cum serie logarithmica.

Consideremus nempe seriem

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \&c.$$

quam comparemus cum hac:

$$S = \frac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \&c.$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x),$$

atque valores litterarum A, B, C, D, &c. erunt

$$A = \frac{0}{1};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{8}{9};\ \&c.$$

$$\Delta A = \frac{2}{3};\ \frac{+2}{3.5};\ \frac{+2}{5.7};\ \frac{+2}{7.9};\ \&c.$$

$$\Delta^2 A = \frac{-2.4}{3.5};\ \frac{-2.4}{3.5.7};\ \frac{-2.4}{5.7.9};\ \&c.$$

$$\Delta^3 A = \frac{2.4.6}{3.5.7};\ \&c.$$

De

Deinde cum sit $S = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} l(1+x)$; erit

$$\frac{dS}{1.dx} = - \frac{1}{2(1+x)}$$
$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = + \frac{1}{4(1+x)^2}$$
$$\frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} = - \frac{1}{6(1+x)^3}$$
$$\frac{d^4S}{1.2.3.4\,dx^3} = \frac{1}{8(1+x)^4}$$
&c.

Erit igitur $SA = S.\frac{0}{1} = 1$: & ex reliquis fiet:

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3.5(1+x)^2} - \frac{2.4x^3}{3.5.7(1+x)^3} - \&c.$$

Ponatur nunc $x = yy$, & multiplicetur per y fiet:

$$Y = A \operatorname{tang} y =$$
$$y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3.5(1+yy)^2} - \frac{2.4y^7}{3.5.7(1+yy)^3} - \&c.$$

Haec ergo transmutatio non impediebatur termino infinito $\frac{1}{0}$, qui in seriem S ingrediebatur. Sin autem cui superfit dubium, is tantum singulos terminos praeter primum secundum potestates ipsius y in series resoluat, atque deprehendet actu seriem primum propositam resultare.

32.

32. Hactenus eiusmodi tantum series sumus contemplati, in quibus omnes potestates variabilis occurrunt. Nunc igitur ad alias series progrediamur, quae in singulis terminis eandem potestatem ipsius variabilis complectantur, cuiusmodi est haec:

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \&c.$$

Huius enim seriei si summa S fuerit, cognita ac per functionem quampiam ipsius x exprimatur, erit differentiando ac per $-dx$ diuidendo:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \&c.$$

Si haec vlterius differentietur, atque per $-2dx$ diuidatur, cognoscetur series cuborum:

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \&c.$$

haecque denuo differentiata, atque per $-3dx$ diuisa dabit:

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \&c.$$

Similique modo omnium sequentium potestatum summae reperientur, dummodo summa seriei primae fuerit cognita.

33. Huiusmodi autem series fractionum quantitatem indeterminatam inuoluentes supra in introductione elicuimus, vbi ostendimus, si circuli, cuius radius $=1$, semiperipheria statuatur $=\pi$; fore

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

Cum igitur pro m & n numeros quoscunque assumere liceat, statuamus $n = 1$, & $m = x$; vt obtineamus series illi quam in §. praec. proposueramus similes; hoc facto erit:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c.$$

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

Per differentiationes ergo summae quarumuis potestatum ex his fractionibus oriundarum exhiberi poterunt.

34. Consideremus seriem priorem, sitque breuitatis gratia $\frac{\pi}{\sin \pi x} = S$, cuius differentialia altiora capiantur posito dx constante: eritque

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \&c.$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \&c.$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \&c.$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \&c.$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \&c.$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \&c.$$

&c.

vbi notandum eſt in poteſtatibus paribus ſigna eandem ſequi legem, pariterque in imparibus eandem legem ſignorum obſeruari. Omnium ergo iſtarum ſerierum ſummae inuenientur ex differentialibus expreſſionis

$$S = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

35. Ad Differentialia haec ſimplicius exprimenda ponamus $\sin \pi x = p$ & $\cos \pi x = q$, erit $dp = \pi dx \cos \pi x = \pi q dx$, & $dq = \pi p dx$; Cum ergo ſit

S =

$$\mathrm{S} = \frac{\pi}{p} \quad \text{erit}$$

$$\frac{-d\mathrm{S}}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp}$$

$$\frac{dd\mathrm{S}}{dx^2} = \frac{\pi^3 (pp + 2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3 (qq + 1)}{p^3} \quad \text{ob } pp + qq = 1$$

$$\frac{-d^3\mathrm{S}}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4} \right) = \frac{\pi^4 (q^3 + 5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4\mathrm{S}}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^5 (q^4 + 18q^2 + 5)}{p^5}.$$

$$\frac{-d^5\mathrm{S}}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^6 (q^5 + 58q^3 + 61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6\mathrm{S}}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^7 (q^6 + 179q^4 + 479q^2 + 61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7\mathrm{S}}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2} \right)$$

$$\text{vel} = \frac{\pi^8}{p^8} (q^7 + 543q^5 + 3111q^3 + 1385q)$$

$$\frac{d^8\mathrm{S}}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^2}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p} \right)$$

&c.

 Quae

Quae expressiones facile vlterius quousque libuerit continuari possunt, si enim fuerit:

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n}=\pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^n}{p^{n+1}}+\frac{\beta q^{n-2}}{p^{n-1}}+\frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}}+\frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}}+\text{\&c.}\right)$$

erit differentiale sequens signis mutatis:

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}}=\pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^{n+1}}{p^{n+2}}\begin{matrix}+n\alpha\\+(n-1)\beta\end{matrix}\Big\}\frac{q^{n-1}}{p^n}\begin{matrix}+(n-2)\beta\\+(n-3)\gamma\end{matrix}\Big\}\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}}\begin{matrix}+(n-4)\gamma\\+(n-5)\delta\end{matrix}\Big\}\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}}\text{\&c.}\right)$$

36. Ex his ergo obtinebuntur summae serierum superiorum §. 34. exhibitarum sequentes:

$$S=\pi.\frac{1}{p}$$

$$\frac{-dS}{dx}=\frac{\pi^2}{1}.\frac{q}{p^2}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2}=\frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3}+\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3}=\frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4}+\frac{5q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4}=\frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5}+\frac{28q^2}{p^3}+\frac{5}{p}\right)$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5}=\frac{\pi^6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6}+\frac{180q^3}{p^4}+\frac{61q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^6S}{720dx^6}=\frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7}+\frac{1320q^4}{p^6}+\frac{662q^4}{p^3}+\frac{61}{p}\right)$$

$$\frac{-d^7S}{5040dx^7}=\frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8}+\frac{10920q^5}{p^6}+\frac{7266q^3}{p^4}+\frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8S}{40320dx^8}=\frac{\pi^9}{40320}\left(\frac{40320q^8}{p^9}+\frac{100800q^6}{p^7}+\frac{83664q}{p^5}+\frac{24568q^2}{p^3}+\frac{1385}{p}\right)$$

&c.

37.

37. Tractemus simili modo alteram seriem supra inuentam:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

atque posito breuitatis ergo $\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = T$, orientur sequentes summationes:

$$T = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \&c.$$

$$\frac{-dT}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \&c.$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \&c.$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \&c.$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} - \&c.$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} + \&c.$$

&c.

vbi in potestatibus paribus omnes termini sunt affirmatiui, in imparibus autem signa + & — alternatim se excipiunt.

38. Quo differentialium horum valores innotescant, ponamus vt ante $\sin\pi x = p$ & $\cos\pi x = q$, vt sit $pp+qq=1$; erit $dp = \pi q dx$ & $dq = -\pi p dx$.

Quibus valoribus adhibitis erit:

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2 \left(\frac{qq}{pp} + 1\right) = \frac{\pi^2}{pp}$$

$$\frac{ddT}{dx^2} = \pi^3 \left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p}\right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2\right) = \pi^4 \left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^3}{p^5} + \frac{16q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3}\right)$$

&c.

Quae formulae facile vlterius quousque libuerit continuari possunt. Si enim sit

$$\pm \frac{d^nT}{dx^n} = \pi^{n+1} \left(\frac{\alpha q^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-3}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-5}} + \&c.\right)$$

erit expressio sequens:

$$\mp \frac{d^{n+1}T}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2} \left(\frac{(n+1)\alpha q^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(\alpha+\beta)q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(\beta+\gamma)q^{n-4}}{p^{n-2}} + \&c.\right)$$

39. Series ergo poteſtatum §. 37. datae ſequentes habebunt ſummas poſito $\sin\pi x = p$ & $\cos\pi x = q$.

$$T = \pi.\frac{q}{p}$$
$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\frac{1}{pp}$$
$$\frac{ddT}{2dx^2} = \pi^3.\frac{q}{p^3}$$
$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \pi^4\left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp}\right)$$
$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \pi^5\left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3}\right)$$
$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \pi^6\left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp}\right)$$
$$\frac{d^6T}{720dx^6} = \pi^7\left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^6} + \frac{17q}{45p^3}\right)$$
$$\frac{-d^7T}{5040dx^7} = \pi^8\left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11q^2}{15p^4} + \frac{17}{315pp}\right)$$
$$\frac{d^8T}{40320dx^8} = \pi^9\left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3}\right)$$
&c.

40. Praeter has ſeries inuenimus in introductione nonnullas alias, ex quibus ſimili modo per differentiationes nouae elici poſſunt. Oſtendimus enim eſſe:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\pi\sqrt{x}}{2x\,\text{tang}\,\pi\sqrt{x}} =$$
$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x} + \frac{1}{25-x} + \&c.$$

Po-

Ponamus ſummam huius ſeriei eſſe $= S$,

vt ſit $S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi\sqrt{x}}{\sin \pi\sqrt{x}}$, erit

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos \pi\sqrt{x}}{\sin \pi\sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\sin \pi\sqrt{x})^2},$$

quae ergo expreſſio praebet ſummam huius ſeriei:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \&c.$$

Deinde quoque oſtendimus eſſe:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{1}{2x} =$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \&c.$$

Quodſi ergo haec ſumma ponatur $= S$, erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \&c.$$

At eſt

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} + \frac{1}{2xx}.$$

Ergo ſumma huius ſeriei erit:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Similique modo vlterioribus differentiationibus ſummae ſequentium poteſtatum inuenientur.

41. Si cognitus fuerit valor producti cuiuspiam ex factoribus indeterminatam litteram inuoluentibus compo-

siti, ex eo per eandem methodum innumerabiles series summabiles inueniri poterunt. Sit enim huius producti

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\epsilon x) \text{ \&c.}$$

valor $= S$, functioni scilicet cuiuspiam ipsius x, erit logarithmis sumendis:

$$lS = l(1+\alpha x) + l(1+\beta x) + l(1+\gamma x) + l(1+\delta x) + \text{\&c.}$$

Sumantur iam differentialia, erit diuisione per dx instituta:

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \text{\&c.}$$

ex cuius vlteriori differentiatione summae potestatum quarumuis istarum fractionum reperietur; plane vti in exemplis praecedentibus fusius exposuimus.

42. Exhibuimus autem in introductione nonnullas istiusmodi expressiones, ad quas hanc methodum accommodemus. Scilicet si sit π arcus $180°$ circuli, cuius radius $= 1$, ostendimus esse:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \cdot \frac{4nn - mm}{4nn} \cdot \frac{16nn - mm}{16nn} \cdot \frac{36nn - mm}{36nn} \text{ \&c.}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{nn - mm}{nn} \cdot \frac{9nn - mm}{9nn} \cdot \frac{25nn - mm}{25nn} \cdot \frac{49nn - mm}{49nn} \text{ \&c.}$$

Ponamus $n = 1$ & $m = 2x$; vt sit

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \frac{1 - xx}{1} \cdot \frac{4 - xx}{4} \cdot \frac{9 - xx}{9} \cdot \frac{16 - xx}{16} \cdot \text{\&c.} \quad \text{vel}$$

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \frac{1-x}{1} \cdot \frac{1+x}{1} \cdot \frac{2-x}{2} \cdot \frac{2+x}{2} \cdot \frac{3-x}{3} \cdot \frac{3+x}{3} \cdot \frac{4-x}{4} \cdot \text{\&c.} \quad \&$$

 cos

$$\cos\pi x = \frac{1-4xx}{1} \cdot \frac{9-4xx}{9} \cdot \frac{25-4xx}{25} \cdot \frac{49-4xx}{49} \cdot \&c. \quad \text{seu}$$

$$\cos\pi x = \frac{1-2x}{1} \cdot \frac{1+2x}{1} \cdot \frac{3-2x}{3} \cdot \frac{3+2x}{3} \cdot \frac{5-2x}{5} \cdot \frac{5+2x}{5} \cdot \&c.$$

Ex his ergo expressionibus, si logarithmi sumantur, erit:

$$l\sin\pi x = l\pi x + l\frac{1-x}{1} + l\frac{1+x}{1} + l\frac{2-x}{2} + l\frac{2+x}{2} + l\frac{3-x}{3} + \&c.$$

$$l\cos\pi x = l\frac{1-2x}{1} + l\frac{1+2x}{1} + l\frac{3-2x}{3} + l\frac{3+2x}{3} + l\frac{5-2x}{5} + \&c.$$

43. Sumamus nunc harum serierum logarithmicarum differentialia, & diuisione vbique per dx facta prior series dabit:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

quae est ea ipsa series, quam §. 37. tractauimus. Altera vero series dabit:

$$\frac{-\pi\sin\pi x}{\cos\pi x} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \&c.$$

Ponamus $2x = z$, vt sit $x = \frac{z}{2}$, & diuidamus per -2 erit:

$$\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi z}{2\cos\frac{1}{2}\pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \&c.$$

Cum autem sit

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1-\cos\pi z}{2}} \quad \& \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1+\cos\pi z}{2}}$$

erit:

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi z)}}{\sqrt{(1+\cos\pi z)}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \&c.$$

seu

seu loco z scribendo x erit:

$$\frac{\pi V(1-\cos\pi x)}{V(1+\cos\pi x)} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \&c.$$

Addatur haec series ad primum inuentam:

$$\frac{\pi \cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \&c.$$

Atque reperietur huius seriei:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \&c.$$

Summa $= \frac{\pi V(1-\cos\pi x)}{V(1+\cos\pi x)} + \frac{\pi \cos\pi x}{\sin\pi x}$. At fractio haec $\frac{V(1-\cos\pi x)}{V(1+\cos\pi x)}$, si numerator & denominator multiplicetur per $V(1-\cos\pi x)$ abit in $\frac{1-\cos\pi x}{\sin\pi x}$. Quocirca summa seriei erit $= \frac{\pi}{\sin\pi x}$, quae est ea ipsa, quam §. 34. habuimus: vnde eam vlterius non persequemur.



CAPUT III.

DE INUENTIONE DIFFERENTIARUM FINITARUM.

44.

Quemadmodum ex functionum differentiis finitis earum differentialia facile inueniri queant, in initio fusius exposuimus, atque adeo ex hoc fonte principium differentialium deriuauimus. Si enim differentiae, quae assumtae erant finitae, euanescant, in nihilumque abeant, oriuntur differentialia; & quia hoc casu plures & saepe innumeri termini, qui differentiam finitam constituunt, reiiciuntur, differentialia multo facilius inueniri, atque commodius succinctiusque exprimi possunt, quam differentiae finitae. Neque igitur hinc vicissim via patere videtur, a differentialibus ad differentias finitas ascendendi. Interim tamen eo modo, quo hic vtemur, ex differentialibus omnium ordinum cuiuscunque functionis, eiusdem differentiae finitae omnes definiri poterunt.

45. Sit y functio quaecunque ipsius x, quae cum posito $x+dx$ loco x abeat in $y+dy$, si denuo loco x ponatur $x+dx$, valor $y+dy$ suo differentiali $dy+ddy$ augebitur, fietque $=y+2dy+ddy$, qui ergo valor respondebit ipsius x valori $x+2dx$. Simili modo si ponamus quantitatem x continuo suo differentiali dx augeri, vt successiue valores

$x+$

$$x + dx\,;\; x + 2dx\,;\; x + 3dx\,;\; x + 4dx\,;\; \text{\&c.}$$

induat, valores ipſius y reſpondentes erunt, quos haec tabella indicat:

Valores ipſius	Valores reſpondentes functionis
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + dy$
$x + 5dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + 5d^4y + d^5y$
$x + 6dx$	$y + 6dy + 15ddy + 20d^3y + 15d^4y + 6d^5y + d^6y$
&c.	&c.

46. Generaliter ergo ſi x abeat in $x + ndx$, functio y recipiet hanc formam:

$$y + \frac{n}{1}dy + \frac{n(n-1)}{1.\,2}ddy + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}d^3y$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}d^4y + \text{\&c.}$$

in qua expreſſione, etſi quilibet terminus infinities minor eſt quam praecedens, tamen nullum praetermiſimus, quo iſta formula ad praeſens negotium apta redderetur. Statuemus enim pro n numerum infinite magnum, & quoniam notauimus, fieri poſſe vt productum ex quantitate infinite magna in infinite paruam aequetur quantitati finitae, terminus ſecundus vtique homo-

 ge-

geneus fieri poterit primo, seu ndy quantitatem finitam repraesentare poterit. Ob eandemque rationem terminus tertius $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy$, etsi ddy infinities minus est quam dy, tamen quia alter factor $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ infinities maior est quam n, terminus quoque tertius quantitatem finitam exprimere poterit: sicque posito n numero infinito nullum illius expressionis terminum reiicere licebit.

47. Posito autem n numero infinito quocunque is numero finito siue augeatur siue diminuatur, numerus resultans ad n habebit rationem aequalitatis, hincque pro singulis factoribus $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. vbique scribi poterit n. Cum enim sit

$$\frac{n(n-1)}{1.\ 2}ddy = \tfrac{1}{2}nnddy - \tfrac{1}{2}nddy$$

prior terminus $\frac{1}{2}nnddy$ ad posteriorem $\frac{1}{2}nddy$ rationem tenebit vt n ad 1, sicque hic respectu illius euanescet; loco $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ ergo scribi poterit $\frac{1}{2}nn$. Simili modo quarti termini coefficiens $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ contrahi poterit in $\frac{n^3}{6}$ pariterque in sequentibus numeri, quibus n in factoribus diminuitur, negligi poterunt. Hoc vero facto functio y, si loco x ponatur $x+ndx$, existente numero n infinito, sequentem valorem accipiet:

$y+$

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{nnddy}{1.2} + \frac{n^3 d^3 y}{1.2.3} + \frac{n^4 d^4 y}{1.2.3.4} + \frac{n^5 d^5 y}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

48. Cum igitur ſumto n numero infinite magno etiamſi dx ſit infinite paruum, productum ndx quantitatem finitam exprimere poſſit, ponamus $ndx = \omega$, vt ſit $n = \frac{\omega}{dx}$, erit vtique n numerus infinitus, cum ſit quotus ex diuiſione quantitatis finitae ω per infinite paruam dx reſultans. Valore autem hoc loco n adhibito cognoſcemus, ſi quantitas variabilis x augeatur quauis quantitate finita ω, ſeu ſi loco x ponatur $x + \omega$, tum quamuis ipſius functionem y abituram eſſe in hanc formam:

$$y + \frac{\omega dy}{1\,dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

cuius expreſſionis ſinguli termini per continuam ipſius y differentiationem inueniri poterunt. Cum enim y ſit functio ipſius x, oſtendimus ſupra, has functiones omnes $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$; &c. quantitates finitas exhibere.

49. Cum igitur, dum quantitas variabilis x quantitate finita ω augeri aſſumitur, functio eius quaecunque y augeatur ſua differentia prima, quam ſupra per Δy indicauimus, exiſtente $\omega = \Delta x$: differentia ipſius y per continuam differentiationem reperiri poterit; erit enim:

Δy

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

seu

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \&c.$$

Sicque differentia finita Δy exprimitur per progressionem, cuius singuli termini secundum potestates ipsius Δx procedunt. Atque hinc vicissim patet, si quantitas x tantum quantitate infinite parua augeatur, vt Δx abeat in eius differentiale dx, omnes terminos prae primo euanescere, foreque $\Delta y = dy$; facto enim $\Delta x = dx$, differentia Δy abit per definitionem in differentiale dy.

50. Quoniam si loco x ponatur $x + \omega$, eius functio quaecuuque y induit sequentem valorem:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddx}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

veritas huius expressionis comprobari poterit eiusmodi exemplis, quibus differentialia altiora ipsius y tandem euanescunt: his enim casibus numerus terminorum superioris expressionis fiet finitus:

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor expressionis $xx - x$ *si loco* x *ponatur* $x + 1$.

Ponatur $y = xx - x$; & cum x in $x + 1$ abire statuatur, fiet $\omega = 1$, sumtis iam differentialibus erit:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1;\quad \frac{ddy}{dx^2} = 2;\quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0;\quad \&c.$$

Hinc

Hinc functio $y = xx - x$ posito $x + 1$ loco x abibit in : $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{2} . 2 = xx + x$.

Quodsi autem in $xx - x$ loco x actu ponatur $x + 1$ abibit xx in $xx + 2x + 1$

x in $x + 1$

Ergo $xx - x$ in $xx + x$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor expressionis $x^3 + xx + x$, *si loco* x *ponatur* $x + 2$.

Ponatur $y = x^3 + xx + x$, fietque $\omega = 2$; nunc cum sit $y = x^3 + xx + x$

erit $\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 .$$

Ex his valor functionis $y = x^3 + xx + x$, si pro x statuatur $x + 2$, erit sequens:

$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \frac{4}{2}(6x + 2) + \frac{8}{6} . 6$
$= x^3 + 7xx + 17x + 14$, qui idem prodit si actu loco x substituatur $x + 2$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor expressionis $xx + 3x + 1$, *si loco* x *ponatur* $x - 3$.

 Fiet

Fiet ergo $\omega = -3$; & posito

$$y = xx + 3x + 1, \quad \text{erit}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2:$$

vnde posito $x - 3$ loco x functio $x^2 + 3x + 1$ abibit in $x^2 + 3x + 1 - \frac{3}{1}(xx+3) + \frac{9}{2}.2 = x^2 - 3x + 1$.

51. Si pro ω sumatur numerus negatiuus, reperietur valor, quem functio quaecunque ipsius x induit, dum ipsa quantitas x diminuitur data quantitate ω. Scilicet si loco x ponatur $x - \omega$, functio ipsius x quaecunque y accipiet istum valorem:

$$y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

vnde omnes variationes, quas functio y subire potest, dum quantitas x vtrinque variatur, inueniri poterunt. Quodsi autem y fuerit functio rationalis integra ipsius x, quoniam tandem ad eius differentialia euanescentia deuenitur, valor variatus per expressionem finitam exprimetur; sin autem y non fuerit huiusmodi functio, valor variatus per seriem infinitam exprimetur, cuius propterea summa, quoniam si substitutio actu instituatur, valor variatus facile assignatur, expressione finita exhiberi poterit.

52. Quemadmodum autem differentia prima est inuenta, ita quoque differentiae sequentes similibus expres-

pressionibus exhiberi possunt. Induat enim x successiue valores $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$, &c. atque valores ipsius y respondentes indicentur per y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sicuti in initio huius libri posuimus. Quoniam ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. sunt valores, quos y nanciscitur, si loco x scribatur respectiue

$$x+\omega,\quad x+2\omega,\quad x+3\omega,\quad x+4\omega,\quad \&c.$$

per modo demonstrata isti ipsius y valores ita exprimentur:

$$y^{I}=y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{II}=y+\frac{2\omega dy}{dx}+\frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{III}=y+\frac{3\omega dy}{dx}+\frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$y^{IV}=y+\frac{4\omega dy}{dx}+\frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

&c.

53. Cum igitur, si Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, &c. denotent differentias, primam, secundam, tertiam, quartam, &c. sit:

$$\Delta y = y^{I} - y$$

$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

&c.

 istae

istae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2-2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3-2.1)\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(2^4-2.1)\omega^4 d^4 y}{24dx4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3-3.2^3+3.1)\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(3^4-3.2^4+3.1)\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4-4.3^4+6.2^4-4.1)\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \frac{(4^5-4.3^5+6.2^5-4.1)\omega^5 d^5 y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

54. Quantam vtilitatem afferant istae differentiarum expressionis in doctrina serierum & progressionum, cum sponte patet, tum in sequentibus vberius exponemus. Interim tamen in hoc capite vsum, qui hinc ad serierum notitiam immediate redundat, perpendamus. Quanquam vulgo indices terminorum seriei cuiuscunque progressionem arithmeticam, cuius differentia est vnitas, constituere assumuntur; tamen quo vsus latius pateat, atque applicatio facilius fieri possit, differentiam statuamus $= \omega$, ita vt, si terminus generalis seu is qui indici x respondet, fuerit y; sequentes conueniant indicibus

$$x+\omega,\quad x+2\omega,\quad x+3\omega,\quad \&c.$$

Quodsi ergo his indicibus respondeant sequentes seriei termini:

x,	$x+\omega$,	$x+2\omega$,	$x+3\omega$,	$x+4\omega$,	&c.
y,	P,	Q,	R,	S,	&c.

sin-

ſinguli ex y eiusque differentialibus definientur hoc modo:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

&c.

55. Si hae expreſſiones a ſe inuicem ſubtrahantur, in differentias non amplius ingredietur y, eritque

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{20dx^4} + \&c.$$

$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{175\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{369\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

&c.

Si hae expreſſiones denuo a ſe inuicem ſubtrahantur, etiam differentialia prima ſe deſtruent; eritque

$$Q-2P+y=\frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$R-2Q+P=\frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$S-2R+Q=\frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$T-2S+R=\frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

&c.

His autem denuo a se inuicem subtractis differentialia quoque secunda ex computo egredientur:

$$R-3Q+3P-y=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$S-3R+3Q-P=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$T-3S+3R-Q=\frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

subtractionem autem vlterius continuando fiet:

$$S-4R+6Q-4P+y=\frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

$$T-4S+6R-4Q+P=\frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

atque

$$T-5S+10R-10Q+5P-y=\frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5}+\&c.$$

56. Quodsi ergo y fuerit functio rationalis integra ipsius x, quia eius differentialia altiora tandem euanes-

cent

sent, hoc modo procedendo tandem ad expressiones euanescentes peruenietur. Cum igitur istae expressiones sint differentiae ipsius y, earum formas & coefficientes diligentius perpendamus:

$$y = y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = \frac{\omega^2 ddy}{dx^2} + \frac{3\omega^3 d^3y}{3dx^3} + \frac{7\omega^4 d^4y}{3.4dx^4} + \frac{15\omega^5 d^5y}{3.4.5dx^5} + \frac{31\omega^6 d^6y}{3.4.5.6dx^6} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = \frac{\omega^3 d^3y}{dx^3} + \frac{6\omega^4 d^4y}{4dx^4} + \frac{25\omega^5 d^5y}{4.5dx^5} + \frac{90\omega^6 d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301\omega^7 d^7y}{4.5.6.7dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6y}{5.6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7y}{5.6.7.dx^7} + \&c.$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7y}{6.7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8y}{6.7.8dx^8} + \&c.$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8y}{7.8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9y}{7.8.9dx^9} + \&c.$$

&c.

In quibus seriebus quemadmodum denominatores procedant, clarum est; numeratorum autem coefficientes ita formantur, vt quiuis coefficiens numeratoris sit aggregatum ex supra stante & praecedente per exponentem differentiae multiplicato. Sic in serie differentiam $\Delta^6 y$ exprimente, est $2646 = 1050 + 6.266$.

57. Consideremus quoque seriem eandem simul retro continuatam, quae continet terminos indicibus $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; &c. respondentes:

In

$x-4\omega;\ x-3\omega;\ x-2\omega;\ x-\omega;\ x;\ x+\omega;\ x+2\omega;\ x+3\omega;\ x+4\omega;$ &c.
$s,\quad r,\quad q,\quad p,\quad y,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad S,$ &c.

Cum igitur ſit:

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 dx^4}{24dx^4} - \&c.$$

&c.

erit his valoribus a ſuperioribus P, Q, R, S, &c. ſubtrahendis:

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

&c.

ſin

ſin autem termini hi ad ſuperiores addantur, tum, quemadmodum hic differentialia parium ordinum deerant, differentialia imparia ex computo egredientur.

Erit enim

$$\frac{P+p}{2}=y+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6}+\&c.$$

$$\frac{Q+q}{2}=y+\frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6}+\&c.$$

$$\frac{R+r}{2}=y+\frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6}+\&c.$$

$$\frac{S+s}{2}=y+\frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6}+\&c.$$

&c.

58. Quoniam termini antecedentes omnes exprimi poſſunt, ſi ii in vnam ſummam colligantur, prodibit ſeriei propoſitae terminus ſummatorius. Reſpondeat ſcilicet terminus primus indici $x-n\omega$, eritque ipſe terminus primus $=$

$$y-\frac{n\omega dy}{dx}+\frac{n^2\omega^2 ddy}{2dx^2}-\frac{n^3\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{n^4\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

Cum igitur terminus indici x reſpondens ſit $=y$, terminorumque omnium numerus ſit $=n+1$, erit ſumma omnium a primo ad vltimum y incluſiue ſumtorum ſeu terminus ſummatorius $=$

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(1+2+3+\ \ldots\ +n)$$
$$+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(1+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2)$$
$$-\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(1+2^3+3^3+\ \ldots\ +n^3)$$
$$+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(1+2^4+3^4+\ \ldots\ +n^4)$$
$$-\frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}(1+2^5+3^5+\ \ldots\ +n^5)$$
&c.

59. Supra autem ſingularum harum ſerierum ſummas exhibuimus, quae ſi hic ſubſtituantur, erit ſumma ſeriei noſtrae propoſitae $=$

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{1}{2}n)$$
$$+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}nn+\tfrac{1}{6}n)$$
$$-\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2)$$
$$+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(\tfrac{1}{5}n^5+\tfrac{1}{2}n^4+\tfrac{1}{3}n^3-\tfrac{1}{30}n)$$
$$-\frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}(\tfrac{1}{6}n^6+\tfrac{1}{2}n^5+\tfrac{5}{12}n^4-\tfrac{1}{12}n^2)$$
&c.

vbi n dabitur ex indice termini primi, a qua ſumma computatur. Ita ſi ponatur $\omega = 1$, & index termini pri-

primi sit $= 1$, secundi $= 2$, & vltimi $= x$, ita vt haec series sit proposita:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & x \\ a, & b, & c, & d, & \ldots & y \end{matrix}$$

erit huius seriei summa (ob $x - n = 1$ & $n = x - 1$)

$$= xy - \frac{dy}{dx}\left(\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x\right)$$
$$+ \frac{ddy}{2dx^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x\right)$$
$$- \frac{d^3y}{6dx^3}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx\right)$$
$$+ \frac{d^4y}{24dx^4}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x\right)$$
$$- \frac{d^5y}{120dx^5}\left(\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2\right)$$
$$+ \frac{d^6y}{720dx^6}\left(\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x\right)$$

&c.

60. Ex hac summae expressione, quia coefficientes vehementer augentur, si x fuerit numerus magnus, parum vtilitatis ad doctrinam serierum redundat; interim tamen iuvabit aliquas proprietates inde fluentes commemorasse. Sit terminus generalis $y = x^n$, atque terminus summatorius per Sy seu $S.x^n$ indicetur. Qua designatione vbique adhibita erit:

$$\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x = S.x - x$$
$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = S.x^2 - x^2$$
$$\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx = S.x^3 - x^3 \quad \&c.$$

 Quam-

Quamobrem ex ſuperiori expreſſione obtinebitur:

$$S.x^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^n$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^n$$
&c.

At cum ſit

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

erit $n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} - \&c.$

$= 1$, ideoque excepto caſu $n = 0$, quo iſta expreſſio fit $= 0$.

$$S.x^n = x^{n+1} + x^n - nx^{n-1}S.x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} S.x^2$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} S.x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} S.x^4$$
&c.

61. Quo tam veritas quam vis huius formulae clarius perſpiciatur, euoluamus ſingulos caſus, ſitque primo $n = 1$, eritque:

$S.x = x^2 + x - S.x$, ideoque $S.x = \frac{xx+x}{2}$,

quemadmodum ſatis conſtat.

Pona-

Ponamus ergo $n = 2$, eſt erit:

$$S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2,$$

quae aequatio, cum vtrinque termini $S.x^2$ ſe tollant, idem dat, quod praecedens $S.x = \frac{xx+x}{2}$. Si ſit $n = 3$, erit

$$S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x.^2 Sx + 3xS.x^2 - S.x^3,$$

ideoque

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 Sx + \tfrac{1}{2}x^3(x+1),$$

ſi ponatur $n = 4$ prodibit:

$$S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3 Sx + 6x^2 S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x4,$$

vnde ob $S.x^4$ deſtructum erit:

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - x^2 S.x + \tfrac{1}{4}x^3(x+1)$$

a cuius triplo, ſi praecedentis duplum ſubtrahatur remanebit: $S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{1}{4}x^3(x-1)$.

Si ponatur $n = 5$ fiet:

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4 Sx + 10x^3 S.x^2 - 10x^2 S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5$$

ſeu

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - 5x.^2 Sx^3 + 5x.^3 Sx^2 - \tfrac{5}{2}x^4 Sx + \tfrac{1}{2}x^5(x+1)$$

atque ex $n = 6$ ſequitur:

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5 Sx + 15x^4 S.x^2 - 20x^3 S.x^3 + 15x^2 S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

ſeu

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - \tfrac{10}{3}x^2 S.x^3 + \tfrac{5}{2}x^3 S.x^2 - x^4 S.x + \tfrac{1}{6}x^5(x+1).$$

 62.

62. Ex his ergo generaliter concludimus, si fuerit $n = 2m + 1$ fore:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.\ 1.\ 2} x^2 S.x^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.\ 1.\ 2.\ 3} x^3 S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots \ldots - \frac{(2m+1)}{2} x^{2m} S x + \tfrac{1}{2} x^{2m+1} (x+1).$$

Sin autem sit $n = 2m + 2$, quia termini $S.x^{2m+2}$ se mutuo destruunt, reperietur:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.\ 3} x^2 S x^{2m-1} + \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.\ 3.\ 4} x^3 S.x^{2m-2}$$

$$- \ldots \ldots - x^{2m} S x + \frac{1}{2m+2} x^{2m+1} (x+1).$$

Duplici ergo modo summae potestatum imparium ex summis potestatum inferiorum determinari possunt: atque ex varia combinatione harum duarum formularum infinitae aliae formari possunt.

63. Multo facilius autem summae potestatum imparium ex antecedentibus definiri possunt: atque ad hoc quidem sufficit solam summam potestatis paris antecedentis nouisse. Ex summis enim potestatum supra exhibitis constat, numerum terminorum summas constituentium, imparibus tantum potestatibus augeri, ita vt summa potestatis imparis totidem constet terminis, quot summa potestatis paris praecedentis. Sic si potestatis paris x^{2n} summa sit:

$$S.x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} - \&c.$$

vidi-

vidimus enim, post terminum tertium alternos terminos deficere, simulque signa alternari; hinc summa sequentis potestatis x^{2n+1} inuenietur, si singuli illius termini respectiue multiplicentur per hos numeros:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x;\ \frac{2n+1}{2n+1}x;\ \frac{2n+1}{2n}x;\ \frac{2n+1}{2n-1}x;\ \frac{2n+1}{2n-2}x;\ \&c.$$

non omittendo terminos deficientes; eritque ergo

$$S.x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n}$$

$$- \frac{2n+1}{2n-1}\delta x^{2n-2} + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} + \&c.$$

Quodsi ergo constet summa potestatis x^{2n}, ex ea expedite summa sequentis potestatis x^{2n+1} formari poterit.

64. Haec sequentium summarum inuestigatio etiam ad potestates pares extenditur; quoniam autem harum summae nouum terminum recipiunt, hic per istam methodum non inuenitur, ex natura tamen ipsius seriei, qua constat, si ponatur $x = 1$, summam quoque fieri debere $= 1$, semper erui poterit. Vicissim autem semper ex summa cuiusuis potestatis cognita praecedentium potestatum summae inueniri poterunt. Si enim fuerit:

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \&c.$$

erit pro potestate praecedente:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}\alpha x^n + \frac{n}{n}\beta x^{n-1} + \frac{(n-1)}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{(n-3)}{n}\delta x^{n-4} + \&c.$$

hinc-

hincque vlterius regredi licet, quousque libuerit. Notandum autem eſt eſſe perpetuo $\alpha = \frac{1}{n+1}$ & $\beta = \frac{1}{2}$, vti ex formulis iam ſupra datis apparet.

65. Attendenti ſtatim patebit ſummam poteſtatum x^{n-1} prodire, ſi ſumma poteſtatum x^n differentietur, eiusque differentiale per $n\,dx$ diuidatur; eritque adeo

$d.\mathrm{S}x^n = n\,dx.\mathrm{S}x^{n-1}$ & quia eſt $d.x^n = nx^{n-1}dx$;

erit $d.\mathrm{S}x^n = \mathrm{S}.nx^{n-1}dx = \mathrm{S}.d.x^n$;

ex quo intelligitur differentiale ſummae aequari ſummae differentialis: ita in genere ſi ſeriei cuiuspiam terminus generalis fuerit $= y$, & $\mathrm{S}y$ eius terminus ſummatorius; erit quoque $\mathrm{S}.dy = d.\mathrm{S}y$: hoc eſt ſumma differentialium omnium terminorum aequatur differentiali ſummae ipſorum terminorum. Ratio autem huius aequalitatis facile perſpicitur ex iis, quae ſupra de ſerierum differentiatione attulimus. Cum enim ſit

$$\mathrm{S}.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \&c.$$

erit

$$\frac{d.\mathrm{S}x^n}{ndx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \&c. = \mathrm{S}.x^{n-1}$$

quae demonſtratio ad omnes alias ſeries patet.

66. Reuertamur autem, vnde digreſſi ſumus, ad differentias functionum, circa quas adhuc quaedam annotanda ſunt. Quoniam vidimus, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, atque loco x vbique ponatur $x \pm \omega$, functionem y adepturam eſſe ſequentem valorem:

$y \pm$

$$y \pm \frac{\omega dy}{1dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} \pm \frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

haec expreſſio locum habebit, ſiue pro ω quantitas quaecunque conſtans accipiatur, ſiue etiam variabilis, ab ipſa x pendens. Inuentis enim per differentiationem valoribus fractionum $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. in factoribus ω, ω^2, ω^3, &c. variabilitas non ſpectatur, hincque perinde eſt ſiue ω denotet quantitatem conſtantem, ſiue variabilem ab x pendentem.

67. Ponamus ergo eſſe $\omega = x$, atque in functione y loco x ſcribi $x - x = 0$. Quamobrem ſi in functione ipſius x quacunque y loco x vbique ſcribatur 0, valor functionis erit hic:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c.$$

Haec ergo expreſſio ſemper indicat valorem, quem functio quaecunque y induit, ſi in ea ponatur $x = 0$, cuius veritatem ſequentia exempla illuſtrabunt:

EXEMPLUM I.

Sit $y = xx + ax + ab$, cuius valor, ſi ponatur $x = 0$, quaeratur, quem quidem conſtat fore $= ab$.

Cum ſit $y = xx + ax + ab$

erit $\frac{dy}{1dx} = 2x + a$

$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 1$

Yy ideo-

ideoque prodibit valor quaesitus

$$= xx + ax + ab - x(2x + a) + xx.\ 1 = ab.$$

EXEMPLUM II.

Sit $y = x^3 - 2x + 3$, cuius valor, posito $x = 0$, quaeratur, quem constat fore $= 3$.

Cum sit $y = x^3 - 2x + 3$

erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2$

$$\frac{ddy}{1.2\,dx^2} = 3x$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} = 1$$

obtinebitur valor quaesitus

$$= x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx.\ 3x - x^3.\ 1 = 3.$$

EXEMPLUM III.

Sit $y = \frac{x}{1-x}$, cuius valor posito $x = 0$, quaeritur, quem constat fore $= 0$.

Cum sit $y = \frac{x}{1-x}$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$;

$\frac{ddy}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$; $\frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$; &c.

Hinc erit valor quaesitus

$$= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \&c.$$

huiusque ergo seriei valor est $= 0$.

Quod

Quod etiam hinc patet, quod haec feries primo termino truncata $\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{x^3}{(1-x)^4} -$ &c. fit feries geometrica, eiusque fumma $= \frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x}$, vnde valor inuentus erit $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

EXEMPLUM IV.

Sit $y = e^x$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eft vnitas, & quaeratur valor ipfius y fi ponatur $x = 0$, quem quidem conftat fore $= 1$.

Cum fit $y = e^x$; erit $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^x$; &c. ideoque valor quaefitus erit

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x xx}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$= e^x \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.\right)$$

At fupra vidimus feriem $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.$ exprimere valorem e^{-x}, erit ergo valor quaefitus vtique $= e^x . e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$.

EXEMPLUM V.

Sit $y = \sin x$, atque pofito $x = 0$, manifeftum eft fore $y = 0$, id quod etiam formula generalis indicabit.

Cum

Cum enim ſit $y = \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$;

$\frac{ddy}{dx^4} = - \sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$; &c.

erit poſito $x = 0$ valor ipſius y hic:

$$\sin x - \frac{x}{1}\cos x - \frac{xx}{1.2}\sin x + \frac{x^3}{1.2.3}\cos x + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sin x - \&c.$$

$$\text{qui eſt } = \sin x\left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3 \ldots 6} + \&c.\right)$$

$$- \cos x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3 \ldots 7} + \&c.\right)$$

harum autem ſerierum ſuperior exprimit $\cos x$, inferior autem $\sin x$, vnde valor quaeſites erit

$$= \sin x . \cos x - \cos x . \sin x = 0.$$

68. Hinc igitur viciſſim cognoſcimus, ſi y eiusmodi fuerit functio ipſius x, vt ipſa euaneſcat, poſito $x = 0$, tum fore

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{xxddy}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = 0.$$

Vnde haec eſt aequatio generalis omnium omnino functionum ipſius x, quae dum fit $x = 0$, ſimul ipſae euaneſcunt. Et hancobrem iſta aequatio ita eſt comparata, vt, quaecunque functio ipſius x, dummodo ea euaneſcat euaneſcente x, loco y ſubſtituatur, aequationi perpetuo ſatisfiat. Quodſi vero y eiusmodi fuerit functio ipſius x, quae

quae posito $x = 0$, recipiat valorem datum $= A$, tum erit:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = A.$$

in qua aequatione omnes continentur functiones ipsius x, quae posito $x = 0$, abeunt in A.

69. Si loco x scribatur $2x$, seu $x + x$, functio quaecunque ipsius x, quae designetur per y hunc induet valorem

$$y + \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \&c.$$

Atque si loco x scribamus nx, hoc est $x + (n-1)x$ functio y accipiet valorem sequentem:

$$y + \frac{(n-1)xdy}{1dx} + \frac{(n-1)^2xxddy}{1.2dx^2} + \frac{(n-1)^3x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

Sin autem generaliter pro x scribamus t, functio quaecunque y ipsius x, transmutabitur ob $t = x + t - x$ in formam sequentem:

$$y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

Si igitur v fuerit talis functio ipsius t, qualis y est ipsius x, quia v ex y nascitur, ponendo t loco x, erit:

$$v = y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \&c.$$

cuius veritas quibuscunque exemplis comprobari potest.

EXEMPLUM.

Sit enim $y = xx - x$: manifestum est posito t loco x fore $v = tt - t$, quod idem expressio inuenta declarabit.

Nam ob

$$y = xx - x; \text{ erit } \frac{dy}{dx} = 2x - 1; \quad \& \quad \frac{ddy}{2dx^2} = 1;$$

vnde fiet

$$v = xx - x + (t - x)(2x - 1) + (t - x)^2 =$$
$$xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Si itaque y fuerit eiusmodi functio ipsius x, quae posito $x = a$ abeat in A; ob $t = a$ & $v = A$ fiet

$$A = y + \frac{(a - x)dy}{1dx} + \frac{(a - x)^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{(a - x)^3 d^3y}{1.2.3 dx^3} + \&c.$$

huicque ergo aequationi omnes functiones ipsius x, quae facto $x = a$ abeunt in A, satisfaciunt.

CAPUT

CAPUT IV.

DE CONUERSIONE FUNCTIONUM IN SERIES.

70.

In Capite superiori iam ex parte ostensus est vsus, quem expressiones generales ibi pro differentiis finitis inventae habent in inuestigatione serierum, quae valorem cuiusque functionis ipsius x exhibeant. Si enim y fuerit functio data ipsius x, eius valor quem induit posito $x = 0$, erit cognitus; hicque si ponatur $= A$, erit vti inuenimus:

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2\, dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} - \&c. = A.$$

Hinc ergo non solum habemus seriem plerumque in infinitum excurrentem, cuius summa aequetur quantitati constanti A, etiamsi in singulis terminis insit quantitas variabilis x, sed etiam ipsam functionem y per seriem exprimere poterimus, erit enim:

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{xxddy}{1.2\, dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3\, dx^3} - \frac{x^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^3} + \&c.$$

cuius exempla iam aliquot sunt allata.

71. Quo autem haec inuestigatio latius pateat, ponamus functionem y abire in z, si loco x vbique scribatur $x + \omega$, ita vt z talis sit functio ipsius $x + \omega$, qualis y est ipsius x, atque ostendimus fore:

$z =$

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3\, dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4\, dx^4} + \&c.$$

Cum igitur huius feriei finguli termini per continuam ipfius y differentiationem ponendo dx conftans inueniri, fimulque valor ipfius z per fubftitutionem $x + \omega$ in locum ipfius x actu exhiberi queat; hoc modo perpetuo obtinebitur feries valori ipfius z aequalis, quae fi ω fuerit quantitas vehementer parua, maxime conuergit, atque non admodum multis terminis capiendis valorem ipfius z proxime verum praebebit. Ex quo huius formulae in negotio approximationum vberrimus erit vfus.

72. Vt igitur in infigni huius formulae vfu oftendendo ordine procedamus, fubftituamus primo in locum ipfius y functiones ipfius x algebraicas. Ac primo quidem fit $y = x^n$; eritque fi $x + \omega$ loco x ponatur $z = (x+\omega)^n$. Cum igitur fit:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \quad ; \quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \; ; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

&c.

his valoribus fubftitutis fiet:

$$(x+\omega)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}\omega^3 + \&c.$$

quae eft notiffima expreffio Neutoniana, qua poteftas binomii $(x+\omega)^n$ in feriem conuertitur. Huiusque feri-

feriei terminorum numerus femper eft finitus, fi n fuerit numerus integer affirmatiuus.

73. Poterimus hinc quoque progreffionem inuenire, quae valorem poteftatis binomii ita exprimat, vt ea abrumpatur, quoties exponens poteftatis fuerit numerus negatiuus. Statuamus enim

$$\omega = \frac{-ux}{x+u}; \quad \text{erit} \quad z = (x+\omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$$

ideoque habebitur:

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{nx^n u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^n u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^n u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

diuidatur vbique per x^{2n}, eritque

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{nx^{-n}u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1.2(x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

Ponatur nunc $-n = m$; prodibitque

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^m u}{1(x+u)} + \frac{m(m+1)x^m u^2}{1.2(x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^m u^3}{1.2.3(x+u)^3} + \&c.$$

quae feries, quoties m eft numerus integer negatiuus, finito terminorum numero conftabit. Haec igitur feries aequalis eft primum inuentae, fi pro ω & n fcribantur u & m; erit enim inde

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1.2.3} + \&c.$$

74. Haec eadem feries quoque deduci poteft ex expreffione initio §. 70. data. Cum enim, fi pofito $x = 0$, abeat y in A fit:

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = A,$$

ponatur $y = (x+a)^n$; eritque $A = a^n$; & ob

$$\frac{dy}{dx} = n(x+a)^{n-1} \;;\; \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)(x+a)^{n-2} \;;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3} \;;\; \&c. \text{ fiet}$$

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2(x+a)^{n-2} - \&c. = a^n$$

diuidatur per $a^n(x+a)^n$, atque prodibit:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1.2(x+a)^2} - \&c.$$

quae positis respectiue u, x & $-m$ pro x, a & n orietur series ante inuenta.

75. Si pro m statuantur numeri fracti, ambae series in infinitum excurrent, interim tamen si u prae x fuerit quantitas valde parua, vehementer ad verum valorem conuergent. Sit igitur $m = \frac{\mu}{\nu}$; & $x = a^\nu$, erit ex seriem primum inuenta:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu.a^\nu} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu.\ 2\nu}.\frac{uu}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu.\ 2\nu.\ 3\nu}.\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \&c.\right)$$

Series autem posterius inuenta dabit:

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu.2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu.\ 2\nu.\ 3\nu\ (a^\nu+u)^3} + \&c.\right)$$

Haec

Haec autem posterior series magis conuergit quam prior, cum eius termini etiam decrescant, si fuerit $u > a^{\nu}$, quo casu tamen prior series diuergit.

Si igitur sit $\mu = 1$, $\nu = 2$, erit

$$\sqrt{(a^2+u)} = a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u}{(a^2+u)} + \frac{1.3}{2.4}\frac{u^2}{(a^2+u)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^3}{(a^2+u)^3} + \&c.\right)$$

Simili modo pro ν ponendo numeros 3, 4, 5 &c. manente $\mu = 1$, erit:

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1 + \frac{1}{3}\frac{u}{(a^3+u)} + \frac{1.4}{3.6}\frac{u^2}{(a^3+u)^2} + \frac{1.4.7}{3.6.9}\frac{u^3}{(a^4+u)^3} + \&c.\right)$$

$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1 + \frac{1}{4}\frac{u}{(a^4+u)} + \frac{1.5}{4.8}\frac{u^2}{(a^4+u)^2} + \frac{1.5.9}{4.8.12}\frac{u^3}{(a^4+u)^3} + \&c.\right)$$

$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1 + \frac{1}{5}\frac{u}{(a^5+u)} + \frac{1.6}{5.10}\frac{u^2}{(a^5+u)^2} + \frac{1.6.11}{5.10.15}\frac{u^3}{(a^5+u)^3} + \&c.\right)$$

&c.

76. Ex his ergo formulis facile cuiusque numeri propositi radix cuiusuis potestatis inueniri poterit. Proposito enim numero c quaeratur potestas ei proxima, siue maior siue minor: priori casu u fiet numerus negatiuus, posteriori affirmatiuus. Quod si vero series resultans non satis conuergere videatur, multiplicetur numerus c per quampiam potestatem puta per f^{ν}, si radix dignitatis ν extrahi debeat, & quaeratur numeri $f^{\nu}c$ radix, quae per f diuisa dabit radicem numeri c quaesitam.

tam. Quo maior autem accipitur numerus f, eo magis series conuerget; idque imprimis, si quaepiam similis potestas a^{ν} non multum ab $f^{\nu}c$ discrepet.

EXEMPLUM I.

Quaeratur radix quadrata ex numero 2.

Si sine vlteriori praeparatione ponatur $a = 1$ & $u = 1$ fiet

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \&c.$$

quae etsi iam satis conuergit, tamen praestabit numerum 2 ante per quadratum quodpiam vti 25 multiplicare, vt productum 50 ab alio quadrato 49 minime discrepet. Hancobrem quaeratur radix quadrata ex 50, quae per 5 diuisa dabit $\sqrt{2}$. Erit autem tum $a = 7$ & $u = 1$, vnde fiet:

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \&c.\right)$$

seu

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \&c.\right)$$

quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est aptissima.

Erit

Erit enim

$$\frac{7}{5} = 1,4000000000000$$
$$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100} = 140000000000$$
$$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200} = 2100000000$$
$$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200}\cdot\frac{5}{300} = 35000000$$
$$\text{praec. in } \frac{7}{400} = 612500$$
$$\text{praec. in } \frac{9}{500} = 11025$$
$$\text{praec. in } \frac{11}{600} = 202$$
$$3$$

Ergo $\sqrt{2} = 1,41421356237 30$

EXEMPLUM II.

Quaeratur radix cubica ex 3.

Multiplicetur 3 per cubum 8, & quaeratur radix cubica ex 24, erit enim $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. Ponatur ergo $a = 3$ & $u = -3$, eritque

$$\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \&c.\right)$$

&

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3.8} + \frac{1.4}{3.6.8^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9.8^3} + \&c.\right)$$

seu

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \&c.\right)$$

 quae

quae series iam vehementer conuergit, cum quilibet terminus plusquam octies minor sit praecedente. Sin autem 3 multiplicetur per cubum 729 fiet 2187, &

$$\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3}.$$

Erit ergo ob $a = 13$ & $z = -10$.

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{13}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \&c.\right)$$

cuius quiuis terminus plusquam ducenties minor est quam praecedens.

77. Euolutio binomii potestatis tum late patet, vt omnes functiones algebraicae in ea comprehendi queant. Si enim verbi gratia quaeratur valor huius functionis $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ per seriem expressus, hoc per praecedentes formulas, duos terminos tanquam vnum considerando fieri poterit. Deinde vero haec explicatio fieri poterit ope expressionis primum traditae: nam si ponatur $\sqrt{(a + 2bx + cxx)} = y$, quia posito $x = 0$ fit $y = \sqrt{a}$, erit $A = \sqrt{a}$, & cum differentialia ipsius y ita se habeant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = + \frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

Ex

Ex his ergo obtinebitur:

$$V(a+2bx+cxx)-\frac{(b+cx)x}{V(a+2bx+cxx)}-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$-\frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^{\frac{7}{2}}}-\&c.=Va.$$

Quodsi ergo vbique per $V(a+2bx+cxx)$ multiplicetur series fiet rationalis, eritque

$$Va(a+2bx+cxx)=a+2bx+cxx-(b+cx)x-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)}-$$
$$\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2}-\frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^3}-\&c.$$

siue

$$V(a+2bx+cxx)=Va+\frac{bx}{Va}-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)Va}-\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2Va}-\&c.$$

78. Transeamus ergo ad functiones transcendentes, quas loco y substituamus. Sit itaque primum $y=lx$, ac posito $x+\omega$ loco x fiet $z=l(x+\omega)$. Sint autem hi logarithmi quicunque, qui ad hyperbolicos rationem teneant $n:1$, eritque pro logarithmis hyperbolicis $n=1$, & pro tabularibus erit $n=0,434294481903 2$. Hinc differentialia ipsius $y=lx$ erunt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x};\quad \frac{ddy}{dx^2}=-\frac{n}{x^2};\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2n}{x^3};\quad \&c.$$

ex quibus conficitur:

$$l(x+\omega)=lx+\frac{n\omega}{x}-\frac{n\omega^2}{2x^2}+\frac{n\omega^3}{3x^3}-\frac{n\omega^4}{4x^4}+\&c.$$

Si-

Simili modo si ω statuatur negatiuum, erit:

$$l(x-\omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} - \&c.$$

Quodsi ergo haec series a priori subtrahatur, fiet

$$l\frac{x+\omega}{x-\omega} = 2n\left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \&c.\right)$$

79. Si in serie primum inuenta:

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

ponatur $\omega = \frac{xx}{u-x}$; erit $x+\omega = \frac{ux}{u-x}$; &

$$l(x+\omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \&c.$$

atque

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \&c.$$

sumtoque x negatiuo habebitur:

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nxx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4}.$$

Harum ergo serierum ope logarithmi expedite inueniri poterunt, si quidem series valde conuergant. Huiusmodi autem erunt sequentes, quae ex inuentis facile deducuntur:

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \&c.\right)$$

quae

quae duae feries, cum tantum fignis a fe inuicem discrepent, fi ad calculum reuocentur, ex logarithmo numeri x cognito, eadem opera logarithmi amborum numerorum $x+1$ & $x-1$ reperientur. Deinde ex reliquis feriebus erit:

$$l(x+1)=l(x-1)+2n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\&c.\right)$$

$$l(x-1)=lx-n\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+\&c.\right)$$

$$l(x+1)=lx+n\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)^4}+\&c.\right)$$

80. Ex dato ergo logarithmo numeri x, logarithmi numerorum contiguorum $x+1$ & $x-1$ facile inveniri poterunt; quin etiam ex logarithmo numeri $x-1$ logarithmus numeri binario maioris & viciffim eruetur. Quod quamuis in Introductione vberius fit oftenfum, tamen hic quaedam exempla adiungemus.

EXEMPLUM I.

Ex dato numeri 10 *logarithmo hyperbolico*, qui eft 2,302585092994o, *logarithmos hyperbolicos numerorum* 11 *&* 9 *inuenire.*

Quoniam haec quaeftio logarithmos hyperbolicos fpectat, erit $n=1$; ideoque habebuntur hae feries:

$$l11=l10+\frac{1}{10}-\frac{1}{2.10^2}+\frac{1}{3.10^3}-\frac{1}{4.10^4}+\frac{1}{5.10^5}-\&c.$$

$$l9=l10-\frac{1}{10}-\frac{1}{2.10^2}-\frac{1}{3.10^3}-\frac{1}{4.10^4}-\frac{1}{5.10^5}-\&c.$$

Ad quarum ſerierum ſummas inueniendas, colligantur termini pares & impares ſeorſim, eritque

$\frac{1}{10} = 0{,}1000000000000$	$\frac{1}{2.\,10^2} = 0{,}0050000000000$
$\frac{1}{3.\,10^3} = 0{,}0003333333333$	$\frac{1}{4.\,10^4} = 0{,}0000250000000$
$\frac{1}{5.\,10^5} = 0{,}0000020000000$	$\frac{1}{6.\,10^6} = 0{,}0000001666666$
$\frac{1}{7.\,10^7} = 0{,}0000000142857$	$\frac{1}{8.\,10^8} = 0{,}0000000012500$
$\frac{1}{9.\,10^9} = 0{,}0000000001111$	$\frac{1}{10.\,10^{10}} = 0{,}0000000000100$
$\frac{1}{11.\,10^{11}} = 0{,}0000000000009$	$\frac{1}{12.\,10^{12}} = 0{,}0000000000001$
ſumma $= 0{,}1003353477310$	ſumma $= 0{,}0050251679267$

Summa vtriusque erit . . . $0{,}1053605156577$

Differentia ambarum erit $0{,}0953101798043$

Iam eſt $l10 = 2{,}3025850929940$

Ergo erit $l11 = 2{,}3978952727983$

& $l9 = 2{,}1972245773363$

Hinc porro erit $l3 = 1{,}0986122886681$

& $l99 = 4{,}5951198501346$

EX-

EXEMPLUM II.

Ex logarithmo hyperbolico numeri 99 *nunc inuento inuenire logarithmum numeri* 101.

Adhibeatur ad hoc feries fupra inuenta:

$$l(x+1)=l(x-1)+\frac{2}{x}+\frac{2}{3x^3}+\frac{2}{5x^5}+\frac{2}{7x^7}+\&c.$$

in qua fiat $x=100$; eritque:

$$l101=l99+\frac{2}{100}+\frac{2}{3.\,100^3}+\frac{2}{5.\,100^5}+\frac{2}{7.\,100^7}+\&c.$$

cuius feriei fumma ex his quatuor terminis colligitur $=0,0200006667066$, quae ad $l\,99$ addita dabit $l101=4,6151205168412$.

EXEMPLUM III.

Ex dato logarithmo tabulari numeri 10, qui eft $=1$, *inuenire logarithmos numerorum* 11 & 9.

Quoniam hic logarithmos communes tabulares quaerimus, erit $n=0,4342944819032$, pofito ergo $x=10$ erit:

$$l11=l10+\frac{n}{10}+\frac{n}{2.\,10^2}-\frac{n}{3.\,10^3}+\frac{n}{4.\,10^4}+\&c.$$

$$l\,9=l10-\frac{n}{10}-\frac{n}{2.\,10^2}-\frac{n}{3.\,10^3}-\frac{n}{4.\,10^4}-\&c.$$

 Col-

Colligantur termini pares & impares seorsim:

$\frac{n}{10} = 0{,}0434294481903$	$\frac{n}{2.10^2} = 0{,}0021714724095$
$\frac{n}{3.10^3} = 0{,}0001447648273$	$\frac{n}{4.10^4} = 0{,}0000108573620$
$\frac{n}{5.10^5} = 0{,}0000008685889$	$\frac{n}{6.10^6} = 0{,}0000000723824$
$\frac{n}{7.10^7} = 0{,}0000000062042$	$\frac{n}{8.10^8} = 0{,}0000000005428$
$\frac{n}{9.10^9} = 0{,}0000000000482$	$\frac{n}{10.10^{10}} = 0{,}0000000000043$
$\frac{n}{11.10^{11}} = 0{,}0000000000005$	$\frac{n}{12.10^{12}} = 0{,}0000000000000$
summa $= 0{,}0435750878593$	summa $= 0{,}0021824027010$

Aggregatum ambarum est $= 0{,}0457574905603$

Differentia earum est $= 0{,}0413926851583$

Cum ergo sit $l10 = 1{,}0000000000000$

Erit $l11 = 1{,}0413926851583$

& $l9 = 0{,}9542425094396$

Hinc $l3 = 0{,}4771212547198$

& $l99 = 1{,}9956351945979$

EXEMPLUM IV.

Ex logarithmo tabulari numeri 99 hic inuentis inuenire logarithmum tabularem numeri 101.

Adhibendo hic eandem feriem, qua in Exemplo fecundo vfi fumus, habebimus:

$$l101 = l99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3.100^3} + \frac{1}{5.100^5} + \&c.\right)$$

cuius feriei pofito pro n valore debito, fumma mox reperietur $= 0,00868617918849$ quae addita, ad $l99 = 1,99563519459 79$ oritur.

$$l101 = 2,00432136378829$$

81. Tribuamus nunc in expreffione noftra generali y valorem exponentialem, fitque $y = a^x$, pofito $x + \omega$ loco x; erit $z = a^{x+\omega}$, cuius valor ob differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3; \quad \&c.$$

erit

$$a^{x+\omega} = a^x\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

quae fi diuidatur per a^x prodibit feries valores quantitatis exponentialis exprimens, quam fupra in Introductione iam elicuimus: nempe

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Simili modo sumto ω negatiuo erit:

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2(la)^2}{1.2} - \frac{\omega^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4(la)^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

ex quarum combinatione oritur:

$$\frac{a^{\omega}+a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2(la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6(la)^6}{1.2\ldots6} + \&c.$$

$$\frac{a^{\omega}-a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5(la)^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

vbi notandum est la denotare logarithmum hyperbolicum numeri a.

82. Huius formulae ope ex dato quouis logarithmo numerus ei conueniens reperiri poterit. Sit enim propositus logarithmus quicunque u ad canonem, in quo numeri a logarithmus $= 1$ statuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus x proxime ad u accedens, sitque $u = x + \omega$; numerus autem logarithmo x conueniens sit $= y = a^x$, erit numerus logarithmo $u = x + \omega$ respondens $= a^{x+\omega} = z$; fietque

$$z = y\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2(la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4(la)^4}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

quae series ob ω numerum valde paruum, vehementer converget, cuius vsum sequenti exemplo declaremus.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus isti binarii potestati $2^{2^{24}}$ *aequalis*.

Cum sit $2^{24} = 16777216$, erit $2^{2^{24}} = 2^{16777216}$, su-

ſumendisque logarithmis vulgaribus, erit huius numeri logarithmus $= 16777216\ l2$. Cum autem ſit:

$$l2 = 0,3010299956639811952137388 9$$

numeri quaeſiti logarithmus erit:

$$5050445,2597336759320390 63$$

cuius characteriſtica indicat numerum quaeſitum exprimi 5050446 figuris, quae cum omnes exhiberi nequeant, ſufficiet figuras initiales aſſignaſſe, quae ex mantiſſa

$$,2597336759320390 63 = u$$

inueſtigari debent. Ex tabulis autem colligitur, numerum cuius logarithmus proxime ad hunc accedat fore $18.101 = 1,818$; qui ponatur y; cuius logarithmus

$x = 0,2595938788859486 44$, vnde erit

$\omega = 0,0001397970460904 19$. Cum iam ſit

$a = 10$ erit

$la = 2,3025850929940456840179914$ &

$\omega la = 0,000321894594372398$ Deinde erit

$$y = 1,818000000000000000$$

$$\frac{\omega la}{1} y = 585204372569020$$

$$\frac{\omega^2 (la)^2}{1.\ 2} y = 94187062064$$

$$\frac{\omega^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} y = 10106100$$

$$\frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} y = 813$$

$$1818585298569737997$$

hae-

haeque ſunt figurae initiales numeri quaeſiti, cuius omnes figurae excepta forte vltima ſunt iuſtae.

83. Conſideremus quantitates tranſcendentes a circulo pendentes, ſitque vti perpetuo ponimus, radius circuli $=1$, atque y denotet arcum circuli cuius ſinus $=x$ ſeu ſit $y = \text{A ſin}\, x$. Ponatur $x+\omega$ loco x, eritque $z = \text{A ſin}\,(x+\omega)$: ad quem valorem exprimendum quaerantur differentialia ipſius y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{+x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}} \qquad \&c.$$

Ex his ergo inuenitur:

$$\text{A ſin}\,(x+\omega) = \text{A ſin}\, x + \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c.$$

84.

84. Si ergo cognitus fuerit arcus, cuius ſinus eſt $= x$, huius formulae beneficio inueniri poterit arcus, cuius ſinus eſt $x + \omega$, ſi fuerit ω quantitas valde parua. Series autem cuius ſumma addi debet, exprimetur in partibus radii, quae ad arcum facile reducentur: vti ex hoc exemplo intelligetur.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus circuli, cuius ſinus eſt
$= \frac{1}{3} = 0,3333333333.$

Quaeratur ex tabulis ſinuum arcus, cuius ſinus ſit proxime minor, quam $\frac{1}{3}$, qui erit $19^\circ, 28^I$, cuius ſinus eſt $= 0,3332584$. Statuatur ergo $19^\circ, 28^I, = A\,\text{ſin}\,x = y$. erit $x = 0,3332584$, & $\omega = 0,0000749$, atque ex tabulis $\sqrt{(1 - xx)} = \text{coſ}\,y = 0,9428356$. Erit ergo arcus quaeſitus z, cuius ſinus $= \frac{1}{3}$ proponitur

$$= 19^\circ,\ 28^I + \frac{\omega}{\text{coſ}\,y} + \frac{\omega\omega\,\text{ſin}\,y}{2\,\text{coſ}\,y^3},$$

quae expreſſio iam ſufficit; erit ergo per logarithmos calculum inſtituendo:

$$l\omega = 5,8744818$$
$$l\cos y = 9,9744359$$

$$l\frac{\omega}{\cos y} = 5,9000459 \quad ; \quad \frac{\omega}{\cos y} = 0,0000794412$$
$$l\frac{\omega^2}{\cos y} = 1,8000918$$
$$l\frac{\sin y}{\cos y} = 9,5483452$$
$$1,3484370$$
$$l2 = 0,3010300$$

$$l\frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 1,0474070 \quad ; \quad \frac{\omega^2 \sin y}{2\cos y^3} = 0,000000001\text{I}$$

$$\text{Summa} = 0,0000794423$$

qui eſt valor arcus ad $19°, 28'$ addendi, ad quem in minutis ſecundis exprimendum, ſumamus eius logarithmum

qui eſt	5,9000518
a quo ſubtrahatur	4,6855749
	1,2144769

cui log. reſpondet num. $= 16,38615$

qui eſt numerus minutorum ſecundorum; fractionem vero in tertiis & quartis exprimendo fiet arcus quaeſitus

$$= 19°, 28', 16'', 23''', 10^{IV}, 8^{V}, 24^{VI}.$$

85.

85. Simili modo expressio pro cosinibus eruetur; posito enim $y = \text{A} \cos x$; quia est $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, series ante inuenta inuariata manebit, dummodo eius signa permutentur. Erit itaque

$$\text{A} \cos(x+\omega) = \text{A} \cos x - \frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \&c.$$

quae series pariter ac praecedens vehementer semper conuerget, si ex tabulis sinuum proxime veri anguli excerpantur, ita vt plerumque vnicus terminus primus $\frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}}$ sufficiat. Interim tamen si x fuerit ipsi 1 seu sinui toti proxime aequalis, tum ob denominatores admodum paruos illa series conuergentiam amittit. His igitur casibus, quibus x non multum ab 1 deficit, quoniam tum differentiae fiunt minimae, commodius vtemur solita interpolatione.

86. Ponamus quoque pro y arcum cuius tangens datur, sitque $y = \text{A tang}\, x$ & $z = \text{A tang}\,(x+\omega)$ ita vt sit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

Ad quos terminos indagandos quaerantur ipsius y singula differentialia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+xx)^5}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+xx)^6}$$

&c.

vnde colligitur fore:

$$A\,\mathrm{tang}\,(x+\omega) = A\,\mathrm{tang}\,x +$$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3}(xx-\tfrac{1}{3}) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4}(x^3-x) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5}(x^4-2x^2+\tfrac{1}{5}) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6}(x^5-\tfrac{10}{3}x^3+x) + \&c.$$

87. Haec ſeries, cuius lex progreſſionis non adeo manifeſta eſt, transmutari poteſt in aliam formam, cuius progreſſio ſtatim in oculos incurrit. Ponatur in hunc finem $A\,\mathrm{tang}\,x = 90^\circ - u$, vt ſit $x = \cot u = \frac{\mathrm{cof}\,u}{\mathrm{fin}\,u}$; erit $1+xx = \frac{1}{\mathrm{fin}\,u^2}$, vnde fit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx} = \mathrm{fin}\,u^2$.

Cum

Cum deinde sit $dx = \frac{-du}{\sin u^2}$, seu $du = -dx \sin u^2$, fiet vlteriora differentialia sumendo:

$$\frac{ddy}{dx} = 2du \sin u \cos u = du \sin 2u = -dx \sin u \sin 2u$$

ideoque $\frac{ddy}{1\,dx^2} = -\sin u^2 . \sin 2u.$

$$\frac{d^3y}{2\,dx^2} = -du \sin u . \cos u . \sin 2u - du \sin u^2 \cos 2u = -du \sin u . \sin 3u$$

$$= dx \sin u^3 \sin 3u$$

ideoque $\frac{d^3y}{1.2\,dx^3} = + \sin u^3 . \sin 3u$

$$\frac{d^4y}{1.2.3\,dx^3} = du \sin u^3 . (\cos u . \sin 3u + \sin u . \cos 3u) = du \sin u^3 . \sin 4u$$

$$= -dx \sin u^4 . \sin 4u$$

ideoque $\frac{d^4y}{1.2.3\,dx^4} = - \sin u^4 . \sin 4u$

$$\frac{d^5y}{1.2.3.4\,dx^4} = -du \sin u^3 (\cos u \sin 4u + \sin u . \cos 4u) = -du . \sin u . \sin 5u$$

$$= + dx \sin u^5 . \sin 5u$$

ideoque $\frac{d^5y}{1.2.3.4\,dx^5} = + \sin u^5 . \sin 5u$

&c.

Ex quibus colligitur fore:

$$A\,tg(x+\omega) = A\,tg\,x + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin 2u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 . \sin 3u$$

$$- \frac{\omega^4}{4} \sin u^4 \sin 4u + \frac{\omega^5}{5} \sin u^5 . \sin 5u - \frac{\omega^6}{6} \sin u^6 \sin 6u + \&c.$$

vbi cum sit $A\,tg\,x = y$ & $A\,tg\,x = 90° - u$, erit $y = 90° - u$.

88. Si ponatur $A\cot x = y$ & $A\cot(x+\omega) = z$; erit

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3\, dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4\, dx^4} + \&c.$$

Cum autem ſit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, termini huius ſeriei congruent praeter primum cum ante inuentis, exceptis tantum ſignis. Quare ſi ponatur, vt ante $A\tan x = 90° - u$, ſeu $A\cot x = u$, vt ſit $u = y$; erit:

$$A\cot(x+\omega) = A\cot x - \frac{\omega}{1}\,\text{ſin}\,u.\text{ſin}\,u + \frac{\omega^2}{2}\,\text{ſin}\,u^2.\text{ſin}\,2u - \frac{\omega^3}{3}\,\text{ſin}\,u^3\,\text{ſin}\,3u$$
$$+ \frac{\omega^4}{4}\,\text{ſin}\,u^4.\text{ſin}\,4u - \frac{\omega^5}{5}\,\text{ſin}\,u^5.\text{ſin}\,5u + \&c.$$

quae expreſſio immediate ex praecedente ſequitur: quia enim eſt $A\cot(x+\omega) = 90 - A\tan(x+\omega)$ & $A\cot x = 90 - A\tan x$; erit

$$A\cot(x+\omega) - A\cot x = -A\tan(x+\omega) + A\tan x.$$

89. Ex his expreſſionibus multa egregia corollaria conſequuntur, prout loco x & ω dati valores ſubſtituantur. Sit igitur primum $x = 0$; & cum ſit $u = 90° - A\tan x$ fiet $u = 90°$; atque $\text{ſin}\,u = 1$; $\text{ſin}\,2u = 0$; $\text{ſin}\,3u = -1$; $\text{ſin}\,4u = 0$; $\text{ſin}\,5u = 1$; $\text{ſin}\,6u = 0$; $\text{ſin}\,7u = -1$; &c. vnde fiet

$$A\tan\omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \&c.$$

quae eſt notiſſima ſeries exprimens arcum, cuius tangens eſt $= \omega$.

Sit

Sit $x = 1$, erit $A\tan x = 45°$, ideoque $u = 45°$, hinc

$\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 4u = 0$;

$\sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 6u = -1$; $\sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 8u = 0$;

$\sin 9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ &c. Ex quibus fit:

$$A\,tg(1+\omega) = 45° + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16}$$
$$+ \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \&c.$$

Si igitur fit $\omega = -1$; ob $A\tan(1+\omega) = 0$, & $45° = \frac{\pi}{4}$ fiet:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4}$$
$$+ \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \&c.$$

qui valor si loco arcus $45°$ substituatur in illa expressione erit: $A\tan(1+\omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^2} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \&c.$$

Illa autem series maxime est idonea ad valorem ipsius $\frac{\pi}{4}$ proxime inueniendum.

90. Cum sit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$

ter-

termini autem in denominatoribus habentes 2, 6, 10, &c.

$\frac{1}{2.2} - \frac{1}{6.2^3} + \frac{1}{10.2^5} - \frac{1}{14.2^7} + \&c.$ exprimunt $\frac{1}{2} A\,tg \frac{1}{2}$; erit:

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2} A\,tg \tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} \&c.$$

In altera autem formula poſito ω negatiuo, cum ſit

$$A\,tg(1-\omega) = \begin{cases} +\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c. \\ -\frac{\omega}{1.2} - \frac{\omega^2}{2.2} - \frac{\omega^3}{3.2^2} + \frac{\omega^5}{5.2^3} + \frac{\omega^6}{6.2^3} + \frac{\omega^7}{7.2^4} - \&c. \end{cases}$$

ſi fiat $\omega = \frac{1}{2}$; erit:

$$A\,tg \tfrac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \&c. \\ -\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{6.2^9} + \frac{1}{7.2^{11}} - \&c. \end{cases}$$

& terminis per 2, 6, 10, &c. diuiſis ſeorſim ſumtis erit:

$$A\,tg \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} A\,tg \tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \&c.$$

$$- \tfrac{1}{2} A\,tg \tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \&c.$$

ideoque

$$\tfrac{1}{2} A\,tang \tfrac{1}{2} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} + \frac{1}{7.2^4} + \&c.$$

$$- \tfrac{1}{2} A\,tg \tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \&c.$$

qui

qui valor ſi in ſuperiore ſerie ſubſtituatur, atque A tang $\frac{1}{2}$ ipſe in ſeriem conuertatur, reperietur:

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3.2^1} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \&c. \\ -\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \&c. \\ -\frac{1}{1.2^4} + \frac{1}{3.2^{10}} - \frac{1}{5.2^{16}} + \frac{1}{7.2^{22}} - \frac{1}{9.2^{28}} + \&c. \end{cases}$$

90. Sequuntur hae multaeque aliae ſeries ex poſitione $x = 1$: ſin autem ponamus $x = \sqrt{3}$, vt ſit $A\,tang\,x = 60^\circ$, fiet $u = 30$, & $\sin u = \frac{1}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = \frac{1}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = -\frac{1}{2}$; &c. vnde erit:

$$A\,tang(\sqrt{3}+\omega) = 60^\circ + \frac{\omega}{1.2^2} - \frac{\omega^2\sqrt{3}}{2.2^2} + \frac{\omega^3}{3.2^3} - \frac{\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} + \frac{\omega^5}{5.2^6} - \frac{\omega^7}{7.2^8} + \frac{\omega^8\sqrt{3}}{8.2^9} - \frac{\omega^9}{9.2^9} + \frac{\omega^{10}\sqrt{3}}{10.2^{11}} - \frac{\omega^{11}}{11.2^{12}} + \&c.$$

Sin autem ponatur $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vt ſit $A\,tg\,x = 30^\circ$; erit $u = 60^\circ$; atque $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 0$; $\sin 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 6u = 0$; $\sin 7u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; &c.

 qui-

quibus valoribus ſubſtitutis erit:

$$\mathrm{Atg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\omega\right)=30^\circ+\frac{3\omega}{1.2^2}-\frac{3\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3}+\frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5}-\frac{3^3\omega^5}{5.2^6}+\&c.$$

ſi igitur ſit $\omega=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ob $30^\circ=\frac{\pi}{6}$; erit:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.2^3}-\frac{1}{4.2^5}-\frac{1}{5.2^6}+\frac{1}{7.2^8}+\frac{1}{8.2^9}-\&c.$$

91. Reſumamus expreſſionem generalem inuentam:

$$\mathrm{A\,tang}\,(x+\omega)=\mathrm{A\,tang}\,x$$

$$+\frac{\omega}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u-\frac{\omega^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{\omega^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u-\&c.$$

ac ponamus $\omega=-x$, vt ſit $\mathrm{A\,tang}(x+\omega)=0$, eritque

$$\mathrm{A\,tang}\,x=$$

$$\frac{x}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{x^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u+\&c.$$

Cum autem ſit $\mathrm{A\,tang}\,x=90-u=\frac{\pi}{2}-u$;

erit: $x=\cot u=\frac{\mathrm{coſ}\,u}{\mathrm{ſin}\,u}$. Quamobrem erit:

$$\frac{\pi}{2}=u+\mathrm{coſ}u.\mathrm{ſin}u+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cſ}u^2.\mathrm{ſin}2u+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{cſ}u^3.\mathrm{ſin}3u+\tfrac{1}{4}\,\mathrm{cſ}u^4.\mathrm{ſin}4u+\&c.$$

quae ſeries eo magis eſt notatu digna, quod quicunque arcus loco u accipiatur, valor ſeriei ſemper prodeat idem $=\frac{\pi}{2}$. Sin autem ſit $\omega=-2x$, ob $\mathrm{Atg}(-x)=-\mathrm{Atg}\,x$; fiet:

$$2\,\mathrm{A\,tang}\,x=$$

$$\frac{2x}{1}\,\mathrm{ſin}\,u.\,\mathrm{ſin}\,u+\frac{4x^2}{2}\,\mathrm{ſin}\,u^2.\,\mathrm{ſin}\,2u+\frac{8x^3}{3}\,\mathrm{ſin}\,u^3.\,\mathrm{ſin}\,3u+\&c.$$

Cum

Cum autem fit $A\,\text{tang}\,x = \frac{\pi}{2} - u$ & $x = \frac{\text{cof}\,u}{\text{fin}\,u}$, erit:

$$\pi = 2u + \frac{2}{1}\,\text{cof}\,u.\text{fin}\,u + \frac{2^2}{2}\,\text{cof}\,u^2.\text{fin}\,2u + \frac{2^3}{3}\,\text{cof}\,u^3.\text{fin}\,3u + \&c.$$

Sit $u = 45° = \frac{\pi}{4}$; erit $\text{cof}\,u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{fin}\,u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{fin}\,2u = 1$; $\text{fin}\,3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{fin}\,4u = 0$; $\text{fin}\,5u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\text{fin}\,6u = -1$; $\text{fin}\,7u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\text{fin}\,8u = 0$; $\text{fin}\,9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; eritque

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \&c.$$

quae feries etfi diuergit, tamen ob fimplicitatem eft notatu digna.

92. Ponatur in expreffione generali inuenta:

$$\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{\text{fin}\,u.\,\text{cof}\,u}, \quad \text{ob} \quad x = \frac{\text{cof}\,u}{\text{fin}\,u}; \quad \text{erit:}$$

$$A\,\text{tang}(x+\omega) = A\,\text{tang} - \frac{1}{x} = -A\,\text{tang}\,\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + A\,\text{tang}\,x.$$

Hinc ergo obtinebitur fequens expreffio:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\text{fin}\,u}{1\,\text{cof}\,u} + \frac{\text{fin}\,2u}{2\,\text{cof}\,u^2} + \frac{\text{fin}\,3u}{3\,\text{cof}\,u^3} + \frac{\text{fin}\,4u}{4\,\text{cof}\,u^3} + \frac{\text{fin}\,5u}{5\,\text{cof}\,u^5} + \&c.$$

quae pofito $u = 45°$ dat eandem feriem, quam vltimo loco inuenimus. Sin autem ponamus $\omega = -\sqrt{(1+xx)}$

$$\text{ob} \quad x = \frac{\text{cof}\,u}{\text{fin}\,u}, \quad \text{fiet} \quad \omega = -\frac{1}{\text{fin}\,u}, \quad \&$$

A tang

$$\text{A tang}(x - \sqrt{(1+xx)}) - \text{A tang}(\sqrt{(1+xx)} - x)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{A tang}\,\frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang}\,x\right) = -\tfrac{1}{2}\,u,$$

& $\text{A tang}\,x = \frac{\pi}{2} - u$. Hancobrem erit:

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{1}\text{fin}\,u + \tfrac{1}{2}\text{fin}\,2u + \tfrac{1}{3}\text{fin}\,3u + \tfrac{1}{4}\text{fin}\,4u + \&c.$$

Quodſi haec aequatio differentietur erit:

$$o = \tfrac{1}{2} + \text{cof}\,u + \text{cof}\,2u + \text{cof}\,3u + \text{cof}\,4u + \text{cof}\,5u + \&c.$$

cuius ratio ex natura ſerierum recurrentium intelligitur.

93. Si ſimili modo ſeries ante inuentae differentientur, nouae ſeries ſummabiles reperientur. Ac primo quidem ex ſerie:

$$\text{A tang}(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \&c.$$

ſequitur

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \tfrac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \&c.$$

quae oritur ex euolutione fractionis $\frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}$.

Deinde iſta ſeries:

$$\frac{\pi}{2} = u + \text{cof}\,u\,\text{fin}\,u + \tfrac{1}{2}\,\text{cf}\,u^2.\text{fin}\,2u + \tfrac{1}{3}\,\text{cf}\,u^3\,\text{fin}\,3u + \tfrac{1}{4}\,\text{cf}\,u^4\,\text{fin}\,4u + \&c.$$

per differentiationem dabit:

$$o = 1 + \text{cof}\,2u + \text{cof}\,u.\text{cof}\,3u + \text{cof}\,u^2.\text{cof}\,4u + \text{cof}\,u^3\,\text{cof}\,5u + \&c.$$

Denique ſeries $\frac{\pi}{2} = \frac{\text{fin}\,u}{\text{cof}\,u} + \frac{\text{fin}\,2u}{2\,\text{cf}\,u^2} + \frac{\text{fin}\,3u}{3\,\text{cf}\,u^3} + \frac{\text{fin}\,4u}{4\,\text{cf}\,u^4} + \&c.$

dat

$$\text{dat } 0 = \frac{1}{\cos u^2} + \frac{\cos u}{\cos u^3} + \frac{\cos 2u}{\cos u^4} + \frac{\cos 3u}{\cos u^5} + \frac{\cos 4u}{\cos u^6} + \&c.$$

$$\text{seu } 0 = 1 + \frac{\cos u}{\cos u} + \frac{\cos 2u}{\cos u^2} + \frac{\cos 3u}{\cos u^3} + \frac{\cos 4u}{\cos u^4} + \frac{\cos 5u}{\cos u^5} + \&c.$$

94. Imprimis autem expreſſio inuenta:

$$A \operatorname{tang}(x + \omega) =$$

$$A \operatorname{tg} x + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin u + \frac{\omega^3}{3} \sin u^3 . \sin 3u - \&c.$$

exiſtente $x = \cot u$ ſeu $u = A \cot x = 90° - A \operatorname{tang} x$ inſeruiet ad angulum ſeu arcum datae cuique tangenti reſpondentem inueniendum. Sit enim propoſita tangens $= t$, quaeraturque in tabulis tangens ad hanc proxime accedens $= x$, cui reſpondeat arcus $= y$; eritque $u = 90° - y$. Tum ponatur $x + \omega = t$, ſeu $\omega = t - x$; eritque arcus quaeſitus:

$$= y + \frac{\omega}{1} \sin u . \sin u - \frac{\omega^2}{2} \sin u^2 . \sin 2u + \&c.$$

quae regula tum praecipue eſt vtilis, cum tangens propoſita fuerit admodum magna, ac propterea arcus quaeſitus parum a 90° diſcrepet. His enim caſibus ob tangentes vehementer increſcentes, ſolita methodus interpolationum nimium a veritate abducit. Sit ergo propoſitum hoc exemplum.

EXEMPLUM.

Quaeratur arcus, cuius tangens ſit $= 100$, poſito radio $= 1$.

 Ar-

Arcus proxime quaesito aequalis est $89°, 25'$, cuius tangens est $x = 98,217943$ secund.
quae subtrahatur a $t = 100,00000$

remanebit $\omega = 1,782057$

Deinde cum sit $y = 89°, 25'$, erit $u = 0°, 35'$, $2u = 1°, 10'$, $3u = 1°, 45'$, &c. Iam singuli termini per logarithmos inuestigentur.

Ad	$l\omega =$	0, 2509215
add.	$l \sin u =$	8, 0077867
	$l \sin u =$	8, 0077867
	$l\, \omega \sin u. \sin u =$	6, 2664949
		4, 6855749
	subtr. $=$	1, 5809200
Ergo	$\omega \sin u. \sin u =$	38,09956 secund.
Ad	$l\, \omega \sin u^2 =$	6, 2664949
add.	$l\omega =$	0, 2509215
	$l \sin 2u =$	8, 3087941
		4, 8262105
	subr. $l\, 2 =$	0, 3010300
	$l\, \frac{1}{2}\omega^2 \sin u^2. \sin 2u =$	4, 5251805
	subtr.	4, 6855749
	Remanet	9, 8396056
Ergo	$\frac{1}{2}\omega^2 \sin u^2. \sin 2u =$	0, 69120 secund.

Porro

Porro ad	$l\omega^3 =$	0, 7527645	
add.	$l \sin u^3 =$	4, 0233601	
	$l \sin 3u =$	8, 4848479	
		3, 2609725	
fubtr.	$l3 =$	0, 4771213	
		2, 7838512	
fubtr.		4, 6855749	
		8, 0982763	
Ergo	$\frac{1}{3}\omega^3 \sin u^3 \sin 3u =$	0, 01254	fecund.
Denique ad	$l\omega^4 =$	1, 0036860	
add.	$l \sin u^4 =$	2, 0311468	
	$l \sin 4u =$	8, 6097341	
		1, 6445669	
fubtr.	$l4 =$	0, 6020600	
		1, 0425069	
fubtr.		4, 6855749	
		6, 3569320	
Ergo	$\frac{1}{4}\omega^4 \sin u^4 . \sin 4u =$	0, 00023	fecund.

Hinc:

Hinc:

Termini addendi	Termini subtrahendi
38, 09956	0, 69120
0, 01254	0, 00023
38, 11210	0, 69143
subtr. 0, 69143	
37, 42067	

$37,42067 = 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}, 24^{V}, 36^{VI}$.

Quocirca arcus, cuius tangens centies superat radium erit: $89^{\circ}, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}, 24^{V}, 36^{VI}$, neque error ad minuta quarta ascendit; sed in minutis tantum quintis inesse potest, ex quo vere hunc angulum pronunciare poterimus $= 89^{\circ}, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}$. Si tangens adhuc maior proponatur, etiamsi fortasse ω maius prodeat, tamen ob u angulum adhuc minorem, aeque expedite arcus definiri poterit.

95. Cum hic pro y arcum circuli substituerimus, nunc functiones reciprocas in locum y ponamus, cuiusmodi sunt $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$, &c. Sit igitur $y = \sin x$, positoque $x + \omega$ loco x, fiet: $z = \sin(x + \omega)$, atque aequatio

$$z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4\, d^4y}{24dx^4} + \&c.$$

ob $\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; &c. dabit

$$\sin(x + \omega) = \sin x + \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$$

&

& ſumto ω negatiuo erit:

$$\mathrm{ſin}(x-\omega) = \mathrm{ſn}\,x - \omega\,\mathrm{cſ}\,x - \tfrac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{ſn}\,x + \tfrac{1}{6}\omega^3\,\mathrm{cſ}\,x + \tfrac{1}{24}\omega^4\,\mathrm{ſn}\,x - \&c.$$

Quod ſi vero ſtatuatur $y = \mathrm{coſ}\,x$,

ob $\frac{dy}{dx} = -\mathrm{ſn}\,x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\mathrm{cſ}\,x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{ſn}\,x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \mathrm{cſ}\,x$; &c.

erit:

$$\mathrm{coſ}(x+\omega) = \mathrm{cſ}\,x - \omega\,\mathrm{ſn}\,x - \tfrac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{cſ}\,x + \tfrac{1}{6}\omega^3\,\mathrm{ſn}\,x + \tfrac{1}{24}\omega^4\,\mathrm{cſ}\,x - \&c.$$

& facto ω negatiuo erit:

$$\mathrm{coſ}(x-\omega) = \mathrm{cſ}\,x + \omega\,\mathrm{ſn}\,x - \tfrac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{cſ}\,x - \tfrac{1}{6}\omega^3\,\mathrm{ſn}\,x + \tfrac{1}{24}\omega^4\,\mathrm{cſ}\,x + \&c.$$

96. Vſus harum formularum eximius eſt cum in condendis, tum interpolandis tabulis ſinuum & coſinuum. Si enim cogniti fuerint ſinus & coſinus cuiuspiam arcus x, ex iis facili negotio ſinus & coſinus angulorum $x+\omega$ & $x-\omega$ inueniri poſſunt, ſiquidem differentia ω fuerit ſatis exigua: hoc enim caſu ſeries inuentae vehementer couergunt. Ad hoc vero neceſſe eſt, vt arcus ω in partibus radii exprimatur; quod cum arcus 180° ſit:

$$3,14159265358979323846$$

facile fiet: erit enim diuiſione per 180 inſtituta

arcus $1^\circ = 0,017453292519943295769$
arcus $1' = 0,000290888208665721596$
arcus $10'' = 0,000048481368110953599$

EXEMPLUM I.

Inuenire ſinus & coſinus angulorum $45^\circ, 1'$, *&* $44^\circ, 59'$, *ex datis ſinu & coſinu anguli* 45°, *quorum vterque eſt*

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067811865.$$

Ddd Cum

Cum igitur sit :

$\sin x = \cos x = 0,7071067811865$

atque $\omega = 0,0002908882086$

erit ad multiplicationes facilius instituendas :

$2\omega = 0,0005817764173$
$3\omega = 0,0008726646259$
$4\omega = 0,0011635528346$
$5\omega = 0,0014544410432$
$6\omega = 0,0017453292519$
$7\omega = 0,0020362174605$
$8\omega = 0,0023271056692$
$9\omega = 0,0026179938779$

Ergo $\omega \sin x$ & $\omega \cos x$ hoc modo inuenietur :

7	0,00020362174605
0	.
7	0,0000020362174
1	2908882
0	.
6	174532
7	20362
8	2372
1	29
1	2
8	2
6	0

$\omega \sin x = \omega \cos x = 0,00020568902490$

Ergo $\frac{1}{2}\omega \cos x = 0,00010284451245$

per

per ω . 1 . 0,00000002908882
0 . . . .
2 . . 58177
8 . . 23271
4 . . 1163
4 . . 116
5 . . . 14

$\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0,00000002991625$

$\frac{1}{6}\omega^2 \cos x = 0,00000000997208$

per ω . 9 . 0,00000000000261
9 . . . 26
7 . . . 2

$\frac{1}{6}\omega^3 \cos x = 0,00000000000290$

Ergo ad fin 45°, 1′, inueniendum:

Ad $\sin x = 0,7071067811865$
add. $\omega \cos x =$ 2056890249

0,7073124702114
fubtr. $\frac{1}{2}\omega^2 \sin x =$ 299162

0,7073124402952
fubtr. $\frac{1}{6}\omega^3 \cos x =$ 29

fin 45°, 1′, $=$ 0,7073124402923 $=$ cof 44°, 59′.

 At

At ad $\cos 45^\circ, 1'$, inueniendum:

$$A \cos x = 0,7071067811865$$
$$\text{fubr. } \omega \sin x = 2056890249$$
$$0,7069010921616$$
$$\text{fubtr. } \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x = 299162$$
$$0,7069010622454$$
$$\text{add. } \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x = 29$$
$$\cos 45^\circ, 1', = 0,7069010622483 = \sin 44^\circ, 59'.$$

EXEMPLUM II.

Ex datis finu & cofinu arcus 67°, 30′, *inuenire finus & cofinus arcuum* 67°, 31′, & 67°, 29′.

Abfoluamus hunc calculum in fractionibus decimalibus, tantum ad 7 notas, vti tabulae vulgares conftrui folent, ficque negotium facile per logarithmos conficietur. Cum fit $x = 67^\circ, 30'$, &

$\omega = 0,000290888$; erit: $l\omega = 6,4637259$ &

$$l\sin x = 9,9656153 \;;\; l\cos x = 9,5828397$$
$$l\omega = 6,4637259 \;;\; l\omega = 6,4637259$$
$$l\omega \sin x = 6,4293412 \;;\; l\omega \cos x = 6,0465656$$
$$l\tfrac{1}{2}\omega = 6,1626959 \;;\; l\tfrac{1}{2}\omega = 6,1626959$$
$$l\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x = 2,5920371 \;;\; l\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x = 2,2092615$$

ergo:

ergo:

$$\omega \sin x = 0{,}00026874 \quad ; \quad \omega \cos x = 0{,}00011232$$
$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x = 0{,}00000004 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0{,}00000001$$

vnde fit:

$$\sin 67^\circ, 31' = 0{,}9239908 \quad ; \quad \cos 67^\circ, 31' = 0{,}3824147$$
$$\sin 67^\circ, 29' = 0{,}9237681 \quad ; \quad \cos 67^\circ, 29' = 0{,}3829522$$

vbi nequidem terminis $\frac{1}{2}\omega^2 \sin x$ & $\frac{1}{2}\omega^2 \cos x$ erat opus.

97. Ex feriebus quas fupra inuenimus:

$$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x + \&c.$$
$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos x - \&c.$$
$$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega \cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x - \&c.$$
$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \cos x + \&c.$$

fequitur per combinationem fore:

$$\frac{\sin(x+\omega) + \sin(x-\omega)}{2} =$$
$$\sin x - \tfrac{1}{2}\omega^2 \sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4 \sin x - \tfrac{1}{720}\omega^6 \sin x + \&c. = \sin x \cos \omega$$

Et

$$\frac{\sin(x+\omega) - \sin(x-\omega)}{2} =$$
$$\omega \cos x - \tfrac{1}{6}\omega^3 \cos x + \tfrac{1}{120}\omega^5 \cos x - \&c. = \cos x \sin \omega$$

vnde prodeunt feries pro finibus & cofinibus iam fupra inuentae:

$$\cos \omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{720}\omega^6 + \&c.$$
$$\sin \omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 - \tfrac{1}{5040}\omega^7 + \&c.$$

quae eaedem feries ex primis ponendo $x = 0$ confequuntur; cum enim fit $\cos x = 1$ & $\sin x = 0$ prima feries *fin* ω, fecunda vero *cof* ω exhibebit.

98. Ponamus nunc quoque $y = \text{tang}\, x$, vt fit $z = \text{tang}\,(x + \omega)$, erit ob

$$y = \frac{\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cof}\, x^2}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x^3};$$

$$\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\text{cof}\, x^2} + \frac{3\,\text{fin}\, x^2}{\text{cof}\, x^4} = \frac{3}{\text{cof}\, x^4} - \frac{2}{\text{cof}\, x^2};$$

$$\frac{d^4y}{2.4dx^4} = \frac{3\,\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x^5} - \frac{\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x^3};$$

$$\frac{d^5y}{2.4dx^5} = \frac{15}{\text{cof}\, x^6} - \frac{15}{\text{cof}\, x^4} + \frac{2}{\text{cof}\, x^2};$$

vnde fequitur fore:

$$\text{tang}\,(x+\omega) = \text{tg}\, x + \frac{\omega}{\text{cof}\, x^2} + \frac{\omega^2\,\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x^3} + \frac{\omega^3}{\text{cof}\, x^4} + \frac{\omega^4\,\text{fin}\, x}{\text{cof}\, x^5} - \frac{2\,\omega^3}{3\,\text{cof}\, x^2} - \frac{\omega^4\,\text{fin}\, x}{3\,\text{cof}\, x^3};$$

cuius formulae ope ex data cuiusuis anguli tangente inveniri poffunt tangentes angulorum proximorum. Quia vero fuperior feries eft geometrica, ea in vnam fummam collecta erit:

$$\text{tang}\,(x+\omega) = \text{tg}\, x + \frac{\omega + \omega^2\,\text{tg}\, x}{\text{cof}\, x^2 - \omega^2} - \frac{2\,\omega^3}{3\,\text{cof}\, x^2} - \frac{\omega^4\,\text{fin}\, x}{3\,\text{cof}\, x^3}\ \&c.$$

feu $\text{tang}\,(x+\omega) = \frac{\text{fin}\, x\, \text{cof}\, x + \omega}{\text{cof}\, x^2 - \omega^2} - \frac{2\,\omega^3}{3\,\text{cof}\, x^2} - \frac{\omega^4\,\text{fin}\, x}{3\,\text{cof}\, x^3}$ &c.

quae formula in hunc finem commodius adhibetur.

99. Similes expreffiones quoque pro logarithmis finuum, cofinuum & tangentium inueniri poffunt. Sit enim $y =$ logarithmo finus anguli x, quod ita exprimamus

mus $y = l\,\text{fin}\,x$, & $z = l\,\text{fin}(x+\omega)$, ob $\frac{dy}{dx} = \frac{n\,\text{cof}\,x}{\text{fin}\,x}$; erit: $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-n}{\text{fin}\,x^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+n\,\text{cof}\,x}{\text{fin}\,x^3}$ &c. vnde fiet:

$$z = l\,\text{fin}\,(x+\omega) = l\,\text{fin}\,x$$

$$+ \frac{n\omega\,\text{cof}\,x}{\text{fin}\,x} - \frac{n\omega^2}{2\,\text{fin}\,x^2} + \frac{n\omega^3\,\text{cof}\,x}{3\,\text{fin}\,x^3} \text{ \&c.}$$

vbi n denotat numerum, per quem logarithmi hyperbolici multiplicari debent, vt prodeant logarithmi propositi. Sin autem sit

$$y = l\,\text{tang}\,x \quad \& \quad z = l\,\text{tang}\,(x+\omega)$$

fiet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\text{fin}\,x\,\text{cof}\,x} = \frac{2n}{\text{fin}\,2x}; \quad \frac{ddy}{2\,dx^2} = \frac{-2n\,\text{cof}\,2x}{(\text{fin}\,2x)^2};$$

ideoque

$$l\,\text{tang}\,(x+\omega) = l\,\text{tang}\,x + \frac{2n\omega}{\text{fin}\,2x} - \frac{2n\omega^2\,\text{cof}\,2x}{(\text{fin}\,2x)^2} \text{ \&c.}$$

quarum formularum ope logarithmi finuum & tangentium interpolari possunt.

100. Ponamus denotare y arcum cuius finus logarithmus sit $= x$, seu vt sit $y = A\,.\,l\,\text{fin}\,x$, & z esse arcum, cuius finus logarithmus sit $= x + \omega$, seu $z = A\,.\,l\,\text{fin}\,(x+\omega)$; erit $x = l\,\text{fin}\,y$, &

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n\,\text{cof}\,y}{\text{fin}\,y}, \quad \text{vnde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{fin}\,y}{n\,\text{cof}\,y}; \quad \text{erit:}$$

ddy

$$\frac{ddy}{dx} = -\frac{dy}{n\cos y^2} = \frac{dx\sin y}{n^2\cos y^3}; \quad \text{ergo} \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{n^2\cos y^3}:$$

Consequenter

$$z = y + \frac{\omega\sin y}{n\cos y} + \frac{\omega^2\sin y}{2n^2\cos y^3} + \&c.$$

Simili modo si logarithmus cosinus detur, expressio reperietur. Sin autem sit

$$y = A.l\,\text{tang}\,x \quad \& \quad z = A.l\,\text{tang}\,(x+\omega).$$

Eum sit $x = l\,\text{tang}\,y$; fiet:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin y\cos y}, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y\cos y}{n} = \frac{\sin 2y}{2n};$$

quare

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{2\,dy\cos 2y}{2n} = \frac{dx\sin 2y\cos 2y}{2nn}$$

&

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin 2y\cos 2y}{2nn} = \frac{\sin 4y}{4nn}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin 2y.\cos 4y}{2n^3} \&c.$$

hinc

$$z = y + \frac{\omega\sin 2y}{2n} + \frac{\omega^2\sin 2y\cos 2y}{4nn} + \frac{\omega^3\sin 2y.\cos 4y}{12n^3} + \&c.$$

101. Quoniam vsus harum expressionum in condendis tabulis logarithmorum sinuum & tangentium ex antecedentibus facile perspici potest, his diutius non immorabimur. Consideremus ergo adhuc huiusmodi valorem:

$y =$

$y = e^x \sin nx$; fitque $z = e^{x+\omega} \sin n(x+\omega)$ quia est

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\sin nx + n\cos nx)$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = e^x((1-nn)\sin nx + 2n\cos nx)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x((1-3nn)\sin nx + n(3-nn)\cos nx)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x((1-6nn+n^4)\sin nx + n(4-4nn)\cos nx)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x((1-10nn+5n^4)\sin nx + n(5-10nn+n^4)\cos nx)$$

His substitutis & diuisione per e^x instituta erit:

$$e^\omega \sin n(x+\omega) = \sin nx + \omega \sin nx + \frac{(1-nn)}{2}\omega^2 \sin nx$$
$$+ n\omega\cos nx + \frac{2n\omega^2}{2}\cos nx$$
$$+ \frac{(1-3nn)}{6}\omega^3 \sin nx + \frac{(1-6nn+n^4)}{24}\omega^4 \sin nx + \&c.$$
$$+ \frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 \cos nx + \frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 \cos nx + \&c.$$

102. Hinc plurima egregia corollaria deduci possunt; sufficiat autem nobis haec annotasse.

Si fuerit $x = 0$ erit:

$$e^\omega \sin n\omega = n\omega$$
$$+ \frac{2n\omega^2}{2} + \frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 + \frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}\omega^5 + \&c.$$

Si ſit $\omega = -x$, ob $\sin n(x+\omega) = 0$; erit:

$$\tang nx = \frac{nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-nn)}{6}x^3 - \frac{n(4-4nn)}{24}x^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5}{1 - x + \frac{(1-nn)}{2}x^2 - \frac{(1-3nn)}{6}x^3 + \frac{(1-6nn+n^4)}{24}x^4 - \&c.}$$

Generaliter vero ſi ſit $n = 1$ habebitur:

$$e^{\omega}\sin(x+\omega) = \sin x\,(1 + \omega - \tfrac{1}{3}\omega^3 - \tfrac{1}{6}\omega^4 - \tfrac{1}{30}\omega^5 + \tfrac{1}{630}\omega^7 + \&c.)$$
$$+ \omega\cos x\,(1 + \omega + \tfrac{1}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{30}\omega^4 - \tfrac{1}{90}\omega^5 - \tfrac{1}{630}\omega^6 + \&c.)$$

Sin autem ſit $n = 0$, ob $\sin n(x+\omega) = n(x+\omega)$, & $\sin nx = nx$, atque $\cos nx = 1$, ſi vbique per n diuidatur, prodibit:

$$e^{\omega}(x+\omega) = x + \omega x + \tfrac{1}{2}\omega^2 x + \tfrac{1}{6}\omega^3 x + \tfrac{1}{24}\omega^4 x + \&c.$$
$$+ \omega + \omega^2 + \tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{6}\omega^4 + \tfrac{1}{24}\omega^5 + \&c.$$

cuius ſeriei ratio eſt manifeſta.

CAPUT

CAPUT V.

INUESTIGATIO SUMMAE SERIERUM EX TERMINO GENERALI.

103.

Sit Seriei cuiusque terminus generalis $= y$, respondens indici x, ita vt y ſit functio quaecunque ipſius x. Sit porro Sy ſumma ſeu terminus ſummatorius ſeriei, exprimens aggregatum omnium terminorum a primo ſeu alio termino fixo vsque ad y incluſiue. Computabimus autem ſummas ſerierum a termino primo, vnde ſi ſit $x = 1$, dabit y terminum primum, atque Sy hunc y terminum primum exhibebit: ſin autem ponatur $x = 0$, terminus ſummatorius Sy in nihilum abire debet, propterea quod nulli termini ſummandi adſunt. Quocirca terminus ſummatorius Sy eiusmodi erit functio ipſius x, quae euaneſcat poſito $x = 0$.

104. Si terminus generalis y ex pluribus partibus conſtet, vt ſit $y = p + q + r +$ &c. tum ipſa ſeries conſiderari poterit tanquam conflata ex pluribus aliis ſeriebus, quarum termini generales ſint p, q, r, &c. Hinc ſi ſingularum iſtarum ſerierum ſummae fuerint cognitae, ſimul ſeriei propoſitae ſumma poterit aſſignari; erit enim aggregatum ex ſummis ſingularum ſerierum. Hancobrem ſi ſit $y = p + q + r +$ &c. erit $Sy = Sp + Sq + Sr +$ &c. Cum igitur ſupra exhibue-

buerimus summas serierum, quarum termini generales sint quaecunque potestates ipsius x; habentes exponentes integros affirmatiuos; hinc cuiusque seriei, cuius terminus generalis est $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} +$ &c. denotantibus α, β, γ, &c. numeros integros affirmatiuos, seu cuius terminus generalis est functio rationalis integra ipsius x, terminus summatorius inueniri poterit.

105. Sit in serie, cuius terminus generalis seu exponenti x respondens est $= y$, terminus hunc praecedens seu exponenti $x-1$ respondens $= v$, quoniam v oritur ex y, si loco x scribatur $x-1$; erit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

Si igitur y fuerit terminus generalis huius seriei

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & x-1 & x \\ a + & b + & c + & d + & \ldots\ldots & + v & + y \end{matrix}$$

huiusque seriei terminus indici o respondens fuerit $= A$, erit v, quatenus est functio ipsius x, terminus generalis huius seriei:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & x \\ A + & a + & b + & c + & d + & \ldots\ldots & + v \end{matrix}$$

vnde si Sv denotet summam huius seriei, erit $Sv = Sy - y + A$. Sicque posito $x = 0$, quia fit $Sy = 0$ & $y = A$, quoque Sv euanescet.

106. Cum igitur sit $v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} +$ &c. erit per ante ostensa:

$Sv =$

$$Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

atque ob $Sv = Sy - y + A$, erit:

$$y - A = S\frac{dy}{dx} - S\frac{ddy}{2dx^2} + S\frac{d^3y}{6dx^3} - S\frac{d^3y}{24dx^4} + \&c.$$

ideoque habebitur:

$$S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \&c.$$

Si ergo habeantur termini ſummatorii ſerierum, quarum termini generales ſunt $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. ex iis obtinebitur terminus ſummatorius ſeriei, cuius terminus generalis eſt $\frac{dy}{dx}$. Quantitas vero conſtans A ita debet eſſe comparata, vt facto $x = 0$ terminus ſummatorius $S\frac{dy}{dx}$ euaneſcat; hacque conditione facilius determinatur, quam ſi diceremus, eam eſſe terminum indici o reſpondentem in ſerie, cuius terminus generalis ſit $= y$.

107. Ex hoc fonte ſummae poteſtatum numerorum naturalium inueſtigari ſolent. Sit enim $y = x^{n+1}$; quoniam fit $\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n$; $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1.\ 2}x^{n-1}$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-2}$; $\frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-3}$ &c.

 erit

erit his valoribus substitutis:

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}Sx^{n-2} + \&c.$$

atque si vtrinque per $n+1$ diuidatur; erit:

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{n}{2}Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.\ 3}Sx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ 4}Sx^{n-3} + \&c.$$
$$- \text{Const.}$$

quae constans ita accipi debet, vt posito $x = 0$, totus terminus summatorius euanescat. Ope huius ergo formulae ex iam cognitis summis potestatum inferiorum, quarum termini generales sunt x^{n-1}, x^{n-2}, &c. inueniri poterit summa potestatum superiorum termino generali x^n expressarum.

108. Si in hac expressione n denotet numerum integrum affirmatiuum, numerus terminorum erit finitus. Atque adeo hinc summa infinitarum potestatum si $n = 0$, absolute cognoscetur; erit enim: $S.x^0 = x$.
Hacque cognita ad superiores progredi licebit, posito enim $n = 1$; fiet:

$$S.x^1 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}Sx^0 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

si porro ponatur $n = 2$ prodibit:

$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x + Sx - \tfrac{1}{3}Sx^0 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$; deinde
$S.x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}Sx^2 - Sx + \tfrac{1}{4}Sx^0 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$
$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{4}{2}Sx^3 - \tfrac{4}{2}Sx^2 + Sx - \tfrac{1}{5}Sx^0$ siue
$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x.$

Sic-

Sicque porro quarumvis poteſtatum ſuperiorum ſummae ſucceſſiuae ex inferioribus colligentur; hoc autem facilius per ſequentes modos praeſtabitur.

109. Quoniam ſupra inuenimus eſſe:

$$S\frac{dy}{dx} = y + \tfrac{1}{2}S\frac{ddy}{dx^2} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \tfrac{1}{120}S\frac{d^5y}{dx^5} + \&c.$$

Si ponamus $\frac{dy}{dx} = z$; fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}$, &c. tum vero ob $dy = zdx$, erit y quantitas, cuius differentiale eſt $= zdx$, quod hoc modo indicamus, vt ſit $y = \int zdx$. Quanquam autem haec inuentio ipſius y ex dato z a calculo integrali pendet, tamen hic iam iſta forma $\int zdx$ vti poterimus, ſi quidem pro z alias ipſius x functiones non ſubſtituamus, niſi eiusmodi, vt functio illa, cuius differentiale eſt $= zdx$, ex praecedentibus exhiberi queat. His igitur valoribus ſubſtitutis erit:

$$Sz = \int zdx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

adiiciendo eiusmodi conſtantem, vt poſito $x = 0$ ipſa ſumma Sz euaneſcat.

110. Subſtituendo autem loco y in ſuperiori expreſſione litteram z, vel quod eodem redit differentiando iſtam aequationem erit:

$$S\frac{dz}{dx} = z + \tfrac{1}{2}S\frac{ddz}{dx^2} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

ſin

fin autem loco y ponatur $\frac{dz}{dx}$; erit:

$$S\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \&c.$$

Similique modo fi pro y fucceffiue ponantur valores $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. reperietur:

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^6z}{dx^6} - \&c.$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^4} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^7z}{dx^7} - \&c.$$

ficque porro in infinitum.

111. Si nunc ifti valores pro $S\frac{dz}{dx}$; $S\frac{ddz}{dx}$; $S\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. fucçeffiue fubftituantur in expreffione:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \&c.$$

inuenietur expreffio pro Sz, quae conftabit ex his terminis $\int z\,dx$; z; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. quorum coefficientes facilius fequenti modo inueftigabuntur. Ponatur

$$Sz = \int z\,dz + \alpha z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\gamma ddz}{dx^2} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4z}{dx^4} + \&c.$$

atque pro his terminis fui valores fubftituantur, quos obtinent ex praecedentibus feriebus, ex quibus eft:

$\int z dx$

$$\int z\,dx = Sz - \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\alpha z = +\alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\beta dz}{dx} = \beta S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \&c.$$

qui valores additi, cum producere debeant Sz, coefficientes α, β, γ, δ, &c. ex sequentibus aequationibus definientur:

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

&c.

112. Ex his ergo aequationibus ſucceſſiue valores omnium litterarum α, β, γ, δ, &c. definiri poterunt, reperietur autem:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

&c.

ſicque vlterius progrediendo reperientur continuo termini alterni euaneſcentes. Litterae ergo ordine tertia, quinta, ſeptima, &c. omnesque impares erunt $= 0$, excepta prima, quo ipſo haec valorum ſeries contra legem continuitatis impingere videtur. Quamobrem eo magis neceſſe eſt, vt rigide demonſtretur, omnes terminos impares praeter primum neceſſario euaneſcere.

113. Quoniam ſingulae litterae ſecundum legem conſtantem ex praecedentibus determinantur, eae ſeriem recurrentem inter ſe conſtituent. Ad quam explicandam concipiatur iſta ſeries:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

cu-

cuius valor sit $= V$; atque manifestum est hanc seriem recurrentem oriri ex euolutione huius fractionis:

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \&c.}$$

atque si ista fractio alio modo in seriem infinitam secundum potestates ipsius u progredientem resolui queat, necesse est, vt semper eadem series:

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$$

resultet: hocque modo alia lex, qua isti iidem valores α, β, γ, δ, &c. determinantur, eruetur.

114. Quoniam, si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur, erit:

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{120}u^5 + \&c.$$

erit: $\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \&c.$

ideoque $V = \frac{u}{1-e^{-u}}$. Nunc extinguatur ex serie secundus terminus $\alpha u = \frac{1}{2}$, vt fit:

$$V - \frac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

erit: $V - \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}u(1+e^{-u})}{1-e^{-u}}$. Multiplicentur numerator ac denominator per $e^{\frac{1}{2}u}$, eritque

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{u(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u})}{2(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u})},$$

& quantitatibus $e^{\frac{1}{2}u}$ & $e^{-\frac{1}{2}u}$ In series conuersis fiet:

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{2(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2.4.6} + \frac{u^4}{2.4.6.8.10} + \&c.)}$$

siue

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} + \&c.}$$

115. Cum igitur in hac fractione potestates impares prorsus desint, in eius quoque euolutione potestates impares omnino nullae ingredientur; quare cum $V - \frac{1}{2}u$ aequetur isti seriei:

$$1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \epsilon u^5 + \zeta u^6 + \&c.$$

coefficientes imparium potestatum γ, ϵ, η, ι, &c. omnes euanescent. Sicque ratio manifesta est, cur in serie:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \&c.$$

termini ordine pares omnes praeter secundum sint $= 0$, neque tamen lex continuitatis vim patiatur. Erit ergo

$$V = 1 + \frac{1}{2}u + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \varkappa u^{10} + \&c.$$

litterisque β, δ, ζ, θ, $\varkappa$, &c. per euolutionem superioris fractionis determinatis, obtinebimus terminum summatorium Sz seriei, cuius terminus generalis est $= z$, indici x respondens, hoc modo expressum:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\delta d^3 z}{dx^3} + \frac{\zeta d^5 z}{dx^5} + \frac{\theta d^7 z}{dx^7} + \&c.$$

116.

116. Quia series $1 + \epsilon u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$ oritur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \&c.}$$

litterae ϵ, δ, ζ, θ, &c. hanc legem tenebunt, vt sit:

$$\epsilon = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\delta = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\epsilon}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\zeta = \frac{1}{2.4.6.12} - \frac{\delta}{4.6} - \frac{\epsilon}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6\ldots14}$$

$$\theta = \frac{1}{2.4\ldots16} - \frac{\zeta}{4.6} - \frac{\delta}{4.6.8.10} - \frac{\epsilon}{4.6\ldots14} - \frac{1}{4.6\ldots18}.$$

Hi autem valores alternatiue fiunt affirmatiui & negatiui.

117. Si igitur harum litterarum alternae capiantur negatiue, ita vt sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z - \frac{\epsilon\,dz}{dx} + \frac{\delta\,d^3z}{dx^3} - \frac{\zeta\,d^5z}{dx^5} + \frac{\theta\,d^7z}{dx^7} - \&c.$$

litterae ϵ, δ, ζ, θ, &c. definientur ex hac fractione:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} - \&c.}$$

 eam

eam euoluendo in seriem:

$$1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \&c.$$

quocirca erit:

$$\beta = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\delta = \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6\ldots14} - \frac{1}{2.4\ldots12}$$

&c.

nunc autem omnes termini fient negatiui.

118. Ponamus ergo $\beta = -A$; $\delta = -B$; $\zeta = -C$; &c. vt fit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{A\,dz}{dx} - \frac{B\,d^3z}{dx^3} + \frac{C\,d^5z}{dx^5} - \frac{D\,d^7z}{dx^7} + \&c,$$

atque ad litteras A, B, C, D, &c. definiendas consideretur haec series:

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \&c.$$

quae oritur ex euolutione huius fractionis:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} - \&c.}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6\ldots18} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} - \&c.}$$

vel consideretur ista series:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c. = s$$

quae oritur ex euolutione huius fractionis:

$s =$

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6...14} + \&c.}$$

Cum autem sit:

$$\operatorname{cof} \tfrac{1}{2} u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \&c.$$

$$\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4...14} + \&c.$$

sequitur fore: $s = \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2} u}{2 \operatorname{fin} \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u.$

Quare si cotangens arcus $\frac{1}{2} u$ in feriem conuertatur, cuius termini fecundum poteftates ipfius u procedant, ex ea cognofcentur valores litterarum A, B, C, D, E, &c.

119. Cum igitur fit $s = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u$; erit $\frac{1}{2} u =$ A cot $2s$, & differentiando erit $\frac{1}{2} du = \frac{-2 ds}{1 + 4ss}$ feu $4ds + du + 4ss du = 0$, fiue $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$.

Quia autem eft: $s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - \&c.$

erit:

$$\begin{aligned}
\frac{4ds}{du} &= -\frac{4}{uu} - 4A - 3.4Bu^2 - 5.4Cu^4 - 7.4Du^6 - \&c.\\
1 &= \phantom{-\frac{4}{uu} - {}} 1\\
4ss &= \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \&c.\\
& + 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \&c.\\
& + 4BBu^6 + \&c.
\end{aligned}$$

per-

perductis his terminis homogeneis ad cyphram fiet:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

&c.

Ex quibus formulis iam manifesto liquet, singulos hos valores esse affirmatiuos.

120. Quoniam vero denominatores horum valorum fiunt vehementer magni, calculumque non mediocriter impediunt; loco litterarum A, B, C, D, &c.

has

has nouas introducamus:

$$A = \frac{\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{\beta}{1.2.3.4.5}$$

$$C = \frac{\gamma}{1.2.3\ldots.7}$$

$$D = \frac{\delta}{1.2.3\ldots\ldots 9}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{1.2.3\ldots\ldots\ldots 11} \quad \text{\&c.}$$

Atque reperietur fore:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{2}{3}\alpha^2$$

$$\gamma = 2.\frac{3}{3}\alpha\beta$$

$$\delta = 2.\frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8.7}{4.5}\beta^2$$

$$\varepsilon = 2.\frac{5}{3}\alpha\delta + 2.\frac{10.9.8}{1\ldots.5}\beta\gamma$$

$$\zeta = 2.\frac{12}{1.2.3}\alpha\varepsilon + 2.\frac{12.11.10}{1\ldots\ldots 5}\beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{1\ldots\ldots\ldots 7}\gamma\gamma$$

$$\eta = 2.\frac{14}{1.2.3}\alpha\zeta + 2.\frac{14.13.12}{1\ldots\ldots 5}\beta\varepsilon + 2.\frac{14.13.12.11.10}{1\ldots\ldots\ldots\ldots 7}\gamma\delta$$

&c.

121. Commodius autem vtemur his formulis:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\beta$$

$$\delta = \frac{8}{3} \cdot \alpha\gamma + \frac{8.\ 7.\ 6}{3.\ 4.\ 5} \cdot \frac{\beta\beta}{2}$$

$$\epsilon = \frac{10}{3} \cdot \alpha\delta + \frac{10.\ 9.\ 8}{3.\ 4.\ 5} \cdot \beta\gamma$$

$$\zeta = \frac{12}{3} \cdot \alpha\epsilon + \frac{12.11.10}{3.\ 4.\ 5} \cdot \beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \cdot \frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3} \cdot \alpha\zeta + \frac{14.13.12}{3.\ 4.\ 5} \cdot \beta\epsilon + \frac{14.13.12.11.10}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \cdot \gamma\delta$$

$$\theta = \frac{16}{3}\,\alpha\eta + \frac{16.15.14}{3.\ 4.\ 5} \cdot \beta\zeta + \frac{16.15\ .\ .\ 12}{3.4\ .\ .\ .\ 7} \cdot \gamma\epsilon + \frac{16.15\ .\ .\ 10}{3.4\ .\ .\ .\ .\ 9} \cdot \frac{\delta\delta}{2}$$

&c.

Ex hac igitur lege, secundum quam calculus non difficulter instituitur, si inuenti fuerint valores litterarum α, β, γ, δ, &c. tum seriei cuiuscunque, cuius terminus generalis seu indici x conueniens fuerit $= z$, terminus summatorius ita exprimetur, vt sit:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\alpha\,dz}{1.2.3.dx} - \frac{\beta\,d^3z}{1.2.3.4.5\,dx^3} + \frac{\gamma\,d^5z}{1.2....7\,dx^5}$$

$$- \frac{\delta\,d^7z}{1.2......9dx^7} + \frac{\epsilon\,d^9z}{1.2....11dx^9} - \frac{\zeta\,d^{11}z}{1.2....13dx^{11}} + \&c.$$

istae autem litterae α, β, γ, δ, &c. sequentes valores habere inuentae sunt:

siue

$\alpha =$	$\frac{1}{2}$	$1.2\alpha = 1$
$\beta =$	$\frac{1}{6}$	$1.2.3\beta = 1$
$\gamma =$	$\frac{1}{6}$	$1.2.3.4\gamma = 4$
$\delta =$	$\frac{3}{10}$	$1.2.3.4.5\delta = 36$
$\epsilon =$	$\frac{5}{6}$	$1.2.3\,.\,.\,6\epsilon = 600$
$\zeta =$	$\frac{691}{210}$	$1.2.3\,.\,.\,7\zeta = 24.691$
$\eta =$	$\frac{35}{2}$	$1.2.3\,.\,.\,8\eta = 20160.35$
$\theta =$	$\frac{3617}{30}$	$1.2.3\,.\,.\,9\theta = 12096.3617$
$\iota =$	$\frac{43867}{42}$	$1.2.3\,.\,.\,10\iota = 86400.43867$
$\kappa =$	$\frac{1222277}{110}$	$1.2.3\,.\,.\,11\kappa = 362880.1222277$
$\lambda =$	$\frac{854513}{6}$	$1.2.3\,.\,.\,12\lambda = 79833600.854513$
$\mu =$	$\frac{1181820455}{546}$	$1.2.3\,.\,.\,13\mu = 11404800.1181820455$
$\nu =$	$\frac{76977927}{2}$	$1.2.3\,.\,.\,14\nu = 109109145600.76977927$
$\xi =$	$\frac{23749461029}{30}$	$1.2.3\,.\,.\,15\xi = 43589145600.23749461029$
$\pi =$	$\frac{3615841276005}{462}$	$1.2.3\,.\,.\,16\pi = 45287424000.8615841276005$
		&c.

122.

122. Numeri isti per vniuersam serierum doctrinam amplissimum habent vsum. Primum enim ex his numeris formari possunt vltimi termini in summis potestatum parium, quos non aeque ac reliquos terminos ex summis praecedentium reperiri posse supra annotauimus. In potestatibus enim paribus postremi summarum termini sunt x per certos numeros multiplicati; qui numeri pro potestatibus II; IV; VI; VIII; &c. sunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, &c. signis alternantibus affecti. Oriuntur autem hi numeri si valores litterarum α, β, γ, δ, &c. supra inuenti respectiue diuidantur per numeros impares 3, 5, 7, &c. vnde isti numeri, qui ab Inuentore *Iacobo Bernoullio* vocari solent Bernoulliani erunt:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\epsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$\theta =$

$$\frac{\theta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$

$$\frac{\varkappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283.617}{330}$$

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11.131.593}{2.3.23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M} =$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{6} = \mathfrak{N} = \frac{13.657931}{6}$$

$$\frac{\xi}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P}$$

&c.

123. Isti igitur numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; &c. immediate ex sequentibus aequationibus inueniri poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{2}{7} \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{2}{9} \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{9} \mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10.9}{1.2} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \cdot \frac{2}{11} \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$\mathfrak{F} =$

$$\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{1}{13}\mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14.13}{1.2}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14.13.12.11}{1.2.3.4}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

&c.

quarum aequationum lex per ſe eſt manifeſta, ſi tantum notetur, vbi quadratum cuiuspiam litterae occurrit, eius coefficientem duplo eſſe minorem, quam ſecundum regulam eſſe debere videatur. Reuera autem termini, qui continent producta ex disparibus litteris, bis occurrere cenſendi ſunt, erit enim verbi gratia:

$$13\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2}\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\mathfrak{C}\mathfrak{C} +$$

$$\frac{12.11.10\ldots 5}{1.2.3\ldots 8}\mathfrak{D}\mathfrak{B} + \frac{12.11.10\ldots 11}{1.2.3\ldots 3}\mathfrak{E}\mathfrak{A}$$

124. Deinde vero etiam iidem numeri α, β, γ, δ, &c. ingrediuntur in expreſſiones ſummarum ſerierum fractionum in hac forma generali:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{\&c.}$$

quoties n eſt numerus par affirmatiuus, contentarum. Has enim ſummas in Introductione per poteſtates ſemiperipheriae circuli π radio exiſtente $= 1$ expreſſas dedimus, atque in harum poteſtatum coefficientibus iſti ipſi numeri α, β, γ, δ, &c. ingredi deprehenduntur. Quo autem haec conuenientia non caſu euenire, ſed neceſſario locum habere intelligatur, has easdem ſummas ſingu-

gulari modo inuestigemus, quo lex summarum illarum facilius patebit. Quoniam supra inuenimus esse:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \&c.$$

binis terminis coniungendis habebimus:

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} - \&c.$$

vnde colligimus fore:

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \&c. = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn}\cot.\frac{m}{n}\pi$$

Statuamus nunc $n=1$, & pro m ponamus u; vt fit:

$$\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} + \frac{1}{16-u^2} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Resoluantur singulae istae fractiones in series:

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \&c.$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \&c.$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \&c.$$

&c.

125. Quod si ergo ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = \mathfrak{a}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = \mathfrak{b}$$

1 +

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = \mathfrak{c}$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = \mathfrak{d}$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = \mathfrak{e}$$

&c.

ſuperior ſeries transmutabitur in hanc:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \mathfrak{e}u^8 + \mathfrak{f}u^{10} + \&c. = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Cum igitur in §. 118. litterae A, B, C, D, &c. ita comparatae ſint inuentae, vt poſito:

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

ſit $s = \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}u$, erit poſito πu loco $\frac{1}{2}u$ ſeu $2\pi u$ loco u

$$\tfrac{1}{2}\cot\pi u = \frac{1}{2\pi u} - A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - 2^7 D\pi^7 u^7 - \&c.$$

vnde per $\frac{\pi}{u}$ multiplicando erit:

$$\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3 B\pi^4 u^2 - 2^5 C\pi^6 u^4 - \&c.$$

hincque ſequitur fore:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + 2^7 D\pi^8 u^6 + \&c.$$

Quia igitur modo inuenimus eſſe:

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \&c.$$

neceſſe eſt vt ſit:

$\mathfrak{a} =$

$$\mathfrak{a} = 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1.2.3}.\pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}.\pi^2$$

$$\mathfrak{b} = 2^3 B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1.2.3.4.5}.\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}.\pi^4$$

$$\mathfrak{c} = 2^5 C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1.2.3....7}\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2.....6}\pi^6$$

$$\mathfrak{d} = 2^7 D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1.2.3....9}\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2......8}\pi^8$$

$$\mathfrak{e} = 2^9 E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1.2.3...11}\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2...,10}\pi^{10}$$

$$\mathfrak{f} = 2^{11} F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1.2.3...13}\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2....12}\pi^{12}$$

&c.

126. Ex hoc ergo tam facili ratiocinio non ſolum omnes ſeries poteſtatum reciprocarum, quas §. praeced. exhibuimus, expedite ſummantur; ſed ſimul quoque perſpicitur, quemadmodum iſtae ſummae ex cognitis valoribus litterarum α, β, γ, δ, ε, &c. vel etiam ex numeris Bernoullianis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. formentur. Quare cum iſtorum numerorum quindecim §. 122. definiuerimus, ex iis ſummae omnium poteſtatum parium vsque ad ſummam huius ſeriei incluſiue aſſignari poterunt:

$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} +$ &c. erit enim huius ſeriei ſumma $= \frac{2^{29}\pi}{1.2.3...31}\pi^{30} = \frac{2^{29}\mathfrak{P}}{1.2.....30}\pi^{30}$.

 At-

Atque si quis voluerit has summas vlterius determinare, id continuandis numeris α, β, γ, &c. vel his $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. facillime praestabitur.

127. Origo ergo horum numerorum α, β, γ, δ, &c. vel inde formatorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. potissimum debetur euolutioni cotangentis cuiusuis anguli in seriem infinitam. Cum enim sit

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \&c.$$

erit:

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u,$$

si igitur loco coefficientium A, B, C, D, &c. valores ipsorum substituantur, reperietur:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\beta u^4}{1.2\ldots 5} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots 7} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots 9} + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

atque numeros Bernoullianos adhibendo erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2\ldots 6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2\ldots 8} + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

ex quibus seriebus per differentiationem innumerabiles aliae deduci possunt, sicque infinitae series summari, in quas isti numeri notatu tantopere digni ingrediuntur.

128. Sumamus aequationem priorem, quam per u multiplicemus, vt sit:

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\beta u^5}{1.2\ldots 5} + \frac{\gamma u^7}{1.2\ldots 7} + \frac{\delta u^9}{1.2\ldots 9} + \&c. = u - \frac{uu}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

quae

quae differentiata ac per du diuisa dat:

$$\frac{\alpha u^2}{1.2}+\frac{\beta u^4}{1.2.3.4}+\frac{\gamma u^6}{1.2\ldots6}+\frac{\delta u^8}{1.2\ldots8}+\&c.=1-u\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{uu}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

&, si denuo differentietur erit:

$$\frac{\alpha u}{1}+\frac{\beta u^3}{1.2.3}+\frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5}+\&c.=-\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{u}{(\sin\frac{1}{2}u)^2}-\frac{uu\cos\frac{1}{2}u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^3}$$

Sin autem altera aequatio differentietur erit:

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1}+\frac{\mathfrak{B}u^3}{1.2.3}+\frac{\mathfrak{C}u^5}{1.2\ldots5}+\frac{\mathfrak{D}u^7}{1.2\ldots7}=-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u+\frac{u}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

Ex his ergo si ponatur $u=\pi$, ob $\cot\frac{1}{2}\pi=0$, & $\sin\frac{1}{2}u=1$, sequuntur istae summationes:

$$1=\frac{\alpha\pi^2}{1.2.3}+\frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots9}+\&c.$$

$$1+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\alpha\pi^2}{1.2}+\frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4}+\frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots6}+\frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots8}+\&c.$$

$$\pi=\frac{\alpha\pi}{1}+\frac{\beta\pi^3}{1.2.3}+\frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5}+\frac{\delta\pi^7}{1.2.3\ldots7}\ \&c.$$

seu $$1=\alpha+\frac{\beta\pi^2}{1.2.3}+\frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{\delta\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\&c.$$

a qua si prima subtrahatur remanebit:

$$\alpha=\frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1.2.3}+\frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3\ldots7}+\&c.$$

 Tum

Tum vero erit:

$$1 = \frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1.2.3\ldots.8} + \&c.$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}\pi}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1.2.3\ldots.7} + \&c.$$

seu $\frac{1}{4} = \frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1.2.3\ldots.7} + \&c.$

129. Ex tabula valorum numerorum α, β, γ, δ, &c. quam ſupra §. 121. exhibuimus, patet eos primum decreſcere tum vero iterum creſcere, & quidem in infinitum. Operae igitur pretium erit inueſtigare, in quanam ratione hi numeri, poſtquam iam vehementer longe fuerint continuati, vlterius progredi pergant. Sit igitur ϕ numerus quicunque huius ſeriei numerorum α, β, γ, δ, &c. longiſſime ab initio remotus, & ſit ψ numerorum ſequens. Quoniam per hos numeros ſummae poteſtatum reciprocarum definiuntur, ſit $2n$ exponens poteſtatis, in cuius ſumma numerus ϕ ingreditur, erit $2n+2$ exponens poteſtatis numero ψ reſpondens, atque numerus n iam erit vehementer magnus. Hinc ex §. 125. habebitur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{2^{2n-1}\phi}{1.2.3\ldots(2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \&c. = \frac{2^{2n+1}\psi}{1.2.3\ldots(2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Quod

Quod si ergo haec per istam diuidatur, erit:

$$\frac{1+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\&c.}{1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\&c.}=\frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)}\,\frac{\pi^2}{\phi}$$

Quia vero n est numerus vehementer magnus, ob seriem vtramque proxime $=1$, erit:

$$\frac{\psi}{\phi}=\frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2}=\frac{nn}{\pi\pi}.$$

Cum igitur n designet, quotus sit numerus ϕ a primo α computatus, se habebit hic numerus ϕ ad suum sequentem ψ vt π^2 ad n^2, quae ratio, si n fuerit numerus infinitus, veritati penitus sit consentanea. Quoniam est fere $\pi\pi=10$, si ponatur $n=100$; erit terminus centesimus circiter millies minor suo sequente. Constituunt ergo numeri α, β, γ, δ, &c. pariter ac Bernoulliani 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, &c. seriem maxime diuergentem, quae etiam magis increscat, quam vlla series geometrica terminis crescentibus procedens.

130. Inuentis ergo his valoribus numerorum α, β, γ, δ, &c. seu 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, &c. si proponatur series, cuius terminus generalis z fuerit functio quaecunque ipsius indicis x, terminus summatorius Sz huius seriei sequenti modo exprimetur, vt sit:

 $Sz=$

$$S z = \int z\,dx + \tfrac{1}{2} z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1.2\,dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3 z}{1.2.3.4\,dx^3}$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5 z}{1.2.3\ldots5\,dx^5} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^7 z}{1.2.3\ldots8\,dx^7}$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9 z}{1.2.3\ldots10\,dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11} z}{1.2.3\ldots12\,dx^{11}}$$
$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13} z}{1.2.3\ldots14\,dx^{13}} - \frac{3617}{510}:\frac{d^{15} z}{1.2.3\ldots16\,dx^{15}}$$
$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17} z}{1.2.3\ldots18\,dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot\frac{d^{19} z}{1.2.3\ldots20\,dx^{19}}$$
$$+ \frac{854513}{138}\cdot\frac{d^{21} z}{1.2.3\ldots22\,dx^{21}} - \frac{236364091}{2730}\cdot\frac{d^{23} z}{1.2.3\ldots24\,dx^{23}}$$
$$+ \frac{8553103}{6}\cdot\frac{d^{25} z}{1.2.3\ldots26\,dx^{25}} - \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{d^{27} z}{1.2.3\ldots28\,dx^{27}}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{d^{29} z}{1.2.3\ldots30\,dx^{29}} - \&c.$$

Si igitur innotuerit integrale $\int z\,dx$, seu quantitas illa cuius differentiale sit $= z\,dx$, terminus summatorius ope continuae differentiationis inuenietur. Perpetuo autem notandum est ad hanc expressionem semper eiusmodi constantem addi oportere, vt summa fiat $= 0$, si index x ponatur in nihilum abire.

131. Si igitur z fuerit functio rationalis integra ipsius x, quia eius differentialia tandem euanescunt, terminus summatorius per expressionem finitam exprimetur; id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EX-

EXEMPLUM I.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei:

$$\overset{1}{1}+\overset{2}{9}+\overset{3}{25}+\overset{4}{49}+\overset{5}{81}+\ldots\ldots+\overset{x}{(2x-1)^2}$$

Quia hic est $z=(2x-1)^2=4xx-4x+1$;

erit $\int z\,dx=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x$,

ex huius enim differentiatione oritur:

$$4xxdx-4xdx+dx=zdx.$$

Deinde vero per differentiationem erit:

$$\frac{dz}{dx}=8x-4$$

$$\frac{ddz}{dx^2}=8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=0 \quad \&c.$$

Hinc erit terminus summatorius quaesitus $=$

$\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+2xx-2x+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\pm$ Const.

qua constante tolli debent termini $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; vnde erit:

$$S(2x-1)^2=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x=\frac{x}{3}(2x-1)(2x+1).$$

Sic erit posito $x=4$ summa 4 primorum terminorum

$$1+9+25+49=\frac{4}{3}.7.9=84.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius huius seriei:

$$\overset{1}{1}+\overset{2}{27}+\overset{3}{125}+\overset{4}{343}+\ldots\ldots\overset{x}{(2x-1)^3}$$

Quia

Quia est $z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; erit: $\int z\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$; $\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6$; $\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 48$; sequentia euanescunt. Quare erit

$$S(2x-1)^3 = \begin{array}{l} 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x \\ \quad + 4x^3 - 6x^2 + 3x - \frac{1}{2} \\ \qquad + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{15} \end{array}$$

hoc est $S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1)$. Sic erit posito $x = 4$ $\quad 1 + 27 + 125 + 343 = 16.31 = 496$.

132. Ex hac inuenta generali expressione pro termino summatorio sponte sequitur ille terminus summatorius, quem superiori parte pro potestatibus numerorum naturalium dedimus, cuiusque demonstrationem ibi tradere non licuerat. Quod si enim ponamus $z = x^n$, erit vtique $\int z\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$; differentialia vero ita se habebunt:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \;.\;.\;.\;.\;.\; (n-6)x^{n-7} \quad \&c.$$

Ex

Ex his ergo deducetur ſequens terminus ſummatorius reſpondens termino generali x^n; ſcilicet

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1}$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ 4}x^{n-3}$$

$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}x^{n-5}$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-6)}{2.\ 3.\ \ldots\ldots\ 8}x^{n-7}$$

$$+\frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-8)}{2.\ 3.\ \ldots\ldots\ 10}x^{n-9}$$

$$-\frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-10)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 12}x^{n-11}$$

$$+\frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-12)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 14}x^{n-13}$$

$$-\frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-14)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 16}x^{n-15}$$

$$+\frac{43867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-16)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 18}x^{n-17}$$

$$-\frac{174611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-18)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 20}x^{n-19}$$

$$+\frac{854513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-20)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 22}x^{n-21}$$

$$-\frac{236364091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-22)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 24}x^{n-23}$$

$$+\frac{8553103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-24)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 26}x^{n-25}$$

$$-\frac{23749461029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-26)}{2.3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;28}x^{n-27}$$

$$+\frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-28)}{2.3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;30}x^{n-29}\text{ \&c.}$$

quae expreſſio non differt ab ea, quam ſupra dedimus, niſi quod hic numeros Bernoullianos 𝔄, 𝔅, ℭ, &c. introduximus, cum ſupra vſi eſſemus numeris α, β, γ, δ, &c. interim tamen conſenſus ſponte elucet. Hinc ergo terminos ſummatorios omnium poteſtatum vsque ad poteſtatem trigeſimam incluſiue exhibere licuit; quae inveſtigatio, ſi alia via fuiſſet ſuſcepta, ſine longiſſimis & taedioſiſſimis calculis abſolui non potuiſſet.

133. Iam ſupra §. 59. ſimilem fere expreſſionem pro termino ſummatorio dedimus ex termino generali definiendo. Ea enim pariter ſecundum differentialia termini generalis procedebat; ab iſta autem in hoc potisſimum erat diuerſa, quod illa non integrale $\int z\,dx$ requirebat, ſingula vero termini generalis differentialia per certas ipſius x functiones habebat multiplicata. Eandem igitur expreſſionem ſequenti modo ad naturam ſerierum magis accommodato denuo eliciamus, ex quo ſimul lex clarius patebit, ſecundum quam coefficientes illi differentialium progrediuntur. Sit igitur ſeriei terminus generalis z, functio quaecunque ipſius indicis x, terminus vero ſummatorius quaeſitus ſit s: qui quoniam vti vidimus eiusmodi erit functio ipſius x, vt euaneſcat poſito $x = 0$, erit per ea, quae ſupra de natura huiusmodi functionum demonſtrauimus:

$$s - \frac{xds}{1dx} + \frac{x^2dds}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4s}{1.2.3.4dx^4} - \&c. = 0.$$

134. Quia s denotat summam omnium terminorum seriei a primo vsque ad vltimum z, perspicuum est si in s loco x ponatur $x-1$, tum priorem summam vltimo termino z mulctari: erit scilicet

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.$$

ideoque $$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \&c.$$

quae aequatio modum suppeditat ex dato termino summatorio s definiendi terminum generalem, quod quidem per se est facillimum. Ex idonea autem combinatione huius aequationis cum ea, quam §. praeced. inuenimus, valor ipsius s per x & z determinari poterit. Ponamus in hunc finem esse:

$$s - Az + \frac{Bdz}{dx} - \frac{Cddz}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \&c. = 0$$

vbi A, B, C, D, &c. denotent coefficientes necessarios siue constantes siue variabiles: nam cum sit

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} - \&c.$$

si hinc valores pro z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, &c. in superiori aequatione substituantur, prodibit:

 $s = s$

$$s = s$$

$$-Az = -\frac{Ads}{dx} + \frac{Adds}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \&c.$$

$$+\frac{Bdz}{dx} = +\frac{Bdds}{dx^2} - \frac{Bd^3s}{2dx^3} + \frac{Bd^4s}{6dx^4} - \frac{Bd^5s}{24dx^5} + \&c.$$

$$-\frac{Cddz}{dx^2} = -\frac{Cd^3s}{dx^3} + \frac{Cd^4s}{4dx^4} - \frac{Cd^5s}{6dx^5} + \&c.$$

$$+\frac{Dd^3z}{dx^3} = +\frac{Dd^4s}{dx^4} - \frac{Dd^5s}{2dx^5} + \&c.$$

$$-\frac{Ed^4z}{dx^4} = -\frac{Ed^5s}{dx^5} + \&c.$$

&c.

quae igitur ſeries iunctim ſumtae aequales erunt nihilo.

135. Cum ergo ante inuenimus eſſe:

$$0 = s - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2dds}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \frac{x^5d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

ſi ſuperior aequatio huic aequalis ſtatuatur, prodibunt ſequentes litterarum A, B, C, D, &c. denominationes:

$$A = x$$

$$B = \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2}$$

$$C = \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6}$$

$$D = \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24}$$

$$E = \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \qquad \&c.$$

His

His igitur litterarum A, B, C, D, &c. valoribus inuentis, ex termino generali z terminus summatorius $s = Sz$ ita determinabitur, vt fit:

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \&c.$$

136. Cum autem fiat:

$$A = x$$
$$B = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$C = \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x$$
$$D = \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{24}xx \qquad \&c.$$

patet hos coefficientes esse eosdem, quos supra §. 59. habuimus, vnde ista termini summatorii expressio eadem est, quam ibi inuenimus; eritque propterea:

$$A = Sx^0 = S1$$
$$B = \tfrac{1}{2}Sx^1 - \tfrac{1}{2}x$$
$$C = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3$$
$$E = \tfrac{1}{24}Sx^4 - \tfrac{1}{24}x^4 \qquad \&c.$$

Hinc ergo erit:

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \&c.$$
$$+ \frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \&c.$$

Quodsi autem in termino generali z ponatur $x = 0$, prodibit terminus indici $= 0$ respondens; qui si ponatur $= a$,

erit: $a = z - \frac{xdz}{dx} + \frac{x^2 ddz}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3 z}{6dx^3} + \&c.$ ideoque

$$\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2 ddz}{2dx^2} + \frac{x^3 d^3 z}{6dx^3} - \frac{x^4 d^4 z}{24dx^4} + \&c. = z - a,$$

quo valore substituto habebitur:

$$Sz = (x+1)z - a - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4 z}{24dx^4}Sx^4 - \&c.$$

Cognitis ergo summis potestatum, hinc pro quouis termino generali ei conueniens terminus summatorius exhiberi potest.

137. Quoniam ergo geminam inuenimus expressionem termini summatorii Sz pro termino generali z, earumque altera formulam integralem $\int z dx$ continet, si istae duae expressiones sibi aequales ponantur, obtinebitur valor ipsius $\int z dx$ per seriem expressus. Cum enim sit:

$$\int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A} dz}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 z}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 z}{1.2 \ldots 6dx^5} - \&c.$$

$$= (x+1)z - a - \frac{dz}{1\, dx}Sx + \frac{ddz}{1.2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{1.2.3\, dx^3}Sx^3 + \&c.$$

erit:

$$\int z dx = (x+\tfrac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx}(Sx + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}) + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3 z}{6dx^3}(Sx^3 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B})$$

$$+ \frac{d^4 z}{24dx^4}Sx^4 - \frac{d^5 z}{120dx^5}(Sx^5 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}) + \frac{d^6 z}{720dx^6}Sx^6$$

$$- \frac{d^7 z}{5040dx^7}(Sx^7 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}) + \&c.$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. denotant numeros Bernoullianos supra §. 122. exhibitos.

Sit

Sit v.gr. $z = xx$, fiet $a = 0$; $\frac{dz}{dx} = 2x$; & $\frac{ddz}{2dx^2} = 1$, hinc erit:

$$\int xxdx = (x+\tfrac{1}{2})xx - 2x(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}) + 1(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x)$$

seu $\int xxdx = \frac{1}{3}x^3$; dat autem $\frac{1}{3}x^3$ differentiatum vtique $xxdx$.

138. Noua ergo hinc patet via ad terminos summatorios serierum potestatum inueniendos; quoniam enim ex coefficientibus ante assumtis A, B, C, D, &c. hi termini summatorii facillime formantur, horum autem coefficientium quilibet ex praecedentibus conflatur; si in formulis §. 135. datis loco istarum litterarum valores in §. 136. traditi substituantur, erit:

$$Sx^1 - x = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x$$
$$Sx^2 - x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{2}(Sx - x)$$
$$Sx^3 - x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3.2}{2.3}(Sx^1 - x^1)$$
$$Sx^4 - x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4.3}{2.3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4.3.2}{2.3.4}(Sx - x)$$
&c.

Hinc ergo summae potestatum superiorum ex summis inferiorum formari poterunt.

139. Quod si vero legem, qua coefficientes A, B, C, D, &c. supra §. 135. progredi inuenti sunt, attentius intueamur, eos seriem recurrentem constituere deprehendemus. Si enim euoluamus hanc fractionem:

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \&c.}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \&c.}$$

secundum potestates ipsius u, hancque seriem resultare sumamus: A +

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \&c.$$

erit vti ante inuenimus $A = x$; $B = \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}A$; &c. ficque inuenta hac ferie, obtinebuntur termini fummatorii ferierum poteftatum. Illa autem fractio, ex cuius euolutione ifta feries nafcitur, tranfit in hanc formam: $\frac{e^{xu}-1}{e^u-1}$, quae fi x fuerit numerus integer affirmatiuus, abit in $1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \ldots + e^{(x-1)u}$; cum ergo fit:

$$1 = 1$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.1.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ideoque erit:

$$A = x$$
$$B = S(x-1) = Sx - x$$
$$C = \tfrac{1}{2}S(x-1)^2 = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}S(x-1)^3 = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3 \qquad \&c.$$

Vnde nexus horum coefficientium cum fummis poteftatum, ante iam obferuatus, penitus confirmatur ac demonftratur.

CA-

CAPUT VI.

DE SUMMATIONE PROGRESSIONUM PER SERIES INFINITAS.

140.

Expreſſio generalis, quam in Capite praecedente pro termino ſummatorio cuiusque ſeriei, cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens eſt $= z$, invenimus:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2} z + \frac{\mathfrak{A} dz}{1.2 dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 z}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 z}{1.2 \ldots 6 dx^5} - \&c.$$

proprie inſeruit ſeriebus ſummandis, quarum termini generales ſunt functiones quaecunque rationales integrae indicis x, quoniam his caſibus ad differentialia tandem euaneſcentia peruenitur. Sin autem z non fuerit eiusmodi functio ipſius x, tum eius differentialia in infinitum progrediuntur, ſicque reſultat ſeries infinita ſummam ſeriei propoſitae exprimens, & quidem ad datum vsque terminum, cuius index eſt $= x$. Quocirca progreſſionis propoſitae in infinitum continuatae ſumma prodibit, ſi ponatur $x = \infty$; hocque pacto alia inuenitur ſeries infinita priori aequalis.

141. Sin autem ponatur $x = 0$, tum expreſſio ſummam exhibens debet euaneſcere, vti iam annotauimus; quod niſi fiat, eiusmodi quantitas conſtans ad ſummam addi vel inde auferri debet, vt huic conditioni ſatisfiat.

Quo facto si ponatur $x = 1$, summa inuenta praebebit terminum primum seriei: sin $x = 2$, aggregatum primi & secundi; sin $x = 3$, orietur aggregatum trium terminorum initialium seriei, & ita porro. His igitur casibus, quia summa vnius, vel duorum, vel trium, &c. terminorum est cognita, seriei infinitae, qua ista summa exprimitur, valor innotescet; ex hocque fonte innumerabiles series summari poterunt.

142. Quoniam, si eiusmodi constans summae fuerit adiecta, vt ea euanescat posito $x = 0$, tum summa omnibus reliquis casibus, quicunque numeri pro x substituantur, satisfacit; manifestum est, dummodo summae inuentae eiusmodi quantitas constans adiiciatur, vt vno quodam casu vera summa indicetur, tum omnibus reliquis casibus veram summam prodire debere. Quare si ponendo $x = 0$, non pateat, cuiusmodi valorem expressio summae recipiat, neque igitur constans adiicienda hinc inueniri queat; tum alius quicunque numerus pro x statui poterit, adiiciendaque constante effici vt debita summa indicetur: quod quomodo fieri debeat, ex sequentibus magis fiet perspicuum.

142. Consideremus primum hanc progressionem harmonicam:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{1}{x} = s,$$

cuius terminus generalis cum sit $= \frac{1}{x}$, fiet $z = \frac{1}{x}$, & ter-

terminus summatorius s ita inuenietur. Primo erit $\int z dx = \int \frac{dx}{x} = lx$; deinde differentialia ita se habebunt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{ddz}{2dx^2} = \frac{1}{x^3}; \quad \frac{d^3z}{6dx^3} = -\frac{1}{x^4};$$

$\frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{1}{x^5}$; $\frac{d^5z}{120dx^6} = -\frac{1}{x^6}$ &c. Hinc itaque erit:

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c.$$
$$+ \text{Constante}.$$

Constans igitur hic addenda ex casu $x = 0$ non potest definiri. Ponatur ergo $x = 1$, quia tum fit $s = 1$, erit

$1 = \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} - \frac{\mathfrak{C}}{6} + \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{Const.}$ vnde fit ista constans $= \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \&c.$ eritque ideo terminus summatorius quaesitus:

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \&c.$$

143. Quoniam numeri Bernoulliani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. constituunt seriem diuergentem, hic valor constantis cognosci nequit. Sin autem loco x substituatur numerus maior, atque summa totidem terminorum actu quaeratur, valor constantis commode inuestigabitur. Ponatur

 in

in hunc finem $x = 10$, decemque primis terminis colligendis reperietur eorum summa $=$

$$2,9289682539682539 68$$

cui aequalis esse debet expressio summae, si in ea ponatur $x = 10$, quae fit:

$$l10 + \frac{1}{20} - \frac{\mathfrak{A}}{200} + \frac{\mathfrak{B}}{40000} - \frac{\mathfrak{C}}{6000000} + \frac{\mathfrak{D}}{800000000} - \&c. + C.$$

sumto ergo pro $l10$ logarithmo hyperbolico denarii & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. substitutis valoribus supra inuentis, reperietur constans illa:

$$C = 0,5772156649015325$$

qui numerus ergo exprimit summam seriei:

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \&c.$$

144. Si pro x numeri non nimis magni substituantur, quia summa seriei facile actu inuenitur, obtinebitur summa seriei huius:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \&c. = s - lx - C.$$

Sin autem x significet numerum valde magnum, quia tum valor huius expressionis in infinitum excurrentis facile in fractionibus decimalibus assignatur, vicissim summa seriei definietur. Ac primo quidem constat, si series in infinitum continuetur, eius summam futuram esse infinite magnam; facto enim $x = \infty$ fit lx quoque infini-

ni-

nitus; etsi ω ad x rationem infinite paruam teneat. Quo autem commodius summa quotcunque terminorum seriei assignari queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. in fractionibus decimalibus exprimamus:

$$\mathfrak{A} = 0,1666666666666$$
$$\mathfrak{B} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{C} = 0,0238095238095$$
$$\mathfrak{D} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{E} = 0,0757575757575$$
$$\mathfrak{F} = 0,2531135531135$$
$$\mathfrak{G} = 1,1666666666666$$
$$\mathfrak{H} = 7,0921568627451 \quad \&c.$$

vnde ergo erit:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0,0083333333333$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0,0039682539682$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0,0041666666666$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0,0075757575757$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0,0210927960928$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{H}}{16} = 0,4432598039216 \quad \&c.$$

EXEMPLUM I.

Inuenire summam mille terminorum seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$$

Ponatur ergo $x = 1000$, & cum sit

$$\begin{array}{rcll}
 & l10 & = 2,302585092994045684 & \text{erit} \\
 & lx & = 6,9077552789821 & \\
 & \text{Conſt.} & = 0,5772156649015 & \\
 & \frac{1}{2x} & = 0,0005000000000 & \\
 & & 7,4849709438836 & \\
\text{ſubt.} & \frac{\mathfrak{A}}{2xx} & = 0,0000000833333 & \\
 & & 7,4849708605503 & \\
\text{add.} & \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} & = 0,0000000000000 & \\
\end{array}$$

Ergo 7, 4849708605503 eſt ſumma quaeſita mille terminorum, qui nequidem ſeptem vnitates cum ſemiſſe conficiunt.

EXEMPLUM II.

Inuenire ſummam millies mille terminorum ſeriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$

Quia eſt $x = 1000000$, erit $lx = 6.l10$, ergo

$$\begin{array}{rcl}
lx & = & 13,8155105579642 \\
\text{Conſt.} & = & 0,5772156649015 \\
\frac{1}{2x} & = & 0,0000005000000 \\
 & & 14,3927262228657 = \text{ſummae quaeſitae.}
\end{array}$$

145. Si ergo pro x ſtatuatur numerus vehementer magnus, ſumma ſatis exacte inuenitur ex ſolo primo termino lx conſtante C aucto: vnde egregia corollaria deduci poſſunt. Sic ſi x fuerit numerus vehementer magnus, ponaturque:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \;\ldots\; \frac{1}{x}=s$$

$$\&\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{x}+\;\ldots\;\frac{1}{x+y}=t$$

quia eſt proxime $s=lx+C$, & $t=l(x+y)+C$; erit $t-s=l(x+y)-lx=l\frac{x+y}{x}$, ideoque hic logarithmus proxime per ſeriem harmonicam finito terminorum numero conſtantem exprimetur hoc modo:

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\;\ldots\;+\frac{1}{x+y}.$$

Accuratius autem hic logarithmus exhibebitur, ſi ſuperiores ſummae s & t exactius capiantur. Sic cum ſit

$$s=lx+C+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12xx}, \quad \&$$

$$t=l(x+y)+C+\frac{1}{2(x+y)}-\frac{1}{12(x+y)^2}; \text{ erit}$$

$$t-s=l\frac{x+y}{x}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+y)}+\frac{1}{12xx}-\frac{1}{12(x+y)^2},$$

ideoque

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\;\ldots\;+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+y)}-\frac{1}{12xx}+\frac{1}{12(x+y)^2}$$

Sin

Sin autem sit numerus tam magnus, vt bini termini vltimi reiici queant, erit proxime:

$$l\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\dots+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}\right).$$

145. Ex hac quoque serie harmonica deriuare poterimus summam huius seriei, in qua tantum numeri impares occurrunt:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\dots+\frac{1}{2x+1}.$$

Cum enim omnibus terminis capiendis sit:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\dots\dots+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}=$$

$$l(2x+1)+C+\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6}+\&c.$$

terminorum vero ordine parium:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots\dots+\frac{1}{2x}$$

summa sit semissis superioris nempe:

$$\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}lx+\frac{1}{4x}-\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{12x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{16x^8}-\&c.$$

erit hac serie ab illa ablata:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots\dots+\frac{1}{2x+1}=$$

$$\tfrac{1}{2}C+l\frac{2x+1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2(2x+1)}-\frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4}-\&c.$$

$$-\frac{1}{4x}+\frac{\mathfrak{A}}{4x^2}-\frac{\mathfrak{B}}{8x^4}+\&c.$$

146.

146. Poteſt vero etiam per eandem expreſſionem generalem ſumma cuiusque ſeriei harmonicae inueniri; ſit enim:

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}+\frac{1}{4m+n}+\ \dots\ +\frac{1}{mx+n}=s,$$

quia eſt terminus generalis $z=\frac{1}{mx+n}$, erit:

$$\int z\,dx=\frac{1}{m}\,l(mx+n)\ ;\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{m}{(mx+n)^2}$$

$$\frac{ddz}{2\,dx^2}=\frac{mm}{(mx+n)^3}\ ;\quad \frac{d^3z}{6\,dx^3}=-\frac{m^3}{(mx+n)^4}$$

$$\frac{d^4z}{24\,dx^4}=\frac{m^4}{(mx+n)^5}\ ;\quad \frac{d^5z}{120\,dx^5}=-\frac{m^5}{(mx+n)^6}\ \&c.$$

Ex his ergo reperitur:

$$s=D+\frac{1}{m}\,l(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2}+\frac{\mathfrak{B}m^3}{4(mx+n)^4}$$
$$-\frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8}-\&c.$$

Poſito ergo $x=0$, fiet conſtans illa addenda:

$$D=-\frac{1}{m}\,ln-\frac{1}{2n}+\frac{\mathfrak{A}m}{2n^2}-\frac{\mathfrak{B}m^3}{4n^4}+\frac{\mathfrak{C}m^5}{6n^6}-\&c.$$

147. Si vero ſit $n=0$, quoniam ſeriei:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}+\frac{1}{4m}+\ \dots\dots\ +\frac{1}{mx}$$

ſumma eſt $=\frac{1}{m}C+\frac{1}{m}lx+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2mx^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4mx^4}-\&c.$

 at

at vero huius feriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \frac{1}{mx}$$

fumma eft $= C + lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \&c.$

fi ab hac ferie illa m vicibus fumta fubtrahatur vt prodeat haec feries:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{3m} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$\qquad - \frac{m}{m} \qquad - \frac{m}{2m} \qquad - \frac{m}{3m} \qquad - \frac{m}{mx}$$

eius fumma erit $= lm + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \&c.$

$$- \frac{1}{2x} + \frac{\mathfrak{A}}{2xx} - \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} + \&c.$$

atque fi ftatuatur $x = \infty$ fumma erit $= lm.$ Hinc pro m ponendo numeros 2, 3, 4, &c. erit:

$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \&c.$

$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9}\ \&c.$

$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \&c.$

$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10}\ \&c.$

&c.

148. Relicta autem ferie harmonica progrediamur ad feriem quadratorum reciprocam, fitque:

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \frac{1}{xx},$$

in

in qua cum ſit terminus generalis $z = \frac{1}{xx}$, erit $\int z dx = -\frac{1}{x}$, & differentialia ipſius z ita ſe habebunt

$$\frac{dz}{2\,dx} = -\frac{1}{x^3};\quad \frac{ddz}{2.3dx^2} = \frac{1}{x^4};\quad \frac{d^3 z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5};\quad \&c.$$

vnde erit ſumma

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^5} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \&c.$$

in qua conſtans addenda C ex vno caſu, quo ſumma conſtat, eſt definienda. Ponamus ergo $x = 1$, quia fit $s = 1$ debet eſſe:

$$C = 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \&c.$$

quae ſeries autem cum ſit maxime diuergens, valorem conſtantis C non oſtendit. Quia autem ſupra demonſtrauimus ſummam huius ſeriei in infinitum continuatae eſſe $= \frac{\pi\pi}{6}$; facto $x = \infty$, ſi ponatur $s = \frac{\pi\pi}{6}$, fiet $C = \frac{\pi\pi}{6}$, ob reliquos terminos omnes euaneſcentes. Erit ergo

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \&c. = \frac{\pi\pi}{6}.$$

149. Sin autem ſumma huius ſeriei cognita non fuiſſet, valor conſtantis illius C ex alio quopiam caſu, quo ſumma actu eſt inuenta, determinari deberet. Hunc in finem ponamus $x = 10$, atque decem terminis actu addendis reperietur:

 $s = 1,$

$s = 1,5497677311665406\,90$ tum eſt

add. $\frac{1}{x} = 0,1$

ſubtr. $\frac{1}{2xx} = 0,005$

$1,6447677311665406\,90$

add. $\frac{\mathfrak{A}}{x^3} = 0,0001666666666666\,66$

$1,6449343978332073\,56$

ſubtr. $\frac{\mathfrak{B}}{x^5} = 0,0000003333333333\,33$

$1,6449340644998740\,23$

add. $\frac{\mathfrak{C}}{x^7} = 0,0000000023809523\,81$

$1,6449340668808264\,04$

ſubtr. $\frac{\mathfrak{D}}{x^9} = 0,0000000000333333\,33$

$1,6449340668474930\,71$

add. $\frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} = 0,0000000000007575\,75$

$1,6449340668482506\,46$

ſubtr. $\frac{\mathfrak{F}}{x^{13}} = 0,0000000000000253\,11$

$1,6449340668482253\,35$

add. $\frac{\mathfrak{G}}{x^{15}} = 0,0000000000000011\,66$

ſubtr. $\frac{\mathfrak{H}}{x^{17}} = 71$

$1,6449340668482264\,30 = C.$

Hicque numerus ſimul eſt valor expreſſionis $\frac{\pi\pi}{6}$, quemadmodum ex valore ipſius π cognito calculum inſtituenti patebit. Vnde ſimul intelligitur, etiamſi feries $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. diuergat, tamen hoc modo veram prodire ſummam.

150.

150. Sit nunc $z = \frac{1}{x^3}$; atque

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots\dots + \frac{1}{x^3},$$

quia est

$$\int z\,dx = -\frac{1}{2xx}; \quad \frac{dz}{1.2.3\,dx} = -\frac{1}{2x^4}; \quad \frac{ddz}{1.2.3.4\,dx^2} = \frac{1}{2x^5}$$

$$\frac{d^3 z}{1.2\ldots 5\,dx^3} = -\frac{1}{2x^6}; \quad \frac{d^5 z}{1.2\ldots 7\,dx^5} = -\frac{1}{2x^8}; \quad \&c.$$

erit

$$s = C - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} + \&c.$$

hincque posito $x = 1$, ob $s = 1$, fiet:

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mathfrak{A} - \tfrac{5}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{7}{2}\mathfrak{C} - \tfrac{9}{2}\mathfrak{D} + \&c.$$

atque iste valor ipsius C simul ostendet summam seriei propositae in infinitum continuatae. Quoniam vero summae potestatum imparium non aeque ac parium constant, iste ipsius C valor ex cognita summa aliquot terminorum definiri debet. Sit ergo $x = 10$, erit:

$$C = s + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2x^4} + \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} - \&c.$$

Est vero ad computum facilius instituendum:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0,250000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2} = 0,0833333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0,150000000000$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0,4166666666666$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1,6452380952380$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8,750000000000$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60,2833333333333 \quad \&c.$$

Hinc ergo fient termini ad s addendi:

$$\frac{1}{2xx} = 0,005000000000000000$$

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0,000025000000000000$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0,000000000833333333$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0,000000000000416666$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0,000000000000000875$$

$$0,005025000833750875$$

ter-

termini autem ſubtrahendi ſunt :

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2x^3} & = & 0,000500000000000000 \\
\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} & = & 0,000000083333333333 \\
\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} & = & 0,000000000015000000 \\
\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} & = & 0,000000000000016452 \\
\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} & = & 0,000000000000000060 \\
\hline
 & & 0,000500083348349845 \\
 & \text{ab :} & 0,005025000833750875 \\
\hline
 & & 0,004524917485401030 \\
s & = & 1,197531985674193251 \\
\hline
C & = & 1,202056903159594281.
\end{array}
$$

151. Si hoc modo vlterius progrediamur, inueniemus ſummas omnium ſerierum poteſtatum reciprocarum in fractionibus decimalibus expreſſas :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.=1,6449340668482264=\frac{2\mathfrak{A}}{1.\ 2}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.=1,2020569031595942$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.=1,0823232337111381=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\&c.=1,0369277551068632$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\&c.=1,0173430619844491=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\&c.=1,0083492773866018$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\&c.=1,0040773561979443=\frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots8}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\&c.=1,0020083928260822$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\&c.=1,0009945751278180=\frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots10}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\&c.=1,0004941886041094$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\&c.=1,0002460865533080=\frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots12}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{3^{13}}+\frac{1}{4^{13}}+\&c.=1,0001227233475857$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\&c.=1,0000612481350587=\frac{2^{13}\mathfrak{G}}{1.2\ldots14}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{4^{15}}+\&c.=1,0000305882363070$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\&c.=1,0000152822594086=\frac{2^{15}\mathfrak{H}}{1.2\ldots16}\pi^{16}$$

&c.

152. Ex his ergo viciſſim ſummae illarum ſerierum infinitarum numeris Bernoullianis conſtantium exhiberi poterunt. Erit enim:

$$1+0-\tfrac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\&c.=0,57721\,\&c.$$

$$1+1-\tfrac{1}{2}+\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\mathfrak{D}+\&c.=\frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\frac{3\mathfrak{A}}{2}-\frac{5\mathfrak{B}}{2}+\frac{7\mathfrak{C}}{2}-\frac{9\mathfrak{D}}{2}+\&c.=1,2020\,\&c.$$

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4\mathfrak{A}}{2.3}-\frac{5.6\mathfrak{B}}{2.3}+\frac{7.8\mathfrak{C}}{2.3}-\frac{9.10\mathfrak{D}}{2.3}+\&c.=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5\mathfrak{A}}{2.3.4}-\frac{5.6.7\mathfrak{B}}{2.3.4}+\frac{7.8.9\mathfrak{C}}{2.3.4}-\frac{9.10.11\mathfrak{D}}{2.3.4}+\&c.=1,0369\,\&c.$$

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}+\frac{3.4.5.6\mathfrak{A}}{2.3.4.5}-\frac{5.6.7.8\mathfrak{B}}{2.3.4.5}+\frac{7.8.9.10\mathfrak{C}}{2.3.4.5}-\&c.=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

&c.

Harum ergo ſerierum alternae ope quadraturae circuli ſummari poſſunt; a quanam vero quantitate transcendente reliquae pendeant, adhuc non conſtat: neque enim ad poteſtates ipſius π exponentes impares habentes revocari poſſunt; ita vt coefficientes eſſent numeri rationales. Quo autem ſaltem proxime appareat, quales futuri ſint coefficientes poteſtatum ipſius π pro exponentibus imparibus, tabellam ſequentem adiunximus:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c. \text{ in infin.} = \frac{\pi}{0,0000} = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^2}{6,0000} \quad \text{vere}$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^3}{25,79436} \quad \text{prox.}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^4}{90,00000} \quad \text{vere}$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^5}{295,1215} \quad \text{prox.}$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^6}{945,000} \quad \text{vere}$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^7}{2995,286} \quad \text{prox.}$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^8}{9450,000} \quad \text{vere}$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \&c. \quad . \quad . = \frac{\pi^9}{29749,35} \quad \text{prox.}$$

&c.

153. Ex hoc fonte series numerorum Bernoullianorum

1 2 3 4 5 6 7 8 9
𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, 𝔉, 𝔊, ℌ, ℑ, &c.

quantumuis irregularis videatur interpolari, seu termini in medio binorum quorumcunque constituti assignari poterunt: si enim terminus medium interiacens inter primum 𝔄 & secundum 𝔅, seu indici $1\frac{1}{2}$ respondens fuerit $= p$; erit vtique:

$1 +$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c. = \frac{2^2 p}{1.2.3}\pi^3$$

ideoque $p=\frac{3}{2\pi^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\&c.\right)=0,05815227$

Simili modo si terminus inter 𝔅 & ℭ medium interiacens seu indicem habens $2\frac{1}{2}$ ponatur $=q$, quia erit:

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c. = \frac{2^4 q}{1.2.3.4.5}\pi^5$$

fiet $q=\frac{15}{2\pi^5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\&c.\right)=0,02541327$

Si ergo istarum serierum, in quibus exponentes potestatum sunt numeri impares, summae exhiberi possent, tum quoque series numerorum Bernoullianorum interpolari posset.

154. Ponamus nunc $z=\frac{1}{nn+xx}$, & quaeratur summa huius seriei:

$$s=\frac{1}{nn+1}+\frac{1}{nn+4}+\frac{1}{nn+9}+\ldots\ldots+\frac{1}{nn+xx}.$$

Quia est $\int z dx=\int\frac{dx}{nn+xx}$; erit $\int z dx=\frac{1}{n}\,\mathrm{A\,tang}\,\frac{x}{n}$.

Ponatur $\mathrm{A\,cot}\,\frac{x}{n}=u$, erit $\int z dx=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$, &

$\frac{x}{n}=\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}$, & $\frac{nn+xx}{nn}=\frac{1}{\sin u^2}$, & $z=\frac{\sin u^2}{nn}$,

& $\frac{dx}{n}=-\frac{du}{\sin u^2}$, vnde fit $du=-\frac{dx\sin u^2}{n}$:

 Hinc

Hinc differentialia ipsius z inuenientur hoc modo:

$$dz = \frac{2\,du \sin u . \cos u}{nn} = -\frac{dx \sin u^2 . \sin 2u}{n^3}$$

$$\& \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\sin u^2 . \sin 2u}{n^3}$$

$$\frac{ddz}{2\,dx} = -\frac{du(\sin u \cos u \sin 2u + \sin u^2 . \cos 2u)}{n^3} = \frac{dx \sin u^3 . \sin 3u}{n^4}$$

$$\& \quad \frac{ddz}{2\,dx^2} = \frac{\sin u^3 . \sin 3u}{n^4}.$$

Simili modo erit, vti iam supra pro eodem casu inuenimus:

$$\frac{d^3z}{2.3\,dx^3} = -\frac{\sin u^4 . \sin 4u}{n^5}; \quad \frac{d^4z}{2.3.4\,dx^4} = \frac{\sin u^5 . \sin 5u}{n^6} \ \&c.$$

ex quibus formabitur summa quaesita:

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\sin u . \sin u}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} . \frac{\sin u^2 . \sin 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} . \frac{\sin u^4 . \sin 4u}{n^5}$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{6} . \frac{\sin u^6 . \sin 6u}{n^7} + \frac{\mathfrak{D}}{8} . \frac{\sin u^8 . \sin 8u}{n^9} - \&c.$$

$$+ \text{Const.}$$

Si hic ad constantem determinandam ponatur $x = 0$, quo fiat $s = 0$, erit $\cot u = 0$, ideoque u angulus $90°$, ac propterea $\sin u = 1$, $\sin 2u = 0$, $\sin 4u = 0$, $\sin 6u = 0$, &c. videtur ergo fore $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, hinc $C = -\frac{1}{2nn}$: at vero notandum est, etiamsi reliqui termini euanescant, tamen quia coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. tan-

tandem in infinitum excrescunt, eorum summam posse esse finitam.

155. Ad hanc ergo constantem rite determinandam ponamus esse $x = \infty$, summam enim huius seriei in infinitum excurrentis supra iam in introductione definiuimus, ostendimusque esse eam $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$. Posito autem $x = \infty$, fiet $u = 0$, ideoque $\sin u = 0$, simulque sinus omnium arcuum multiplorum euanescent. Cum autem in hac serie potestates ipsius $\sin u$ crescant, diuergentia seriei impedire nequit, quominus valor seriei hoc casu euanescat. Fiet ergo $s = \frac{\pi}{2n} + C$; vnde erit

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}, \quad \&$$

$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$. Quare summa seriei quaesita erit

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\sin u^2}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{\sin u^2 . \sin 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} \cdot \frac{\sin u^4 . \sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6} \cdot \frac{\sin u^6 . \sin 6u}{n^7} + \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}.$$

Vbi notandum est, si n fuerit numerus mediocriter magnus, vltimum terminum $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$ tantopere fieri exiguum, vt negligi queat.

156. Ponamus esse $x = n$, ita vt denotet:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+1} + \ldots + \frac{1}{nn+nn}.$$

Tum vero erit $\cot u = 1$, & $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Quamobrem habebitur $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 2u = 1$; $\sin 4u = 0$; $\sin 6u = -1$; $\sin 8u = 0$; $\sin 10u = 1$; &c.

Hancobrem erit:

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2.2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6.8n^7} - \frac{\mathfrak{E}}{10.2^5n^{11}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{G}}{14.2^7n^{15}} - \&c. + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)},$$

in qua expressione tantum numeri alterni ex Bernoullianis occurrunt. Si igitur valor ipsius s per computum actu institutum iam fuerit inuentus, hinc quantitas π definiri poterit, erit enim:

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1.n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3.2^2n^6} + \frac{\mathfrak{E}}{5.2^4n^{10}}$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{7.2^6.n^{14}} + \&c. - \frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}.$$

Etsi enim in termino vltimo inest π, tamen quia is tantopere est paruus, sufficit valorem ipsius π proxime nosse.

EXEMPLUM: Sit $n = 5$; erit:

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

qui

qui termini actu additi dabunt:

$$s = 0,14674630569054949 4$$

vnde erunt termini illi:

$$\begin{aligned}
4ns &= 2,93492611381098988 \\
\frac{1}{n} &= 0,2 \\
\frac{\mathfrak{A}}{nn} &= \underline{0,00666666666666666} \\
& \quad 3,14159278047765654 \\
\frac{\mathfrak{C}}{3 \cdot 2^2 \cdot n^6} &= \underline{0,00000012698412698} \\
& \quad 3,14159265349352956 \\
\frac{\mathfrak{E}}{5 \cdot 2^4 \cdot n^{10}} &= \underline{0,00000000009696969} \\
& \quad 3,14159265359049925 \\
\frac{\mathfrak{G}}{7 \cdot 2^6 \cdot n^{14}} &= \underline{0,00000000000042666} \\
& \quad 3,14159265359007259 \\
\frac{\mathfrak{I}}{9 \cdot 2^8 \cdot n^{18}} &= \underline{\qquad\qquad\qquad 625} \\
& \quad 3,14159265359007884
\end{aligned}$$

Hic valor iam tam prope ad veritatem accedit, vt mirandum ſit tam leui calculo eousque perueniri poſſe. Eſt vero haec expreſſio aliquantillum iuſto maior, ſubtrahi enim adhuc inde debet $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1}$, cuius valor, dummodo π prope ſit cognitum, exhiberi poteſt; quod per logarithmos ita expedietur.

Quia eſt $\pi le = 1,3643763538$

erit $le^{2n\pi} = 10\pi le = 13,6437635.$

Cum

Cum iam sit $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} = \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} + \frac{4\pi}{e^{4n\pi}} + \&c.$ facile intelligitur ad nostrum calculum sufficere primum terminorum sumsisse. Augeamus ergo characteristicam numero 17, quia habemus totidem figuras decimales, erit:

$$
\begin{array}{lrcr}
 & l\pi & = & 17,4971498 \\
 & l4 & = & 0,6020600 \\
\hline
 & & & 18,0992098 \\
\text{subtr.} & le^{2n\pi} & = & 13,6437635 \\
\hline
 & & & 4,4554463 \\
\text{Ergo} & \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} & = & 28539 \quad \text{subtrahatur} \\
\text{ab} & & & 3,14159265359007884 \quad \text{erit} \\
\hline
 & \pi & = & 3,14159265358979345
\end{array}
$$

quae expressio in figura demum penultima a veritate recedit; quod mirandum non est, cum adhuc terminum $\frac{8}{11.2^{10}.\pi^{22}}$, qui dat 22, subtrahere debuissemus, sicque ne vltima quidem figura aberrasset. Ceterum intelligitur, si pro n maiorem numerum vti 10 assumsissemus, tum facili negotio peripheriam π ad 25 pluresque figuras inueniri potuisse.

157. Ponamus nunc quoque pro z functiones transcendentes ipsius x, sitque $z = lx$, sumendo logarithmos hyperbolicos, quoniam vulgares facile eo reuocantur; sit-

sitque: $s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx.$
Quia igitur est $z = lx$, erit $\int z\,dx = xlx - x$, huius enim differentiale dat $dx\,lx$. Deinde est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x};\ \frac{ddz}{dx^2} = -\frac{1}{x^2};\ \frac{d^3z}{1.2\,dx^3} = \frac{1}{x^3};\ \frac{d^5z}{1.2.3.4\,dx^5} = \frac{1}{x^5};$$
&c.

Hinc itaque concluditur fore:

$$s = xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \&c. + \text{Const.}$$

Haec autem constans ponendo $x = 1$, quia fit $s = l1 = 0$ ita definietur, vt sit:

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \&c.$$

quae series ob nimiam diuergentiam est inepta ad valorem ipsius C saltem proxime eruendum.

158. Non solum autem proximum sed etiam ipsum verum valorem ipsius C inueniemus, si consideremus expressionem Wallisianam pro valore ipsius π inuentam, atque in introductione demonstratam: quae erat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8.\,10.\,10.\,12.\ \&c.}{1.\,3.\,3.\,5.\,5.\,7.\,7.\,9.\,9.\,11.\,11.\ \&c.}$$

hinc enim logarithmis sumendis erit:

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + 2l10 + \&c.$$
$$- l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - 2l11 - \&c.$$

 Po-

Ponamus ergo in ferie affumta $x = \infty$, & cum fit:

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx = C + (x + \tfrac{1}{2})\,lx - x$$

erit $l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x = C + (2x + \tfrac{1}{2})\,l2x - 2x$

& $l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x = C + (x + \tfrac{1}{2})lx + xl2 - x$

hinc $l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x-1) = xlx + (x + \tfrac{1}{2})\,l2 - x$

Cum igitur fit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 + \ldots + 2l2x - l2x$$
$$- 2l1 - 2l3 - 2l5 - \ldots - 2l(2x-1)$$

pofito $x = \infty$, erit:

$$l\frac{\pi}{2} = 2C + (2x+1)\,lx + 2xl2 - 2x - l2 - lx$$
$$- 2xlx - (2x+1)\,l2 + 2x,$$

ideoque $l\frac{\pi}{2} = 2C - 2l2$, ergo $2C = l2\pi$, & $C = \frac{1}{2}l2\pi$, vnde in fractionibus decimalibus reperitur:

$$C = 0{,}9189385332046727417803297$$

atque fimul fequens feries fummatur:

$$1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \frac{\mathfrak{E}}{9.10} + \&c. = \tfrac{1}{2}\,l2\pi.$$

159. Cognita nunc ifta conftante $C = \frac{1}{2}l2\pi$, fumma quotcunque logarithmorum ex hac ferie $l1 + l2 + l3 + \&c.$ exhiberi poteft. Si enim ponatur:

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx, \text{ erit}$$

$$s = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\mathfrak{A}}{1{,}2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \&c.$$

fiqui-

ſi quidem logarithmi propoſiti fuerit hyperbolici; ſin autem proponantur logarithmi vulgares, tum in terminis $\frac{1}{2}l2\pi+(x+\frac{1}{2})lx$ pro $l2\pi$ & lx ſumi debebunt logarithmi vulgares, reliqui autem ſeriei termini $-x+\frac{\mathfrak{A}}{1.2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3}+\&c.$ multiplicari debent per $0,434294481903251827 = n$.

Erit igitur hoc caſu pro logarithmis vulgaribus:

$$l\pi = 0,4971498726941338543512680$$
$$l2 = 0,3010299956639811952137388$$
$$l2\pi = 0,7981798683581150495650068$$
$$\tfrac{1}{2}l2\pi = 0,3990899341790575247825034$$

EXEMPLUM.

Quaeratur aggregatum mille logarithmorum tabularium

$$s = l1 + l2 + l3 + \ldots + l1000.$$

Erit ergo $x = 1000$, & $lx = 3,0000000000000$

vnde fit $xlx = 3000,0000000000000$

$\frac{1}{2}lx = 1,5000000000000$

$\frac{1}{2}l2\pi = 0,3990899341790$

$3001,8990899341790$

ſubtr. $nx = 434,2944819032518$

$2567,6046080309272$

Deinde eſt $\frac{n\mathfrak{A}}{1.2x} = 0,0000361912068$

ſubtr. $\frac{n\mathfrak{B}}{3.4x^3} = 0,0000000000012$

$0,0000361912056$

addatur $2567,6046080309272$

ſumma quaeſita $s = 2567,6046442221328$.

 Cum

Cum igitur s sit logarithmus producti numerorum:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 1000

patet hoc productum, si actu multiplicetur, constare ex 2568 figuris, atque notas a leua initiales fore 4023872 quas insuper 2561 figurae sequentur.

160. Ope ergo huius logarithmorum summationis producta ex quocunque factoribus, qui secundum numeros naturales procedunt, proxime assignari poterunt. Huc potissimum referri potest problema, quo quaeritur vncia media seu maxima in potestate binomii quacunque $(a+b)^m$; vbiquidem notandum est, si m sit numerus impar, binas dari medias inter se aequales, quae iunctim sumtae praebeant vnciam mediam in potestate sequente pari. Quare cum vncia maxima in quaque potestate pari sit duplo maior quam vncia media in potestate praecedente impari, sufficiet pro potestatibus paribus vnciam mediam maximam determinasse. Sit igitur $m = 2n$, & vncia media ita exprimetur vt sit:

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\;\ldots\;(n+1)}{1.\;2.\;3.\;4\;\ldots\;n}$$

Vocetur ista vncia media quae quaeritur $= u$, atque ea hoc modo repraesentari poterit, vt sit:

$$u = \frac{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;\ldots\;2n}{(1.\;2.\;3.\;4.\;\ldots\;n)^2}$$

sumtisque logarithmis erit:

$$lu = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \ldots + l2n$$
$$-2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \ldots - 2ln.$$

161.

161. Iam vero sumendis his logarithmis hyperbolicis erit:

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \dots\dots + l2n =$$

$$= \tfrac{1}{2}l2\pi + (2n + \tfrac{1}{2})\,ln + (2n + \tfrac{1}{2})\,l2 - 2n$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \&c.$$

$$\& \quad 2l1 + 2l2 + 2l3 + 2l4 + \dots + 2ln =$$

$$l2\pi + (2n+1)ln - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} - \&c.$$

qua expressione ab illa sublata relinquetur:

$$lu = -\tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}ln + 2nl2 + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \&c.$$

$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} + \&c.$$

his vero binis terminis colligendis, erit:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^7n^7} - \&c.$$

Sit $\frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2^2n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^4n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^6n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^8n^8} + \&c.$

$$= l\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \&c.\right); \text{ erit}$$

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right);$$

ideoque $u = \dfrac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \&c.\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}.$

 Erit

Erit vero posito $2n = m$

$$l\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \&c.\right) =$$

$$\frac{A}{m^3} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \&c.$$

$$- \frac{A^2}{2m^4} - \frac{AB}{m^6} - \frac{AC}{m^8} - \frac{AD}{m^{10}} - \&c.$$

$$- \frac{BB}{2m^8} - \frac{BC}{m^{10}} - \&c.$$

$$+ \frac{A^3}{3m^6} + \frac{A^2B}{m^8} + \frac{A^2C}{m^{10}} + \&c.$$

$$+ \frac{AB^2}{m^{10}} + \&c.$$

$$- \frac{A^4}{4m^8} - \frac{A^3B}{m^{10}} - \&c.$$

$$+ \frac{A^5}{5m^{10}} + \&c.$$

quae expressio cum aequalis esse debeat huic:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2\, m^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4\, m^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6\, m^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8\, m^8} + \&c.$$

fiet:

$$A = \frac{3\mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B = \frac{A^2}{2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C = AB - \tfrac{1}{3}A^3 + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6}$$

D =

$$D = AC + \tfrac{1}{2}B^2 - A^2B + \tfrac{1}{4}A^4 - \frac{255\,\mathfrak{D}}{7 \cdot 8}$$

$$E = AD + BC - A^2C - AB^2 + A^3B - \tfrac{1}{5}A^5 + \frac{1023\,\mathfrak{E}}{9 \cdot 10}$$

&c.

162. Cum iam sit $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$; erit:

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{96}$$

$$C = \frac{27}{640}$$

$$D = -\frac{90031}{2^{11}.3^2.5.7} \quad \&c.$$

Hinc efficitur:

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4 n^2} - \frac{1}{2^9.3 n^4} + \frac{27}{2^{15}.5 n^6} - \frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7 n^8} + \&c.\right)^{2n} \sqrt{n\pi}}$$

$$\text{seu } u = \frac{2^{2n}\left(1 - \frac{1}{2^4 n^2} + \frac{7}{2^9.3 n^4} - \frac{121}{2^{13}.3.5 n^6} + \frac{104969}{2^{19}.3^2.5.7 n^8} - \&c.\right)^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

vel si ista seriei eleuatio actu instituatur, erit proxime:

$$u = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128 n^4} \&c.\right)}$$

hinc

hinc terminus medius in $(1+1)^{2n}$, erit ad summam omnium terminorum 2^{2n}

$$\text{vti } 1 \text{ ad } \sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}-\frac{1}{12.8n^3}-\frac{5}{16.128n^4}-\&c.\right)$$

vel posito breuitatis gratia $4n=\nu$, erit ista ratio:

$$\text{vt } 1 \text{ ad } \sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}-\frac{1}{2\nu^3}-\frac{5}{8\nu^4}+\frac{23}{8\nu^5}+\frac{53}{16\nu^6}-\&c.\right)$$

EXEMPLUM I.

Quaeratur vncia media in binomio $(a+b)^{10}$ *euoluto, quam constat esse* $=\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=252.$

Adhibendo vltimam formulam pro ν inuentam erit $n=5$

	$\frac{1}{4n}$	=	0,0500000
	$\frac{1}{32n^2}$	=	0,0012500
			0,0512500
subtr.	$\frac{1}{128n^3}$	=	625
			0,0511875
subtr.	$\frac{5}{16.128n^4}$	=	39
Ergo	$1+\frac{1}{4n}+\&c.$	=	1,0511836
	Huius log.	=	0,0216784
	ln	=	0,6989700
	$l\pi$	=	0,4971498
			1,2177982

$l\sqrt{n}$

$$lV n\pi(1+\&c.) = 0,6088991$$
$$\text{a} \quad l2^{2n} = 3,0102999$$
$$lu = 2,4014008$$
$$\text{vnde fit} \quad u = 252.$$

EXEMPLUM II.

Inuestigetur ratio, quam in potestate centesima binomii $1+1$ *terminus medius ad summam omnium* 2^{100} *tenet.*

Vtamur ad hoc formula primum inuenta:

$$lu = l\frac{2^{2n}}{Vn\pi} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \&c.$$

in qua posito $2n = m$ vt habeatur ista potestas $(1+1)^m$ & loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, substitutis valoribus, fiet:

$$la = l\frac{2^m}{V\frac{1}{2}m\pi} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \&c.$$

qui logarithmi cum sint hyperbolici, multiplicentur ii per

$$k = 0,434294481903251,$$

vt transmutentur in tabulares, eritque

$$lu = l\frac{2^m}{V\frac{1}{2}m\pi} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \&c.$$

vnde cum vncia media sit u, erit $2^m : u$ ratio quaesita, ideoque

$$l\frac{2^m}{u} = lV\frac{1}{2}m\pi + \frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \frac{691k}{88m^{11}} + \&c.$$

Quare cum sit ob exponentem $m = 100$

$$\frac{k}{m} = 0,0043429448 : \quad \frac{k}{m^3} = 0,0000004343 ;$$

$$\frac{k}{m^5} = 0,0000000000 :$$

erit :

$$\frac{k}{4m} = 0,0010857362$$

$$\frac{k}{24m^3} = 0,0000000181$$

$$0,0010857181$$

$$\text{Tum est } \quad l\pi = 0,4971498726$$

$$l\tfrac{1}{2}m = 1,6989700043$$

$$l\tfrac{1}{2}m\pi = 2,1961198769$$

$$l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} = 1,0980599384$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \&c. = 0,0010857181$$

$$1,0991456565 = l\frac{2^{100}}{u}.$$

Erit ergo $\frac{2^{100}}{u} = 12,56451$, atque adeo in potestate $(1+1)^{100}$ euoluta terminus medius se habebit ad summam omnium 2^{100} vti 1 ad $12,56451$.

163. Denotet nunc terminus generalis z functionem exponentialem a^x, ita vt summari debeat haec series geometrica:

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + a^x$$

quae

quae cum sit geometrica, eius summa iam constat, erit enim $s = \frac{(a^x-1)a}{a-1}$. Modo autem hic exposito hanc summam inuestigemus. Quia est $z = a^x$, erit $\int z\,dx = \frac{a^x}{la}$, huius enim differentiale est $a^x dx$, tum vero erit:

$$\frac{dz}{dx} = a^x la\,; \quad \frac{ddz}{dx^2} = a^x (la)^2\,; \quad \frac{d^3 z}{dx^3} = a^x (la)^3\,; \quad \&c.$$

vnde sequitur fore:

$$s = a^x\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \&c.\right) + C.$$

Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, & ob $s = 0$, erit $C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 - \&c.$

ideoque fiet:

$$s = (a^x-1)\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3\ldots6}(la)^5 - \&c.\right)$$

Cum igitur summa sit $\frac{(a^x-1)a}{a-1}$, erit:

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}(la)^5}{1.2\ldots6} - \&c.$$

vbi la denotat logarithmum hyperbolicum ipsius a: hinc fit $\frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{\mathfrak{A}(la)^2}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}(la)^6}{1.2\ldots6} - \&c.$ sicque istius seriei summa exhiberi poterit.

164. Sit terminus generalis $z = \sin ax$, &

$s = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots \ldots + \sin ax$

quae feries cum fit recurrens quoque fummari poteft; erit enim

$$s = \frac{\sin a + \sin ax - \sin(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = \frac{\sin a + (1-\cos a)\sin ax - \sin a \cos ax}{2(1-\cos a)}$$

Erit vero $\int z dx = \int dx \sin ax = -\frac{1}{a}\cos ax$, & $\frac{dz}{dx} = a\cos ax$;

$\frac{ddz}{dx^2} = -aa\sin ax$; $\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \cos ax$; $\frac{d^5 z}{dx^5} = a^5 \cos ax$ &c.

$$s = C - \frac{1}{a}\cos ax + \tfrac{1}{2}\sin ax + \frac{\mathfrak{A} a \cos ax}{1.2} + \frac{\mathfrak{B} a^3 \cos ax}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C} a^5 \cos ax}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\mathfrak{D} a^7 \cos ax}{1.2 \ldots 8} + \&c.$$

Ponatur $x = 0$ vt fiat $s = 0$; eritque:

$$C = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2 \ldots 6} - \&c. \quad \text{ergo}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\sin ax + (1-\cos ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2 \ldots 6} - \&c.\right)$$

At cum fit $s = \tfrac{1}{2}\sin ax + \frac{(1-\cos ax)\sin a}{2(1-\cos a)}$, fiet:

$$\frac{\sin a}{2(1-\cos a)} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2 \ldots 6} - \&c.$$

quam eandem feriem iam fupra §. 127. habuimus.

165. Sit nunc $z = \cos ax$, ac feries fummanda:

$s = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots \ldots + \cos ax$

cu-

cuius seriei, quia est recurrens, erit summa:

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax+a)}{1 - 2\cos a + 1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a.\sin ax.$$

At vero ad summam nostra methodo exprimendam, erit:

$$\int z\,dx = \int dx \cos ax = \frac{1}{a}\sin ax, \quad \& \quad \frac{dz}{dx} = -a\sin ax;$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \sin ax; \quad \frac{d^5 z}{dx^5} = -a^5 \sin ax; \quad \&c. \text{ Ergo}$$

$$s = C + \frac{1}{a}\sin ax + \tfrac{1}{2}\cos ax - \frac{\mathfrak{A}a\sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3\sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Sit $x = 0$, erit $s = 0$, & $C = -\tfrac{1}{2}$, hincque erit:

$$s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{a}\sin ax - \frac{\mathfrak{A}a\sin ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3\sin ax}{1.2.3.4} - \&c.$$

Quare cum sit $s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos ax + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a.\sin ax$,

erit vti iam modo inuenimus:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$$

166. Quoniam supra inuenimus, si a denotet arcum quemcunque, esse

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \tfrac{1}{4}\sin 4a + \&c.$$

consideremus hanc seriem, sitque $z = \frac{1}{x}\sin ax$, vt sit

$$s = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin 2a + \tfrac{1}{3}\sin 3a + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{1}{x}\sin ax.$$

Hoc autem casu fit $\int z\,dx = \int \frac{dx}{x}\sin ax$, quod integrale exhiberi nequit.

 Erit

Erit vero $\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}\cos ax - \frac{1}{xx}\sin ax$;

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x}\sin ax - \frac{2a}{xx}\cos ax + \frac{2}{x^3}\sin ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\cos ax + \frac{3a^2}{x^2}\sin ax + \frac{6a}{x^3}\cos ax - \frac{6}{x^4}\sin ax;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\sin ax + \frac{4a^3}{xx}\cos ax - \frac{12a^2}{x^3}\sin ax - \frac{24a}{x^4}\cos ax + \frac{24}{x^5}\sin ax.$$

Quia igitur neque formulam integralem $\int z\,dx$ exhibere, neque haec differentialia satis commode exprimere licet, summam huius seriei per hanc methodum definire non possumus, ita vt quicquam inde concludi posset. Idem incommodum in multis aliis seriebus occurrit, quoties terminus generalis non satis est simplex, vt eius differentialia ad commodam legem exprimi queant. Quamobrem in sequenti Capite alias expressiones generales pro summis serierum, quarum termini generales vel nimis sunt compositi vel prorsus dari nequeunt, eliciemus; quae feliciori successu in vsum vocari poterunt. Imprimis autem insufficientia methodi hic traditae elucet, si signa terminorum seriei propositae alternentur, tum enim quantumuis termini generales sint simplices, tamen termini summatorii hac methodo exhiberi commode nequeunt.

CAPUT VII.

METHODUS SUMMANDI SUPERIOR VLTERIUS PROMOTA.

167.

Vt defectum methodi summandi ante traditae suppleamus, in hoc Capite eiusmodi series considerabimus, quarum termini generales magis sint complexi. Cum igitur expressio ante inuenta in progressionibus geometricis, etsi aliis methodis facillime summari possunt, veram summam finita formula contentam non praebeat, hic primum eiusmodi series contemplabimur, quarum termini sint producta ex terminis seriei geometricae & alius cuiuscunque. Sit igitur proposita haec series:

$$\overset{1}{s = ap} + \overset{2}{bp^2} + \overset{3}{cp^3} + \overset{4}{dp^4} + \quad . \quad . \quad . \quad + \overset{x}{yp^x}:$$

quae est composita ex geometrica p, p^2, p^3, &c. & alia quacunque serie $a + b + c + d +$ &c. cuius terminus generalis seu indici x respondens sit $= y$, atque expressionem generalem inuestigemus pro valore eius summae $s = S.yp^x$.

168. Instituamus ratiocinium eodem modo, quo supra vsi sumus, sitque v terminus antecedens ipsi y in serie $a + b + c + d +$ &c. atque A praecedens ipsi a seu is qui indici o respondet, eritque vp^{x-1} terminus generalis huius seriei:

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{ap} + \overset{3}{bp^2} + \overset{4}{cp^3} + \ldots + \overset{x}{vp^{x-1}}$$

cuius summa, si indicetur per $S.vp^{x-1}$ erit:

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p}S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A.$$

Cum autem sit:

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \&c.$$

erit:

$$S.yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p}S.yp^x - \frac{1}{p}S\frac{dy}{dx}p^x + \frac{1}{2p}S\frac{ddy}{dx^2}p^x$$
$$- \frac{1}{6p}S\frac{d^3y}{dx^3}p^x + \frac{1}{24p}S\frac{d^4y}{dx^4}p^x - \&c.$$

Ex qua fit:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S\frac{dy}{dx}p^x + S\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \&c.\right)$$

Si ergo habeantur termini summatorii serierum, quarum termini generales sunt $\frac{dy}{dx}p^x$; $\frac{ddy}{dx^2}p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$; &c. ex iis definiri poterit terminus summatorius Syp^x.

169. Hinc iam summae inueniri poterunt serierum, quarum termini generales in hac forma $x^n p^x$ continentur. Sit enim $y = x^n$, erit $A = 0$, nisi sit $n = 0$, quo casu foret $A = 1$, & quia est:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3};$$

&c.

erit:

erit:

$$S.x^n p^x = \frac{1}{p-1}\Big(x^n p^{x+1} - Ap - n S.x^{n-1} p^x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} S.x^{n-2} p^x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} S.x^{n-3} p^x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} S.x^{n-4} p^x - \&c.\Big)$$

Ex hac forma nunc succeſſiue pro n ſubſtituendo numeros 0, 1, 2, 3, &c. obtinebuntur ſequentes ſummationes; ac primo quidem ſi $n = 0$, fit $A = 1$, in reliquis autem caſibus erit $A = 0$:

$$S.x^0 p^x = S.p^x = \frac{1}{p-1}(p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1} - p}{p-1} = \frac{p(p^x - 1)}{p-1},$$

quae eſt ſumma progreſſionis geometricae cognita:

$$S.xp^x = \frac{1}{p-1}(xp^{x+1} - S.p^x) = \frac{xp^{x+1}}{p-1} - \frac{(p^{x+1} - p)}{(p-1)^2}$$

ſeu $$S.xp^x = \frac{pxp^x}{p-1} - \frac{p(p^x - 1)}{(p-1)^2},$$

$$S.x^2 p^x = \frac{1}{p-1}(x^2 p^{x+1} - 2 S.xp^x + S.p^x) \quad \text{ſeu}$$

$$S.x^2 p^x = \frac{x^2 p^{x+1}}{p-1} - \frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x - 1)}{(p-1)^3}.$$

Porro eſt

$$S.x^3 p^x = \frac{1}{p-1}(x^3 p^{x+1} - S.x^2 p^x + 3 S.xp^x - S.p^x)$$

ſeu

$$S.x^3 p^x = \frac{x^3 p^{x+1}}{p-1} - \frac{3x^2 p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x - 1)}{(p-1)^4}$$

ſicque vlterius progrediendo ſuperiorum poteſtatum $x^4 p^x$; $x^5 p^x$; $x^6 p^x$; &c. ſummae definiri poterunt, hoc vero commodius praeſtabitur ope expreſſionis generalis, quam nunc inueſtigabimus.

170. Quoniam inuenimus eſſe:

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S.\frac{dy}{dx}p^x + S.\frac{ddy}{2\,dx^2}p^x - S.\frac{d^3y}{6\,dx^3}p^x + \&c.\right)$$

vbi A eſt eiusmodi conſtans, vt ſumma fiat $=0$, ſi ponatur $x=0$: namque hoc caſu fit $y=A$, & $yp^{x+1}=Ap$; hanc conſtantem omittere poterimus, dummodo perpetuo meminerimus ad ſummam quamque ſemper eiusmodi conſtantem adiici oportere, vt facto $x=0$, euaneſcat, ſeu vt alii cuipiam caſui ſatisfiat. Statuamus ergo z loco y, eritque

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{1}{p-1}S.p^x\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)}S.p^x\frac{ddz}{dx^2}$$
$$- \frac{1}{6(p-1)}S.p^x\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)}S.p^x\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)}S.p^x\frac{d^5z}{dx^5}$$
$$+ \&c.$$

Deinde ſtatuamus ſucceſſiue $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; &c. in locum y eritque:

$$S.\frac{p^x dz}{dx} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \&c.$$

S.

$$S.\frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^4 z}{dx^4} - \&c.$$

$$S.\frac{p^x d^3 z}{dx^3} = \frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^4 z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^5 z}{dx^5} - \&c.$$

&c.

Si igitur hi valores fucceffiue fubftituantur, $S.p^x z$ huiusmodi forma exprimetur:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{(p-1)}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{\beta p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{(p-1)}\cdot\frac{ddz}{dx^3}$$
$$+ \frac{\delta p^{x+1}d^4 z}{(p-1)dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{(p-1)}\cdot\frac{d^5 z}{dx^5} + \&c.$$

171. Ad valores litterarum α, β, γ, δ, ε, &c. definiendos, fubftituantur pro quouis termino feries ante inuentae nempe:

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1} = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx} = S\frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1}S\frac{p^x ddz}{dx^2} - \frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^x d^3 dz}{dx^3} + \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} = S\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{(p-1)}S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} - \&c.$$

$$\frac{p^{x+1}d^3 z}{(p-1)dx^3} = S\frac{p^x d^3 z}{dx^3} + \&c.$$

 Habe-

Habebimus ergo: $\quad S.p^x z =$

$$\begin{array}{lccccc}
S.p^x z & +\frac{1}{p-1}S\frac{p^x dz}{dx} & -\frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^x ddz}{dx^2} & +\frac{1}{6(p-1)}S\frac{p^x d^3z}{dx^3} & -\frac{1}{24(p-1)}S\frac{p^x d^4z}{dx^4} & +\&c. \\
-\alpha & -\frac{\alpha}{p-1} & +\frac{\alpha}{2(p-1)} & -\frac{\alpha}{6(p-1)} & & \\
 & +\beta & +\frac{\beta}{p-1} & -\frac{\beta}{2(p-1)} & & \\
 & & -\gamma & -\frac{\gamma}{p-1} & & \\
 & & & +\delta & &
\end{array}$$

vnde coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. valores sequentes obtinebuntur:

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1}\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1}\left(\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\epsilon = \frac{1}{p-1}\left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120}\right) \quad \&c.$$

172. Sit breuitatis gratia $\frac{1}{p-1} = q$, erit:

$$\alpha = q$$

$$\beta = \alpha q + \tfrac{1}{2}q = qq + \tfrac{1}{2}q$$

$$\gamma = \beta q + \tfrac{1}{2}\alpha q + \tfrac{1}{6}q = q^3 + qq + \tfrac{1}{6}q$$

$$\delta = \gamma q + \tfrac{1}{2}\beta q + \tfrac{1}{6}\alpha q + \tfrac{1}{24}q = q^4 + \tfrac{3}{2}q^3 + \tfrac{7}{12}q^2 + \tfrac{1}{24}q$$

$$\epsilon = \delta q + \tfrac{1}{2}\gamma q + \tfrac{1}{6}\beta q + \tfrac{1}{24}\alpha q + \tfrac{1}{120}q$$

seu

seu $\varepsilon = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{120}q$ &

$\zeta = q^6 + \frac{5}{2}q^5 + \frac{13}{6}q^4 + \frac{3}{4}q^3 + \frac{31}{360}q^2 + \frac{1}{720}q$ &c.

seu hoc modo exprimantur:

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \frac{2qq + q}{1.\,2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1.\,2.\,3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$\varepsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}$$ &c.

vbi quilibet coefficiens 16800 oritur, si summa binorum superiorum 1560 + 1800 per exponentem ipsius q, qui hic est 5, multiplicetur.

173. Restituamus autem loco q valorem $\frac{1}{p-1}$,

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1.2\,(p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp + 4p + 1}{1.2.3\,(p-1)^3}$$

$\delta =$

$$\delta = \frac{p^3 + 11p^2 + 11p + 1}{1.\,2.\,3.\,4\,(p-1)^4}$$

$$\varepsilon = \frac{p^4 + 26p^3 + 66p^2 + 26p + 1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,(p-1)^5}$$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6\,(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7\,(p-1)^7}$$

&c.

Lex harum quantitatum ita se habet, vt si ponatur terminus quicunque:

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \&c.}{1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-1)(p-1)^{n-1}}$$

futurum sit:

$A = 2^{n-1} - n$

$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}$

$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}$

$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$

&c.

vnde isti coefficientes α, β, γ, δ, &c. quousque libuerit, continuari possunt.

174. Quodsi vero legem, qua hi coefficientes inter se cohaerent, consideremus, facile patet, eos seriem re-

recurrentem constituere, atque prodire si haec fractio euoluatur:

$$\frac{1}{1-\frac{u}{p-1}-\frac{u^2}{2(p-1)}-\frac{u^3}{6(p-1)}-\frac{u^4}{24(p-1)}-\&c.}$$

prodibit enim haec series:

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\&c.$$

Ponatur illa fractio $=V$, & cum sit:

$$V=\frac{p-1}{p-1-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-\frac{u^4}{24}-\&c.}$$

erit $V=\frac{p-1}{p-e^u}$; vbi e est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est $=1$.

Atque si valor ipsius V per seriem exprimatur secundum potestates ipsius u, orietur:

$$V=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\&c.$$

cuius coefficientes α, β, γ, δ, &c. erunt ii ipsi, quorum in praesenti negotio opus habemus. Iis igitur inventis erit:

$$S.p^x z=\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z-\frac{\alpha dz}{dx}+\frac{\beta ddz}{dx^2}-\frac{\gamma d^3z}{dx^3}+\frac{\delta d^4z}{dx^4}-\&c.\right)$$
$$\pm \text{Const.}$$

quae ergo expressio est terminus summatorius seriei huius:

$$ap+bp^2+cp^3+\ldots\ldots+p^x z$$

cuius terminus generalis est $=p^x z$.

175. Quoniam inuenimus esse $V = \frac{p-1}{p-e^u}$, erit $e^u = \frac{pV - p + 1}{V}$, & logarithmis sumendis fiet $u = l(pV - p + 1) - lV$, hincq; differentiando $du = \frac{(p-1)dV}{pV^2 - (p-1)V}$ quocirca erit $pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}$. Quoniam ergo est $V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$ erit:

$$\begin{aligned} pV^2 = p + 2\alpha pu &+ 2\beta pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \&c. \\ &+ \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\beta pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \&c. \\ &+ \beta\beta pu^4 + 2\beta\gamma pu^5 + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p-1)V = (p-1) + \alpha(p-1)u + \beta(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3 \\ + \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)dV}{du} = (p-1)\alpha + 2(p-1)\beta u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3 \\ + 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \&c. \end{aligned}$$

quibus expressionibus inter se coaequatis reperietur:

$$\begin{aligned} (p-1)\,\alpha &= 1 \\ 2\,(p-1)\,\beta &= \alpha\,(p+1) \\ 3\,(p-1)\,\gamma &= \beta\,(p+1) + \alpha^2 p \\ 4\,(p-1)\,\delta &= \gamma\,(p+1) + 2\alpha\beta p \\ 5\,(p-1)\,\varepsilon &= \delta\,(p+1) + 2\alpha\gamma p + \beta\beta p \\ 6\,(p-1)\,\zeta &= \varepsilon\,(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\beta\gamma p \\ 7\,(p-1)\,\eta &= \zeta\,(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\beta\delta p + \gamma\gamma p \\ &\&c. \end{aligned}$$

ex

ex quibus formulis, si pro p datus numerus assumatur, valores coefficientium α, β, γ, δ, &c. facilius determinari possunt, quam ex lege primum inuenta.

176. Antequam ad casus speciales ratione valoris ipsius p descendamus, ponamus esse $z = x^n$, ita vt haec series summari debeat:

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \quad . \quad . \quad . \quad + x^n p^x$$

eritque per expressionem ante inuentam:

$$s = p^x \Big(\frac{p}{p-1} . x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3} . \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{x-2}$$

$$- \frac{(p^3 + 4p^2 + p)}{(p-1)^4} . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} + \&c. \Big)$$

$\pm$ C, quae reddat $s = 0$ si ponatur $x = 0$.

Hinc ponendo pro n successiue numeros 0, 1, 2, 3, 4, &c. erit:

$$S.x^0 p^x = p^x . \frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}$$

$$S.x^1 p^x = p^x \Big(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2} \Big) + \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2 p^x = p^x \Big(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3} \Big) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3 p^x = p^x \Big(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4} \Big)$$

$$+ \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$$

$$S.x^4p^x = p^x\left(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}\right) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$S.x^5p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3}$$

$$- \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^4} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5}$$

$$- \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

$$S.x^6p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3}$$

$$- \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5}$$

$$- \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6}$$

$$+ \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

&c.

177. Hinc intelligitur, quoties z fuerit functio rationalis integra ipsius x, toties seriei, cuius terminus generalis est p^xz, summam exhiberi posse; propterea quod differentialia ipsius z sumendo, tandem ad euanescentia perueniatur. Ita si proponatur haec series:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{(xx+x)}{2}p^x,$$

ob

ob $z = \frac{xx+x}{2}$, & $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; atque $\frac{ddz}{dx^2} = 1$;

erit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x - \frac{(2x+1)}{2(p-1)} + \frac{(p+1)}{2(p-1)^2}\right) - \frac{p}{p-1}\left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)}\right)$$

seu $s = p^{x+1}\left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^3}$.

Sin autem z fuerit functio non rationalis integra, tum ista termini summatorii expressio in infinitum excurret. Ita si sit $z = \frac{1}{x}$, vt summanda sit haec series:

$$s = p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{4}p^4 + \; . \; . \; . \; . + \frac{1}{x}p^x,$$

ob

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx};\ \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3};\ \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4};\ \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5};\ \&c.$$

prodibit terminus summatorius:

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \&c.\right)$$
$$+ \text{C}.$$

Hoc ergo casu constans C non ex casu $x = 0$ definiri potest: ad eam igitur definiendam ponatur $x = 1$, & quia fit $s = p$, erit:

$$\text{C} = p - \frac{pp}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \&c.\right)$$

178. Ex his perſpicuum eſt, niſi p determinatum numerum ſignificet, parum vtilitatis hinc ad ſummas ſerierum proxime exhibendas redundare. Primum autem patet pro p non poſſe ſcribi 1, propterea, quod omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. fierent infinite magni. Quare cum ſeries, quam nunc tractamus, abeat in eam quam ante iam ſumus contemplati, ſi ponatur $p = 1$, mirum eſt, quod ille caſus tanquam facillimus ex hoc erui nequeat. Tum vero quoque notabile eſt, quod caſu $p = 1$ ſummatio requirat integrale $\int z\,dx$, cum tamen generaliter ſumma ſine vllo integrali exhiberi queat. Sic igitur fit, vt dum omnes coefficientes α, β, γ, δ, &c. in infinitum excreſcunt, ſimul formula illa integralis inuehatur. Hicque adeo caſus, quo $p = 1$, eſt ſolus, ad quem generalis expreſſio hic inuenta applicari nequeat. Neque vero hoc caſu generalis forma a vero recedere cenſenda eſt; nam etſi ſinguli termini fiunt infiniti, tamen reuera omnia infinita ſe deſtruunt, reſtatque quantitas finita ſummae aequalis, & congruens cum ea, quae per priorem methodum inuenitur, quod infra fuſius ſumus declaraturi.

179. Sit igitur $p = -1$, atque ſigna in ſerie ſummanda alternatim ſe excipient:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & & x \\ -a & +b & -c & +d & . \; . \; . \; . \; . \; . & & \pm z \end{array}$$

vbi z erit affirmatiuum ſi x fuerit numerus par, negatiuum autem, ſi x ſit numerus impar. Poſito ergo

$$-a+b-c+d \ldots \pm z = s, \text{ erit}$$

$$s = \frac{\pm 1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \&c.\right) + C.$$

vbi signorum ambiguorum superius valet, si x sit numerus par, contra vero si x sit numerus impar. Mutandis ergo signis erit:

$$a-b+c-d+e-f+ \ldots \mp z =$$

$$\mp \frac{1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \&c.\right) + C.$$

vbi signorum ambiguitas eandem sequitur legem.

180. Hoc casu coefficientes α, β, γ, δ, ϵ, ζ, &c. inueniri possunt ex valoribus ante traditis ponendo vbique $p = -1$. Facilius autem eruentur ex formulis generalibus §. 175. datis, ex quibus simul perspicietur alternos istos coefficientes euanescere. Facto enim $p = -1$ istae formulae abibunt in

$$\begin{aligned}
-\alpha &= 1 \\
-4\beta &= 0 \\
-6\gamma &= 0 - \alpha^2 \\
-8\delta &= 0 - 2\alpha\beta \\
-10\epsilon &= 0 - 2\alpha\gamma - \beta\beta \\
-12\zeta &= 0 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma \\
&\&c.
\end{aligned}$$

 vnde

vnde cum ſit $\beta = 0$, erit quoque $\delta = 0$, porroque $\zeta = 0$, $\theta = 0$, &c. & reliquae litterae ita determinabuntur, vt ſit:

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{6}$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha\gamma}{10}$$

$$\eta = \frac{2\alpha\varepsilon + \gamma\gamma}{14}$$

$$\iota = \frac{2\alpha\eta + 2\gamma\varepsilon}{18} \quad \&c.$$

181. Quo iſte calculus commodius abſolui poſſit introducamus nouas litteras ſitque:

$$\alpha = -\frac{A}{1.2}$$

$$\gamma = \frac{B}{1.2.3.4}$$

$$\varepsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = \frac{D}{1.2.3\ldots8}$$

$$\iota = -\frac{E}{1.2.3\ldots10} \quad \&c.$$

Eritque ſumma ante exhibita:

$$\mp\frac{1}{2}\left(z + \frac{A\,dz}{1.2\,dx} - \frac{B\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{C\,d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \frac{D\,d^7z}{1.2\ldots8\,dx^7} + \&c.\right) + C.$$

Co-

Coefficientes vero ex sequentibus formulis definientur:

$$A = 1$$
$$3B = \frac{4.3}{1.2}\frac{AA}{2}$$
$$5C = \frac{6.5}{1.2} AB$$
$$7D = \frac{8.7}{1.2} AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\frac{BB}{2}$$
$$9E = \frac{10.9}{1.2} AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.BC$$
$$11F = \frac{12.11}{1.2} AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\frac{CC}{2}$$

&c.

quae hoc modo facilius atque ad calculum accommodatius repraesentari possunt:

$$A = 1$$
$$B = 2.\frac{AA}{2}$$
$$C = 3.AB$$
$$D = 4.AC + 4.\frac{6.5}{3.4}.\frac{BB}{2}$$
$$E = 5.AD + 5.\frac{8.7}{3.4}.BC$$
$$F = 6.AE + 6.\frac{10.9}{3.4}.BD + 6.\frac{10.9.8.7}{3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$
$$G = 7.AF + 7.\frac{12.11}{3.4}.BE + 7.\frac{12.11.10.9}{3.4.5.6}.CD$$

&c.

Hinc

Hinc igitur calculo instituto reperietur:

A	=	1				
B	=	1				
C	=	3				
D	=	17				
E	=	155	=	5.31		
F	=	2073	=	691.3		
G	=	38227	=	7.5461	=	$7.\frac{127.129}{3}$
H	=	929569	=	3617.257		
I	=	28820619	=	43867.9.73		&c.

182. Si hos numeros attentius perpendamus, ex factoribus 691, 3617, 43867, facile concludere licet, hos numeros cum supra exhibitis Bernoullianis nexum habere, indeque determinari posse. Hanc igitur relationem investiganti mox patebit hos numeros ex Bernoullianis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. sequenti modo formari posse:

A	=	$2.\ 1.\ 3\ \mathfrak{A}$	=	$2(2^2-1)\mathfrak{A}$
B	=	$2.\ 3.\ 5\ \mathfrak{B}$	=	$2(2^4-1)\mathfrak{B}$
C	=	$2.\ 7.\ 9\ \mathfrak{C}$	=	$2(2^6-1)\mathfrak{C}$
D	=	$2.\ 15.\ 17\ \mathfrak{D}$	=	$2(2^8-1)\mathfrak{D}$
E	=	$2.\ 31.\ 33\ \mathfrak{E}$	=	$2(2^{10}-1)\mathfrak{E}$
F	=	$2.\ 63.\ 65\ \mathfrak{F}$	=	$2(2^{12}-1)\mathfrak{F}$
G	=	$2.127.129\ \mathfrak{G}$	=	$2(2^{14}-1)\mathfrak{G}$
H	=	$2.255.257\ \mathfrak{H}$	=	$2(2^{16}-1)\mathfrak{H}$
		&c.		

Cum

Cum igitur numeri Bernoulliani ſint fracti, coefficientes vero noſtri integri, patet hos factores ſemper tollere fractiones; eruntque ergo:

$A = 1$
$B = 1$
$C = 3$
$D = 17$
$E = 5.31 = 155$
$F = 3.691 = 2073$
$G = 7.43.127 = 38227$
$H = 257.3617 = 929569$
$I = 9.73.43867 = 28820619$
$K = 5.31.41.174611 = 1109652905$
$L = 89.683.854513 = 51943281731$
$M = 3.4097.236364091 = 2905151042481$
$N = 2731.8191.8553103 = 191329672483963$
&c.

Ex his ergo numeris integris viciſſim numeri Bernoulliani inueniri poterunt.

183. Adhibendo igitur numeros Bernoullianos ſeriei propoſitae: $\overset{1}{a} - \overset{2}{b} + \overset{3}{c} - \overset{4}{d} + \overset{5}{e} - \ldots \mp \overset{x}{z}$, ſumma erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots 6\,dx^5} - \frac{(2^8-1)\mathfrak{D}d^7z}{1.2\ldots 8\,dx^7} + \&c.\right)$$
$$+ \text{Conſt.}$$

Hinc autem perſpicitur iſtos numeros non caſu in hanc expreſſionem ingredi; quemadmodum enim ſeries propoſita oritur, ſi ab iſta:

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + z,$$

vbi omnes termini ſignum habent. + ſubtrahatur ſumma alternorum $b + d + f +$ &c. bis ſumta; ita quoque expreſſio inuenta in duas reſolui poteſt partes, quarum altera eſt ſumma omnium terminorum ſigno + affectorum, quae erit:

$$\int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{\&c.}$$

Summa vero alternorum pari modo inuenietur, quo ſupra vſi ſumus. Cum enim vltimus terminus ſit z indici x reſpondens, antecedens indici $x-2$ reſpondens erit:

$$z - \frac{2dz}{dx} + \frac{2^2ddz}{1.2\,dx^2} - \frac{2^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \frac{2^4d^4z}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{\&c.}$$

quae forma ex illa, qua ante terminus antecedens exprimebatur; oritur, ſi loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$. Habebitur ergo ſumma alternorum, ſi in ſumma omnium vbique loco x ſcribatur $\frac{x}{2}$, quae propterea erit:

$$\frac{1}{2}\int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{2\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{2^3\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{2^5\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{\&c.}$$

cuius duplum ſi a ſumma praecedente ſubtrahatur, exiſtente x numero pari, vel ſi praecedens ſumma a duplo huius ſi x eſt numerus impar ſubtrahatur, reſiduum oſtendet ſummam ſeriei:

a —

$$\overset{1}{a} - \overset{2}{b} + \overset{3}{c} - \overset{4}{d} + \overset{5}{e} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mp \overset{x}{z}$$

quae ergo erit:

$$\mp\left(\frac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \&c.\right) + C.$$

quae est eadem expressio, quam modo inueneramus.

184. Sumatur pro z potestas ipsius x, nempe x^n, vt reperiatur summa seriei:

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \;.\;.\;.\;.\; \mp x^n.$$

Ob $\frac{dz}{1dx} = \frac{n}{1}x^{n-1}$; $\frac{d^3z}{1.2.3\,dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}x^{n-3}$; &c.

erit adhibendis coefficientibus A, B, C, D, &c. summa quaesita:

$$\mp\frac{1}{2}\left(x^n + \frac{A}{2}nx^{n-1} - \frac{B}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}x^{n-3} + \frac{C}{6}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}x^{n-5}\right.$$
$$\left. - \frac{D}{8}\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-6)}{1.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;7}x^{n-7} + \&c.\right) + \text{Const.}$$

vbi signum superius valet si sit x numerus par, inferius vero si impar. Constans autem ita definiri debet, vt summa euanescat, si $x = 0$, quo casu signum superius valet. Pro n ergo successiue numeros 0, 1, 2, 3, &c. substituendo sequentes prodibunt summationes:

I. $1 - 1 + 1 - 1 + \;.\;.\;.\;.\; \mp 1 = \mp\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}$
scilicet si numerus terminorum fuerit par, summa erit $= 0$, sin impar erit $= + 1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \mp x = \mp\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
scilicet si numerus terminorum sit par, summa erit $= -\frac{1}{2}x$
& pro numero terminorum impari $= +\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots \mp x^2 = \mp\frac{1}{2}(x^2 + x)$
scilicet pro pari numero $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
& pro impari numero $= +\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots \mp x^3 = \mp\frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
scilicet pro pari $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
& pro impari $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$.

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots \mp x^4 = \mp\frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
scilicet pro numero pari $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
& pro numero impari $= \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$
&c.

185. Apparet ergo in potestatibus paribus praeter $n = 0$, constantem adiiciendam euanescere, hisque casibus summam terminorum numero siue parium siue imparium tantum ratione signi discrepare. Quodsi ergo x fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, haec consideratio cessare debet, ac propterea in summa termini ambigui sunt reiiciendi: vnde sequitur huiusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adiiciendam.

Hanc-

Hancobrem erit:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \&c. \text{ in infinitum} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \&c. \quad \ldots = \frac{A}{4} = + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}}{2}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \&c. \quad \ldots = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \&c. \quad \ldots = -\frac{B}{8} = -\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}}{4}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \&c. \quad \ldots = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \&c. \quad \ldots = \frac{C}{12} = + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \&c. \quad \ldots = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \&c. \quad \ldots = -\frac{D}{16} = -\frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}$$

&c.

Quae eaedem summae per methodum supra traditam series, in quibus signa + & — alternantur, summandi inueniuntur.

186. Si pro n statuantur numeri negatiui, expressio summae in infinitum excurret. Sit $n = -1$, erit summa seriei:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \mp \frac{1}{x} =$$

$$\mp \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \&c.\right) + \text{Const.}$$

Hic autem quia constans non ex casu $x = 0$ definiri potest, ex alio casu erit definienda. Ponatur $x = 1$, at-

atque ob summam $= 1$ & signum inferius erit:

$$\text{Const.} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \&c.\right) \quad \text{seu}$$

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \&c.$$

Vel ponatur $x = 2$, ob summam $= \frac{1}{2}$, & signum superius reperietur:

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2.2^2} + \frac{B}{4.2^4} - \frac{C}{6.2^6} + \&c.\right)$$

$$\text{seu Const.} = \frac{3}{4} - \frac{A}{4.2^2} + \frac{B}{8.2^4} - \frac{C}{12.2^6} + \frac{D}{16.2^8} - \&c.$$

sin autem ponatur $x = 4$, erit:

$$\text{Const.} = \frac{17}{24} - \frac{A}{4.4^2} + \frac{B}{8.4^4} - \frac{C}{12.4^6} + \frac{D}{16.4^8} - \&c.$$

Vtcunque autem constans definiatur, idem prodibit valor, qui simul summam seriei in infinitum continuatae, quae est $= l2$, indicabit.

187. Ceterum ex his nouis numeris A, B, C, D, E, &c. summae serierum potestatum reciprocarum parium, in quibus tantum numeri impares occurrunt, commode summari poterunt. Si enim ponatur:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \&c. = s \quad \text{erit}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \&c. = \frac{s}{2^{2n}},$$

quae ab illa subtracta relinquet:

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)s}{2^{2n}}.$$

Cum

Cum igitur valores ipsius s pro singulis numeris n iam supra exhibuerimus: (125), erit:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{A}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. = \frac{B}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. = \frac{C}{1.2.3 \ldots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \&c. = \frac{D}{1.2.3 \ldots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \&c. = \frac{E}{1.2.3 \ldots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4}$$

&c.

Sin autem omnes numeri ingrediantur, signaque alternentur quia erit:

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \&c. = \frac{(2^{2n}-1)\,s - s}{2^{2n}}$$

habebitur:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c. = \frac{(A-2\mathfrak{A})}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c. = \frac{(B-2\mathfrak{B})}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \&c. = \frac{(C-2\mathfrak{C})}{1.2 \ldots 6} \cdot \frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2 \ldots 6} \cdot \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \&c. = \frac{(D-2\mathfrak{D})}{1.2 \ldots 8} \cdot \frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.2 \ldots 8} \cdot \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \&c. = \frac{(E-2\mathfrak{E})}{1.2 \ldots 10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1.2 \ldots 10} \cdot \pi^{10}$$

&c.

188.

188. Quemadmodum hactenus seriem sumus contemplati, cuius termini erant producta ex terminis progressionis geometricae p, p^2, p^3, &c. & ex terminis seriei cuiuscunque a, b, c, &c. ita poterimus simili ratione prosequi seriem, cuius termini sint producta ex terminis duarum quarumcunque serierum, quarum altera tanquam cognita assumatur. Sit series cognita:

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \ldots + \overset{x}{Z}$$ altera vero incognita $$a + b + c + \ldots + z$$

atque quaeratur summa huius seriei:

$$Aa + Bb + Cc + \ldots + Zz$$

quae ponatur $= Zs$. Sit in serie cognita terminus penultimus $= Y$, atque posito $x - 1$ loco x expressio summae $S.Zs$ abibit in

$$Y\left(s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.\right)$$

Quae cum exprimat summam seriei Zs termino vltimo Zz multatae, erit:

$$Zs - Zz = Ys - \frac{Yds}{dx} + \frac{Ydds}{2dx^2} - \frac{Y^3d^3s}{6dx^3} + \&c.$$

quae aequatio continet relationem, qua summa Zs pendet ab Y, Z & z.

189. Ad hanc aequationem resoluendam negligantur primum termini differentiales, eritque $s = \frac{Zz}{Z-Y}$, ponatur iste valor $\frac{Zz}{Z-Y} = P^1$, fit que reuera $s = P^1 + p$, quo

quo valore in aequatione substituto fiet:

$$(Z-Y)p = -\frac{YdP^{I}}{dx} + \frac{YddP^{I}}{2dx^{2}} - \&c. \\ -\frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^{2}} - \&c.$$

addatur vtrinque YP^{I}, & cum $P^{I} - \frac{dP^{I}}{dx} + \frac{ddP^{I}}{2dP^{I}} - \&c.$ sit valor ipsius P^{I}, qui prodit si loco x ponatur $x-1$, sit iste valor $= P$, eritque

$$(Z-Y)p + YP^{I} = YP - \frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^{2}} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus erit: $p = \frac{Y(P-P^{I})}{Z-Y}$.
Ponatur $\frac{Y(P-P^{I})}{Z-Y} = Q^{I}$, sitque $p = Q^{I} + q$; fiet

$$(Z-Y)q = -\frac{Y(dQ^{I} + dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ^{I} + ddq)}{2dx^{2}} - \&c.$$

positoque Q pro valore ipsius Q^{I}, quem induit si loco x scribatur $x-1$, erit:

$$(Z-Y)q + YQ^{I} = YQ - \frac{Ydq}{dx} + \frac{Yddq}{2dx^{2}} - \&c.$$

vnde neglectis differentialibus fit $q = \frac{Y(Q-Q^{I})}{Z-Y}$.
Ponatur $\frac{Y(Q-Q^{I})}{Z-Y} = R^{I}$, sitque reuera $q = R^{I} + r$; ac simili modo reperitur $r = \frac{Y(R-R^{I})}{Z-Y}$; sicque procedendo erit summa quaesita:

$$Zs = Z(P^{I} + Q^{I} + R^{I} + \&c.).$$

190. Proposita ergo serie quacunque:

$$Aa + Bb + Cc + \dots\dots\dots + Yy + Zz$$

eius summa sequenti modo definietur:

Ponatur posito $x - 1$ loco x

$\frac{Zz}{Z-Y} = P^{I}$; abeatque P^{I} in P

$\frac{Y(P-P^{I})}{Z-Y} = Q^{I}$; abeatque Q^{I} in Q

$\frac{Y(Q-Q^{I})}{Z-Y} = R^{I}$; abeatque R^{I} in R

$\frac{Y(R-R^{I})}{Z-Y} = S^{I}$; abeatque S^{I} in S

&c.

His valoribus inuentis erit summa seriei $=$

$$ZP^{I} + ZQ^{I} + ZR^{I} + ZS^{I} + \&c.$$

$+$ Constante, quae reddat summam $= 0$, si ponatur $x = 0$, seu quod eodem redit, quae efficiat, vt cuipiam casui satisfiat.

191. Formula haec, quia nullis differentialibus est implicata, in plurimis casibus facillime adhibetur, atque etiam veram summam saepenumero exhibet. Sic si proponatur haec series:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \dots\dots + x^2p^x$$

fiat $Z = p^x$ & $z = x^2$, erit $Y = p^{x-1}$, atque $\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}$, & $\frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}$. Hinc fiet

$P^{I} =$

$$P^{1} = \frac{px^2}{p-1}; \quad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q^{1} = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \quad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R^{1} = \frac{2p}{(p-1)^3}; \quad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$S^{1} = 0$, & reliqui euanefcunt omnes: vnde erit fumma =

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$= p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p-1}{(p-1)^3},$$

quemadmodum iam fupra inuenimus.

192. Simili modo, quo ad hanc fummae expresfionem peruenimus, aliam inuenire poterimus expreffionem, fi feries propofita non ex duabus aliis fit compofita: quae illis potiffimum cafibus in vfum vocari poterit, cum in praecedente expreffione ad denominatores euanefcentes peruenitur. Sit igitur propofita haec feries:

$$s = \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \ldots\ldots + \overset{x}{z}$$

quoniam pofito $x-1$ loco x, fumma vltimo termino truncatur, erit:

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \&c.$$

feu $$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \&c.$$

 Quia

Quia hic ipsa summa s non occurrit, negligantur differentialia altiora, fietque $s = \int z\,dx$, ponatur $\int z\,dx = P^{I}$, cuius valor abeat in P si pro x scribatur $x - 1$: sitque reuera $s = P^{I} + p$, erit:

$$z = \frac{dP^{I}}{dx} - \frac{ddP^{I}}{2\,dx^{2}} + \&c. + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2\,dx^{2}} + \&c.$$

quia est $P = P^{I} - \frac{dP^{I}}{dx} + \frac{ddP^{I}}{2\,dx^{2}} - \&c.$

erit $z - P^{I} + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2\,dx^{2}} + \&c.$ vnde fit $p = \int(z - P^{I} + P)dx$. Si porro ponatur $\int(z - P^{I} + P)dx = Q^{I}$, hicque valor abeat in Q posito $x - 1$ loco x, fit $\int(z - P^{I} + P - Q^{I} + Q)\,dx = R^{I} = Q^{I} - \int(Q^{I} - Q)\,dx$ porro $R^{I} - \int(R^{I} - R)\,dx = S^{I}$; &c. erit summa quaesita:

$$s = P^{I} + Q^{I} + R^{I} + S^{I} + \&c. + Const.$$

qua vni casui satisfiat.

193. Mutatis aliquantum litteris ista summatio huc redit. Proposita serie summanda:

$$s = \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \;.\;.\;.\;.\;. + \overset{x}{z}$$

ponatur   posito $x - 1$ loco x

$\int z\,dx = P$ abeatque P in p

$P - \int(P - p)\,dx = Q$ abeatque Q in q

$Q - \int(Q - q)\,dx = R$ abeatque R in r &c.

quibus valoribus inuentis erit summa quaesita:

$$s = P + Q + R + S + \&c.$$

hac-

haecque expreſſio expedite oſtendit ſummam, ſi formulae iſtae integrales exhiberi queant. Sit, vt vſum eius exemplo illuſtremus, $z = xx + x$ eritque

$$P = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx\,; \quad p = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}$$

$$P - p = xx - \tfrac{1}{6} \;\&\; \int (P - p)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x$$

$$Q = \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x\,; \quad q = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{3}$$

$$Q - q = x - \tfrac{1}{3} \;\&\; \int (Q - q)\,dx = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{3}x$$

$$R = \tfrac{1}{2}x \quad ; \qquad r = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

$$R - r = \tfrac{1}{2} \quad ; \qquad \int (R - r)\,dx = \tfrac{1}{2}x$$

$S = 0$, reliquique valores euaneſcunt. Quare ſumma quaeſita erit:

$$\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{3}x^3 + xx + \tfrac{2}{3}x = \tfrac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

Hocque ergo modo omnium ſerierum, quarum termini generales ſunt functiones rationales integrae ipſius x, ſummae ope integrationum continuarum inueniri poſſunt. Ex quibus facile perſpicitur, quam amplum occupet campum doctrina de ſummatione ſerierum, neque omnibus methodis, quae tum habentur tum adhuc excogitari poſſunt, capiendis plura volumina ſufficere.

194. Hactenus ſummas ſerierum inueſtigauimus a termino primo vsque ad eum cuius index eſt x, quibus cognitis ponendo $x = \infty$ ipſius ſeriei in infinitum continuatae ſumma innoteſcet. Saepenumero autem hoc expeditius praeſtatur, ſi non ſumma terminorum a primo

vsque ad eum cuius index eſt x, ſed ſumma omnium terminorum ab iſto, cuius index eſt x, in infinitum vsque quaeratur, hocque caſu imprimis expreſſiones vltimae fiunt tractabiliores. Sit igitur propoſita ſeries cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens ſit $= z$, ſequens indici $x+1$ reſpondens ſit $= z^{I}$, huncque vltra ſequentes ſint z^{II}, z^{III}, &c. quaeraturque ſumma huius ſeriei infinitae:

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ \&c.$$

$$s = z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + \&c. \text{ in infinitum.}$$

Haec igitur ſumma s erit functio ipſius x, in qua ſi ponatur $x+1$ loco x, orietur ſumma prior termino z truncata. Cum ergo hac mutatione s abeat in

$s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \&c.$ erit:

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

$$\text{ſeu } 0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \&c.$$

195. Si nunc vt ante ratiocinium inſtituamus, fiet neglectis differentialibus ſuperioribus, $s = C - \int z\,dx$. Ponatur ergo $\int z\,dx = P$, ſitque reuera $s = C - P + p$, erit

$$0 = z - \frac{dP}{dx} - \frac{ddP}{2dx^2} - \frac{d^3P}{6dx^3} - \&c.$$

$$+ \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \&c.$$

Abe-

Abeat P in P^{I}, si loco x ponatur $x+1$, eritque:

$$o = z + P - P^{I} + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^{2}} + \frac{d^{3}p}{6dx^{3}} + \&c.$$

Hinc neglectis differentialibus altioribus fiet: $p = \int (P^{I} - P)dx - P$. Statuatur $\int (P^{I} - P)dx - P = -Q$, sitque $p = -Q + q$, erit:

$$o = z + P - P^{I} - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2dx^{2}} - \&c. + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^{2}} + \&c.$$

Abeat Q in Q^{I} si loco x ponatur $x+1$ eritque

$$o = z + P - P^{I} + Q - Q^{I} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^{2}} + \&c.$$

vnde sequitur $q = \int (Q^{I} - Q)dx - Q$. Quamobrem si comma cuique quantitati infixum denotet eius valorem, quem induit posito $x+1$ loco x, ponaturque

$$\int z\,dx = P$$
$$P - \int (P^{I} - P)dx = Q$$
$$Q - \int (Q^{I} - Q)dx = R$$
$$R - \int (R^{I} - R)dx = S \quad \&c.$$

erit seriei propositae $z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + z^{IV} + \&c.$ summa $= C - P - Q - R - S - \&c.$ vbi constans C ita debet definiri, vt posito $x = \infty$ tota summa euanescat. Quia autem applicatio huius expressionis integrationes requirit, hoc loco eius vsum declarare non licet.

196. Vt autem formulas integrales euitemus, statuamus summam seriei $= ys$, existente y functione ipsius

ſius x quacunque cognita, cuius valores y^{I}, y^{II}, &c. qui prodeunt ponendo $x+1$, $x+2$, &c. loco x, erunt noti. Si iam ponatur $x+1$ loco x prodibit ſuperior ſeries termino primo mulctata, cuius ſumma propterea

erit $y'\left(s+\frac{ds}{dx}+\frac{dds}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}+\text{\&c.}\right)=ys-z$

ſeu $\quad z+\frac{y'ds}{dx}+\frac{y'dds}{2dx^2}+\frac{y'd^3s}{6dx^3}+\text{\&c.}=(y-y')s$

vnde neglectis differentialibus oritur $s=\frac{z}{y-y'}$. Statuatur $\frac{z}{y'-y}=P$, ſitque reuera $s=-P+p$, erit:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{y'dP}{dx}-\frac{y'ddP}{2dx^2}-\frac{y'd^3P}{6dx^3}-\text{\&c.}\\+\frac{y'dp}{dx}+\frac{y'ddp}{2dx^2}+\frac{y'd^3p}{6dx^3}+\text{\&c.}\end{array}\right\}=(y-y')p$$

ideoque $\frac{y'dp}{dx}+\frac{y'ddp}{2dx^2}+\frac{y'd^3p}{6dx^3}+\text{\&c.}=y'(P'-P)-(y'-y)p.$

Statuatur $Q=\frac{y'(P'-P)}{y'-y}$, ſitque $p=Q+q$; erit:

$y'(Q'-Q)+y'\left(\frac{dq}{dx}+\frac{ddq}{2dx^2}+\text{\&c.}\right)=-(y'-y)q.$

Statuatur $R=\frac{y'(Q'-Q)}{y'-y}$, ſitque $q=-R+r.$

Hocque modo ſi vlterius progrediamur. Seriei propoſitae: $\quad z+z^{I}+z^{II}+z^{III}+z^{IV}+\text{\&c.}$ ſumma ſequenti modo inuenietur.

Sum-

Sumta pro lubitu functione ipsius x, quae sit $= y$, statuatur:

$$P = \frac{z}{y' - y} = \frac{z}{\Delta y}$$

$$Q = \frac{y'(P' - P)}{y' - y} = \frac{y \Delta P}{\Delta y} + \Delta P$$

$$R = \frac{y'(Q' - Q)}{y' - y} = \frac{y \Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q$$

$$S = \frac{y'(R' - R)}{y' - y} = \frac{y \Delta R}{\Delta y} + \Delta R$$

&c.

Hincque erit summa quaesita:

$$= C - Py + Qy - Ry + Sy - \&c.$$

Sumta pro C eiusmodi constante, vt posito $x = \infty$ summa euanescat.

192. Sumatur $y = a^x$; ob $y' = a^{x+1}$, erit: $y' - y = a^x (a - 1)$, vnde fiet:

$$P = \frac{z}{a^x(a-1)} \quad ; \quad P' = \frac{z'}{a^{x+1}(a-1)}$$

$$Q = \frac{a(P' - P)}{a - 1} = \frac{(z' - az)}{a^x(a-1)^2} \; ; \quad Q' = \frac{(z'' - az')}{a^{x+1}(a-1)^2}$$

$$R = \frac{a(Q' - Q)}{a - 1} = \frac{z'' - 2az' + aaz}{a^x(a-1)^3}$$

$$S = \frac{a(R' - R)}{a - 1} = \frac{z''' - 3az'' + 3a^2z' - a^3z}{a^x(a-1)^4}$$

&c.

Quo-

Quocirca ſumma ſeriei propoſita erit:

$$C - \frac{z}{a-1} + \frac{z' - az}{(a-1)^2} - \frac{z'' + 2az' - a^2 z}{(a-1)^3}$$

$$+ \frac{z''' - 3az'' + 3a^2 z' - a^3 z}{(a-1)^4}$$

&c.

Haec vero eadem ſummae expreſſio iam ſupra eſt inventa Capite primo. Hinc autem aliis pro y valoribus accipiendis infinitae aliae expreſſiones erui poterunt; vnde ea, quae cuique caſui maxime ſit accommodata, eligi poteſt.

CAPUT

CAPUT VIII.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN FORMANDIS SERIEBUS.

198.

Vnum adhuc calculi differentialis vſum in doctrina ſerierum commemorabimus, qui in ipſa formatione ſerierum conſiſtit, & ad quem iam ſupra prouocauimus, cum quaeſtio eſſet de fractione, cuius denominator ſit poteſtas quaecunque functionis cuiuspiam, in ſeriem euoluenda. Iſta methodus autem ſimilis eſt ei, qua iam aliquoties ſumus vſi, dum functio in ſeriem conuertenda aequalis fingitur cuipiam ſeriei, in ſingulis terminis coefficientes indeterminatos habenti, qui deinceps aequalitate conſtituta determinentur. Haec autem determinatio ſaepenumero mirifice adiuuatur, ſi antequam ea ſuſcipiatur ad differentialia cum prima, tum nonnunquam quoque ad ſecunda aequatio perducatur. Quae methodus cum in calculo integrali ampliſſimi ſit vſus, eam hic diligentius exponemus.

199. Primum igitur breuiter repetamus, quae ſupra de euolutione fractionum in ſeries ſine calculi differentialis ſubſidio attulimus. Sit fractio quaecunque propoſita:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.} = s$$

quam in feriem fecundum poteftates ipfius x procedentem conuerti oporteat. Fingatur pro s feries indeterminata:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

Cum igitur fractione per multiplicationem fublata fit:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \&c.$$
$$= s(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \&c.)$$

fi pro s feries ficta fubftituatur prodibit fequens aequatio:

$$\begin{array}{llllllll}
A & + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + Ex^4 & + Fx^5 & + \&c. = \\
\hline
\mathfrak{A}\alpha & + \mathfrak{B}\alpha x & + \mathfrak{C}\alpha x^2 & + \mathfrak{D}\alpha x^3 & + \mathfrak{E}\alpha x^4 & + \mathfrak{F}\alpha x^5 & + \&c. \\
 & + \mathfrak{A}\beta & + \mathfrak{B}\beta & + \mathfrak{C}\beta & + \mathfrak{D}\beta & + \mathfrak{E}\beta & + \&c. \\
 & & + \mathfrak{A}\gamma & + \mathfrak{B}\gamma & + \mathfrak{C}\gamma & + \mathfrak{D}\gamma & + \&c. \\
 & & & + \mathfrak{A}\delta & + \mathfrak{B}\delta & + \mathfrak{C}\delta & + \&c. \\
 & & & & + \mathfrak{A}\epsilon & + \mathfrak{B}\epsilon & + \&c. \\
 & & & & & + \mathfrak{A}\zeta & + \&c.
\end{array}$$

Aequalitate ergo inter fingulos terminos, qui easdem ipfius x poteftates continent, conftituta fiet:

$$\mathfrak{A}\alpha - A = 0$$
$$\mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\beta - B = 0$$
$$\mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{A}\gamma - C = 0$$
$$\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{A}\delta - D = 0$$
$$\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \mathfrak{A}\epsilon - E = 0 \quad \&c.$$

ex

ex quibus aequationibus coefficientes ficti $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. determinantur, sicque series infinita inuenitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

fractioni propositae s aequalis. Atque in hac forma si tam numerator quam denominator fractionis s finito terminorum numero constent, omnes series recurrentes comprehenduntur, de quibus iam supra fusius est tractatum.

200. Quodsi autem vel numerator vel denominator vel vterque ad dignitatem quamcunque fuerit elevatus, tum hoc modo series difficulter obtinetur; propterea quod negotium, nisi functio eleuata sit binomium, perquam sit laboriosum. Calculo autem differentiali iste labor euitari potest. Adsit primum solus numerator, sitque: $s = (A + Bx + Cxx)^n$,

vnde quaeratur series secundum potestates ipsius x procedens huic trinomii dignitati aequalis; quam quidem finitam fore constat, si exponens n fuerit numerus integer affirmatiuus. Fingatur iterum pro s series indefinita:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \&c.$$

cuius terminum primum $\mathfrak{A}$ constat esse $= A^n$: si enim ponatur $x = 0$, ex priori forma proposita fit $s = A^n$, ex serie autem ficta $s = \mathfrak{A}$. Haec autem primi termini determinatio ex ipsa rei natura est petenda, si ad differentialia descendere velimus, quia hinc primus terminus non determinatur, vti mox patebit.

201. Cum sit $s = (A + Bx + Cx^2)^n$, erit logarithmis sumendis $ls = nl(A + Bx + Cx^2)$; hincque sumtis differentialibus habebitur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx}{A + Bx + Cx^2}, \quad \text{seu}$$

$$(A + Bx + Cx^2)\frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx).$$

Ex serie autem ficta est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

Si igitur haec series loco $\frac{ds}{dx}$, & pro s ipsa series ficta substituatur, prodibit sequens aequatio:

$$\begin{array}{llllll} A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \&c. \\ \quad + B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \&c. \\ & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \&c. \\ \hline nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \&c. \\ \quad + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \&c. \end{array} =$$

Aequalitate ergo hic inter terminos eiusdem ipsius x potestatis constituta erit:

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nCA}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$\mathfrak{E} =$

$$\mathfrak{E} = \frac{(n-3)\,B\mathfrak{D} + (2n-2)\,C\mathfrak{E}}{4A}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{(n-4)\,B\mathfrak{E} + (2n-3)\,C\mathfrak{D}}{5A}$$

&c.

Cum igitur vt ante vidimus ſit $\mathfrak{A} = A^n$, erit $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, hincque reliqui coefficientes omnes ſucceſſiue determinabuntur. Lex autem, quam ipſi ſequuntur facillime ex his formulis patet, quae vehementer obſcura manſiſſet, ſi trinomium actu eleuare voluiſſemus.

202. Haec eadem methodus ſuccedit, ſi polynomium quodcunque ad quampiam dignitatem eleuari debeat. Sit

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)^n$$

fingaturque:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

erit $\mathfrak{A} = A^n$, qui valor colligitur, ſi ponatur $x = 0$. Sumtis iam vt ante logarithmis, eorumque differentialibus reperietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{nB\,dx + 2nCx\,dx + 3nDx^2dx + 4nEx^3dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.}$$

ſeu $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)\frac{ds}{dx} =$

$$s\,(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \&c.)$$

Cum

Cum igitur sit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \&c.$$

Erit his seriebus pro s & $\frac{ds}{dx}$ substitutis:

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & +2A\mathfrak{C}x & +3A\mathfrak{D}x^2 & +4A\mathfrak{E}x^3 & +5A\mathfrak{F}x^4 & +\&c. \\
 & +B\mathfrak{B} & +2B\mathfrak{C} & +3B\mathfrak{D} & +4B\mathfrak{E} & +\&c. \\
 & & +C\mathfrak{B} & +2C\mathfrak{C} & +3C\mathfrak{D} & +\&c. \\
 & & & +D\mathfrak{B} & +2D\mathfrak{C} & +\&c. \\
 & & & & +E\mathfrak{B} & +\&c. = \\
\hline
n B\mathfrak{A} & +nB\mathfrak{B} & +nB\mathfrak{C} & +nB\mathfrak{D} & +nB\mathfrak{E} & +\&c. \\
 & +2nC\mathfrak{A} & +2nC\mathfrak{B} & +2nC\mathfrak{C} & +2nC\mathfrak{D} & +\&c. \\
 & & +3nD\mathfrak{A} & +3nD\mathfrak{B} & +3nD\mathfrak{C} & +\&c. \\
 & & & +4nE\mathfrak{A} & +4nE\mathfrak{B} & +\&c. \\
 & & & & +5nF\mathfrak{A} & +\&c.
\end{array}$$

Vnde deriuantur sequentes determinationes:

$$\begin{aligned}
A\mathfrak{B} &= n\,B\mathfrak{A} \\
2A\mathfrak{C} &= (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A} \\
3A\mathfrak{D} &= (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A} \\
4A\mathfrak{E} &= (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A} \\
5A\mathfrak{F} &= (n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D} + (3n-2)C\mathfrak{C} + (4n-1)E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A} \\
&\&c.
\end{aligned}$$

vnde quemadmodum coefficientes ficti $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, &c. a se inuicem pendeant, hincque determinentur, cum sit $\mathfrak{A} = A^n$, luculentissime apparet.

203. Quoniam, si quantitas $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$ ex finito terminorum numero constat, numerusque n fuerit integer affirmatiuus, quaecunque potestas finito etiam terminorum numero constare debet: manifestum est hoc casu, formulas modo inuentas tandem euanescere debere, atque cum omnes termini adesse debeant, vt primum vnus euanuerit, simul omnes sequentes euanescere debere. Ponamus formulam propositam $A+Bx+Cx^2$ esse trinomium, eiusque cubum quaeri, vt sit $n=3$, erit

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{A} = A^3 \text{ ideoque} & ; & \mathfrak{A} = A^3 \\
A\mathfrak{B} = 3B\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{B} = 3A^2B \\
2A\mathfrak{C} = 2B\mathfrak{B} + 6C\mathfrak{A} & ; & \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C \\
3A\mathfrak{D} = 1B\mathfrak{C} + 5C\mathfrak{B} & ; & \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC \\
4A\mathfrak{E} = 0 + 4C\mathfrak{C} & ; & \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2 \\
5A\mathfrak{F} = -B\mathfrak{E} + 3C\mathfrak{D} & ; & \mathfrak{F} = 3BC^2 \\
6A\mathfrak{G} = -2B\mathfrak{F} + 2C\mathfrak{E} & ; & \mathfrak{G} = C^3 \\
7A\mathfrak{H} = -3B\mathfrak{G} + 1C\mathfrak{F} & ; & \mathfrak{H} = 0 \\
8A\mathfrak{J} = -4B\mathfrak{H} + 0 & ; & \mathfrak{J} = 0.
\end{array}
$$

Quoniam igitur iam bini sunt $=0$, sequentiumque quilibet a duobus praecedentibus pendet, patet, omnes sequentes pariter euanescere debere. Hancque ob causam lex, qua hi coefficientes a se inuicem pendere sunt inventi, eo magis est notatu digna.

204. Si n fuerit numerus negatiuus, ita vt s aequale fiat fractioni, series in infinitum excurret. Sit igitur

$$s = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingatur pro eius valore haec feries:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

Atque fi in fuperioribus formulis pro litteris A, B, C, D, &c. ponantur α, β, γ, δ, &c. fimulque fiat n negatiuum, fequentes determinationes coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. prodibunt:

$$\mathfrak{A} = \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

$$\alpha\mathfrak{B} + n\beta\mathfrak{A} = 0$$

$$2\alpha\mathfrak{C} + (n+1)\beta\mathfrak{B} + 2n\gamma\mathfrak{A} = 0$$

$$3\alpha\mathfrak{D} + (n+2)\beta\mathfrak{C} + (2n+1)\gamma\mathfrak{B} + 3n\delta\mathfrak{A} = 0$$

$$4\alpha\mathfrak{E} + (n+3)\beta\mathfrak{D} + (2n+2)\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)\delta\mathfrak{B} + 4n\varepsilon\mathfrak{A} = 0$$

$$5\alpha\mathfrak{F} + (n+4)\beta\mathfrak{E} + (2n+3)\gamma\mathfrak{D} + (3n+2)\delta\mathfrak{C} + (4n+1)\varepsilon\mathfrak{B} + 5n\zeta\mathfrak{A} = 0$$

&c.

Quae formulae eandem continent legem horum coefficientium numerorum, quam iam fupra obferuauimus in introductione; cuiusque adeo veritatem nunc demum rigide demonftrare licuit.

205. Haec ita fe habent, fi numerator fractionis fuerit vnitas, vel etiam quaepiam ipfius x poteftas, puta x^m; pofteriori enim cafu tantum oportebit feriem priori inuentam $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \&c.$ multiplicare per x^m. At fi numerator conftet ex duobus pluribusue terminis, tum fupra quidem legem progreffionis

nis non obseruauimus, quamobrem eam hic per differentiationem inuestigemus. Sit igitur:

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque pro valore huius fractionis sequens series:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \&c.$$

cuius primus terminus $\mathfrak{A}$ vt definiatur, ponatur $x = 0$, eritque ex priori expressione $s = \frac{A}{\alpha^n}$, ex ficta vero $s = \mathfrak{A}$, vnde necesse est, vt sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{\alpha^n}$. Quo termino determinato reliqui per differentiationem innotescent.

206. Sumtis logarithmis erit:

$$ls = l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)$$
$$- nl(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.)$$

hincque differentiando orietur:

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cdx + 3Dx^2dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}$$
$$- \frac{n\beta dx - 2n\gamma xdx - 3n\delta x^2dx - \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.}$$

Sublatisque per multiplicationem fractionibus erit:

$$\left(\begin{array}{lllll} A\alpha + A\beta x & + A\gamma x^2 & + A\delta x^3 & + \&c. \\ \quad + B\alpha & + B\beta & + B\gamma & + \&c. \\ & + C\alpha & + C\beta & + \&c. \\ & & + D\alpha & + \&c. \end{array}\right\} \frac{ds}{dx} =$$

$$\left(\begin{array}{llllll} B\alpha + & B\beta x + & B\gamma x^2 + & B\delta x^3 + & B\varepsilon x^4 & + \&c. \\ \quad + 2C\alpha & + 2C\beta & + 2C\gamma & + 2C\delta & & + \&c. \\ & + 3D\alpha & + 3D\beta & + 3D\gamma & & + \&c. \\ & & + 4E\alpha & + 4E\beta & & + \&c. \\ & & & + 5F\alpha & & + \&c. \end{array}\right\} s$$

$$-\left(\begin{array}{llllll} A\beta + 2A\gamma x & + 3A\delta x^2 & + 4A\varepsilon x^3 & + 5A\zeta x^4 & + \&c \\ \quad + B\beta & + 2B\gamma & + 3B\delta & + 4B\varepsilon & + \&c. \\ & + C\beta & + 2C\gamma & + 3C\delta & + \&c. \\ & & + D\beta & + 2D\gamma & + \&c. \\ & & & + E\beta & + \&c. \end{array}\right\} ns.$$

Cum nunc fit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \&c.$ erit factis fubftitutionibus:

$$A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} - B\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} + (n-1)B\beta\mathfrak{A} - 2C\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + 3n\,A\delta\mathfrak{A} \\ \quad + B\alpha\mathfrak{C} + n\,B\beta\mathfrak{B} + (2n-1)\,B\gamma\mathfrak{A} \\ \quad - C\alpha\mathfrak{B} + (h-2)\,C\beta\mathfrak{A} \\ \quad - 3\,D\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + 4n\,A\varepsilon\mathfrak{A} \\ \quad + 2B\alpha\mathfrak{D} + (n+1)B\beta\mathfrak{C} + 2n\,B\gamma\mathfrak{B} + (3n-1)B\delta\mathfrak{A} \\ \quad + 0\,C\alpha\mathfrak{C} + (n-1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2)C\gamma\mathfrak{A} \\ \quad - 2\,D\alpha\mathfrak{B} + (n-3)D\beta\mathfrak{A} \\ \quad - 4\,E\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Hinc

Hinc lex, qua iſtae formulae progrediuntur, facile perſpicitur: prima enim cuiusque aequationis linea eandem ſequitur legem, quam §. 284. habuimus. Tum vero coefficientes ſecundarum linearum oriuntur, ſi a coefficientibus ſuperioribus ſubtrahatur $n+1$; ſimilique modo ex linea ſecunda formatur linea tertia & ſequentes, a coefficientibus ſuperioribus continuo ſubtrahendo $n+1$; ipſae autem litterae quemvis terminum componentes per ſolam inſpectionem facillime formantur.

207. Sin autem quoque numerator fractionis fuerit quaepiam poteſtas: ſcilicet

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \&c.)^n}$$

fingaturque $s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \&c.$ erit $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$; reliqui vero coefficientes ex ſequentibus formulis determinabuntur:

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} \\ -mB\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} \\ -(m-1)B\alpha\mathfrak{B} + (n-m)B\beta\mathfrak{A} \\ -2mC\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + 3nA\delta\mathfrak{A} \\ -(m-2)B\alpha\mathfrak{C} + (n-m+1)B\beta\mathfrak{B} + (2n-m)B\gamma\mathfrak{A} \\ -(2m-1)C\alpha\mathfrak{B} + (n-2m)C\beta\mathfrak{A} \\ -3mD\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + 4nA\epsilon\mathfrak{A} \\ -(m-3)B\alpha\mathfrak{D} + (n-m+2)B\beta\mathfrak{C} + (2n-m+1)B\gamma\mathfrak{B} + (3n-m)B\delta\mathfrak{A} \\ -(2m-2)C\alpha\mathfrak{C} + (n-2m+1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2m)C\gamma\mathfrak{A} \\ -(3m-1)D\alpha\mathfrak{B} + (n-3m)D\beta\mathfrak{A} \\ \&c. \qquad -4mE\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

Lex

Lex, qua iſtae formulae vlterius continuantur, ex inſpectione facilius apparet, quam verbis deſcribi queat. Deſcendendo autem coefficientes diminuuntur differentia $n+m$; horizontaliter autem progrediendo augentur continuo differentia $n-1$.

208. Hoc igitur modo doctrina de ſeriebus recurrentibus amplificatur, dum iſtum defectum ſuppleuimus, atque legem coefficientium definiuimus, ſi non ſolum denominator fractionis fuerit poteſtas quaecunque, ſed etiam numerator ex quotlibet terminis conſtet, ad quam legem detegendam ſola inductio non ſufficiebat. Praeter plurimos autem vſus ſerierum recurrentium, quos iam expoſuimus, maximam quoque afferunt vtilitatem ad ſummas quarumuis ſerierum proxime inueniendas: cuius ſpecimen iam in Capite primo huius ſectionis exhibuimus, dum ſeriem ſubſtitutione $x = \frac{y}{1+ny}$ in aliam transmutauimus, quae ſaepenumero terminorum numero finito conſtet. Eaque methodus vlterius extendi potuiſſet, ſi pro x aliae functiones ſubſtitutae fuiſſent. Quoniam vero tum lex progreſſionis ſerierum, quae loco poteſtatum ipſius x poni deberent, non ſatis luculenter conſtabat, in hunc locum iſtam amplificationem reſeruare viſum eſt; cum memorata lex iam penitus eſſet detecta. Interim tamen re diligentius perpenſa comperimus idem negotium ſine hac progreſſionis lege expediri poſſe, in ſubſidium tantum vocando methodum, qua hic ad hanc ipſam legem inueſtigandam ſumus vſi.

209. Sit igitur proposita series quaecunque

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

quam in aliam transformari oporteat, cuius termini singuli sint fractiones, quarum denominatores secundum potestates formulae huiusmodi $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.$ procedant. Quo igitur a simplicioribus incipiamus, ponamus esse:

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \&c.$$

aequalitate illius seriei cum hac expressione constituta, multiplicetur vbique per $\alpha + \beta x$, fietque:

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \&c. \\ + A\beta + B\beta \quad + C\beta \quad + \&c. \end{matrix} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \&c.$$

statuatur $\mathfrak{A} = A\alpha$; fiatque:

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A^I \\ B\beta + C\alpha &= B^I \\ C\beta + D\alpha &= C^I \\ D\beta + E\alpha &= D^I \quad \&c. \end{aligned}$$

erit diuisione per x instituta:

$$A^I + B^I x + C^I x^2 + D^I x^3 + \&c. = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \&c.$$

Multiplicetur denuo per $\alpha + \beta x$, positoque

$$\begin{aligned} A^I\beta + B^I\alpha &= A^{II} \\ B^I\beta + C^I\alpha &= B^{II} \\ C^I\beta + D^I\alpha &= C^{II} \quad \&c. \end{aligned}$$

fiet

$$A^I\alpha + A^{II}x + B^{II}x^2 + C^{II}x^3 + \&c. = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \&c.$$

Sit

Sit igitur $\mathfrak{B} = A^{I}\alpha$; atque operationem vt ante instituendo, si fiat:

$A^{II}\beta + B^{II}\alpha = A^{III}$	$A^{III}\beta + B^{III}\alpha = A^{IV}$
$B^{II}\beta + C^{II}\alpha = B^{III}$	$B^{III}\beta + C^{III}\alpha = B^{IV}$
$C^{II}\beta + D^{II}\alpha = C^{III}$	$C^{III}\beta + D^{III}\alpha = C^{IV}$
&c.	&c.

erit $\mathfrak{C} = A^{II}\alpha$; $\mathfrak{D} = A^{III}\alpha$; $\mathfrak{E} = A^{IV}\alpha$; &c. vnde summa seriei propositae hoc modo exprimetur, vt sit:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha+\beta x} + \frac{A^{I}\alpha x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{A^{II}\alpha x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \frac{A^{III}\alpha x^3}{(\alpha+\beta x)^4} + \&c.$$

Quae eadem series orta fuisset ex substitutione $\frac{x}{\alpha+\beta x} = y$ seu $x = \frac{\alpha y}{1-\beta y}$.

210. Haec transformatio optimo cum successu adhibetur, si series proposita $A + Bx + Cx^2 + \&c.$ ita fuerit comparata, vt tandem confundatur cum serie recurrente seu potius geometrica ex fractione $\frac{P}{\alpha+\beta x}$ orta. Tum enim valores A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, &c. tandem euanescent; hincque multo magis litterae A^{II}, A^{III}, A^{IV}, &c. constituent seriem maxime conuergentem. Poterimus autem simili modo denominatores trinomiales & polynomiales quoscunque adhibere, qui vsum habebunt eximium, si series proposita tandem cum recurrente confundatur. Proposita ergo serie:

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

sta-

statuatur $s = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^I x^2 + \mathfrak{B}^I x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} +$

$$\frac{\mathfrak{A}^{II} x^4 + \mathfrak{B}^{II} x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}^{III} x^6 + \mathfrak{B}^{III} x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \&c.$$

Multiplicetur vbique per $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, positoque

$$\begin{array}{ll} A\gamma + B\beta + C\alpha = A^I & \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B^I & \& \quad \mathfrak{A} = A\alpha \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C^I & \quad\;\; \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha \\ \&c. & \end{array}$$

orietur aequatio priori similis, diuisione per xx instituta:

$$A^I + B^I x + C^I x^2 + D^I x^3 + E^I x^4 + \&c. =$$

$$\frac{\mathfrak{A}^I + \mathfrak{B}^I x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{\mathfrak{A}^{II} x^2 + \mathfrak{B}^{II} x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{\mathfrak{A}^{III} x^4 + \mathfrak{B}^{III} x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \&c.$$

Si igitur vt ante operatio instituatur faciendo

$$\begin{array}{ll} A^I\gamma + B^I\beta + C^I\alpha = A^{II} & \mathfrak{A}^I = A^I\alpha \\ B^I\gamma + C^I\beta + D^I\alpha = B^{II} & \mathfrak{B}^I = A^I\beta + B^I\alpha \\ C^I\gamma + D^I\beta + E^I\alpha = C^{II} & \\ \&c. & \text{porroque:} \\ A^{II}\gamma + B^{II}\beta + C^{II}\alpha = A^{III} & \mathfrak{A}^{II} = A^{II}\alpha \\ B^{II}\gamma + C^{II}\beta + D^{II}\alpha = B^{III} & \mathfrak{B}^{II} = A^{II}\beta + B^{II}\alpha \\ C^{II}\gamma + D^{II}\beta + E^{II}\alpha = C^{III} & \\ \&c. & \end{array}$$

sicque vlterius valores similes inuestigando erit:

$$s =$$

$$\frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} + \frac{(A^I\alpha + (A^I\beta + B^I\alpha)x)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} + \frac{(A^{II} + (A^{II}\beta + B^{II}\alpha)x)x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3}$$

$$+ \&c.$$

211. Si ponatur $x = 1$, qua positione amplitudini nihil decedit, cum α, β, γ pro lubitu accipi possint, fueritque

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Cum putentur successiue sequentes valores:

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'' \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'' \text{ sicque} \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'' \text{ porro} \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

insuper vero breuitatis ergo ponatur:

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$

obtinebitur summa seriei propositae hoc modo expressa

$$s = \begin{cases} (\alpha+\beta)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right) \\ + \alpha\ \left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right) \end{cases}$$

212. Eodem modo denominatores ex pluribus terminis constantes accipi possunt; & quoniam operatio ex praecedentibus facile perspicitur, hic tantum casum pro quadrinomio euoluamus: Sit ergo

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

Quaerantur valores sequentes:

$$A\delta + B\gamma + C\beta + D\alpha = A'$$
$$B\delta + C\gamma + D\beta + E\alpha = B'$$
$$C\delta + D\gamma + E\beta + F\alpha = C'$$
$$\&c.$$

A'δ

$$A'\delta + B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = A''$$
$$B'\delta + C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = B''$$
$$C'\delta + D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = C''$$
&c.
$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = A'''$$
$$B''\delta + C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = B'''$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = C'''$$
&c.

Tum vero ſit $\alpha + \beta + \gamma + \delta = m$; eritque

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{A}{m} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \&c.\right) \\ s = & (\alpha+\beta)\left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \&c.\right) \\ & + \alpha\left(\frac{C}{m} + \frac{C'}{m^2} + \frac{C''}{m^3} + \frac{C'''}{m^4} + \&c.\right) \end{aligned}$$

vnde ſimul progreſſio, ſi adhuc plures partes denominatori m tribuantur, clariſſime perſpicitur.

213. Neque vero abſolute opus eſt, vt denominatores fractionum, ad quas ſummam ſeriei reducimus, ſint poteſtates eiusdem formulae $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \&c.$ ſed haec ipſa in ſingulis terminis variari poteſt. Quo hoc clarius pateat, ſumamus primo tantum duos terminos, fingaturque ſeries

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

in hanc ſeriem fractionum conuerti:

 $s =$

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)} + \frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} + \&c.$$

Multiplicetur primum vtrinque per $\alpha + \beta x$, ponaturque

$$A\beta + B\alpha = A'$$
$$B\beta + C\alpha = B' \quad \& \quad \mathfrak{A} = A\alpha$$
$$C\beta + D\alpha = C'$$
&c. fietque per x diuiso

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \&c. = \frac{\mathfrak{A}'}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} + \&c.$$

Deinde fimili modo multiplicando per $\alpha' + \beta' x$; tumque per $\alpha'' + \beta'' x$, & ita porro, fi ftatuatur:

$A'\beta' + B'\alpha' = A''$	$A''\beta'' + B''\alpha'' = A'''$	$A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A''''$
$B'\beta' + C'\alpha' = B''$	$B''\beta'' + C''\alpha'' = B'''$	$B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B''''$
$C'\beta' + D'\alpha' = C''$	$C''\beta'' + D''\alpha'' = C'''$	$C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C''''$
&c.	&c.	&c.

fiet $\mathfrak{A}' = A'\alpha'$; $\mathfrak{A}'' = A''\alpha''$; $\mathfrak{A}''' = A'''\alpha'''$; &c. atque hinc feries propofita conuertetur in hanc:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)} + \frac{A''\alpha'' x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)} + \&c,$$

vbi valores α, β, α', β', α'', β'', α''', β''', &c. funt arbitrarii; quouis autem cafu ita accipi poffunt, vt ifta noua feries maxime conuergat.

214. Applicemus hoc quoque ad factores trinomiales, fitque propofita ferie quacunque:

$s =$

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \&c.$$

$A\gamma + B\beta + C\alpha = A'$	$A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A''$
$B\gamma + C\beta + D\alpha = B'$	$B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B''$
$C\gamma + D\beta + E\alpha = C'$	$C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C''$
&c.	&c.
$A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A'''$	$A'''\gamma''' + B'''\beta''' + C'''\alpha''' = A''''$
$B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B'''$	$B'''\gamma''' + C'''\beta''' + D'''\alpha''' = B''''$
$C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C'''$	$C'''\gamma''' + D'''\beta''' + E'''\alpha''' = C''''$
&c.	&c.

Deinde ſtatuatur breuitatis gratia:

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = m'$$
$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = m''$$
$$\alpha''' + \beta''' + \gamma''' = m'''$$
&c.

eritque ſeriei propoſitae ſumma:

$$s = \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{mm'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{mm'm''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{mm'm''m'''} + \&c.$$
$$+ \frac{\beta A}{m} + \frac{\beta' A'}{mm'} + \frac{\beta'' A''}{mm'm''} + \frac{\beta''' A'''}{mm'm''m'''} + \&c.$$

215. Quoniam haec tam late patent, vt vſus minus clare percipi poſſit, reſtringamus transformationem §. 213. traditam, ſitque $x = -1$, vt habeatur haec ſeries:

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \&c.$$

ſtatuaturque:

$B - A = A'$	$B' - 2A' = A''$	$B'' - 3A'' = A'''$	$B''' - 4A''' = A''''$
$C - B = B'$	$C' - 2B' = B''$	$C'' - 3B'' = B'''$	$C''' - 4B''' = B''''$
$D - C = C'$	$D' - 2C' = C''$	$D'' - 3C'' = C'''$	$D''' - 4C''' = C''''$
$E - D = D'$	$E' - 2D' = D''$	$E'' - 3D'' = D'''$	$E''' - 4D''' = D''''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Quibus valoribus inuentis, erit ſumma ſeriei propoſitae aequalis ſequenti ſeriei:

$$s = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \&c.$$

Simili igitur modo ſeries quaecunque propoſita in innumerabiles alias ſibi aequales transmutari poteſt, inter quas ſine dubio ſeries maxime conuergentes reperientur, quarum ope ſumma propoſita vero proxime indagari queat.

216. Reuertamur autem ad inuentionem ſerierum, quarum progreſſionis legem calculus differentialis declarat. Cum igitur hoc in quantitatibus algebraicis iam ſit praeſtitum, progrediamur ad transcendentes, quaeraturque ſeries huic logarithmo aequalis:

$$s = l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.)$$

fingatur quaeſito ſatisfacere haec ſeries:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \mathfrak{F}x^6 + \&c.$$

Cum igitur ex illius aequationis differentiatione ſequatur

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \&c.}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.}$$

erit:

$$(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \&c.)\frac{ds}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + \&c.$$

Quia

Quia vero ex ficta aequatione est:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \&c.$$

facta hac substitutione oritur haec aequatio:

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{A} & + 2\mathfrak{B}x & + 3\mathfrak{C}x^2 & + 4\mathfrak{D}x^3 & + 5\mathfrak{E}x^4 & + \&c. \\ & + \mathfrak{A}\alpha & + 2\mathfrak{B}\alpha & + 3\mathfrak{C}\alpha & + 4\mathfrak{D}\alpha & + \&c. \\ & & + \mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 3\mathfrak{C}\beta & + \&c. \\ & & & + \mathfrak{A}\gamma & + 2\mathfrak{B}\gamma & + \&c. \\ & & & & + \mathfrak{A}\delta & + \&c. = \\ \hline \alpha & + 2\beta x & + 3\gamma x^2 & + 4\delta x^3 & + 5\varepsilon x^4 & + \&c. \end{array}$$

Ex qua sequentes determinationes obtinentur:

$$\mathfrak{A} = \alpha$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta$$
$$\mathfrak{C} = -\tfrac{2}{3}\mathfrak{B}\alpha - \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma$$
$$\mathfrak{D} = -\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}\alpha - \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta$$
$$\mathfrak{E} = -\tfrac{4}{5}\mathfrak{D}\alpha - \tfrac{3}{5}\mathfrak{C}\beta - \tfrac{2}{5}\mathfrak{B}\gamma - \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon$$
&c.

217. Proposita nunc sit quantitas exponentialis:

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \&c.}$$

in qua e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, atque fingatur series quaesita:

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \&c.$$

iam enim ex casu $x = 0$ patet, primum terminum esse debere vnitatem. Cum igitur sumendis logarithmis sit

$ls =$

$$ls = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \zeta x^6 + \&c.$$

erit differentialibus ſumtis:

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \&c.)$$

At vero ex aequatione ficta erit:

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \&c. =$$

$$\begin{array}{llllll} \alpha & + \mathfrak{A}\alpha x & + \mathfrak{B}\alpha x^2 & + \mathfrak{C}\alpha x^3 & + \mathfrak{D}\alpha x^4 & + \&c. \\ & + 2\beta & + 2\mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 2\mathfrak{C}\beta & + \&c. \\ & & + 3\gamma & + 3\mathfrak{A}\gamma & + 3\mathfrak{B}\gamma & + \&c. \\ & & & + 4\delta & + 4\mathfrak{A}\delta & + \&c. \\ & & & & + 5\epsilon & + \&c. \end{array}$$

ex quibus ſequentes prodeunt litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. determinationes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \alpha \\ \mathfrak{B} &= \beta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha \\ \mathfrak{C} &= \gamma + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\beta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha \\ \mathfrak{D} &= \delta + \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}\gamma + \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha \\ \mathfrak{E} &= \epsilon + \tfrac{4}{5}\mathfrak{A}\delta + \tfrac{3}{5}\mathfrak{B}\gamma + \tfrac{2}{5}\mathfrak{C}\beta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha \quad \&c. \end{aligned}$$

218. Si quoque arcus, cuius ſinus vel coſinus quaeritur, exprimatur binomio vel polynomio, vel etiam ſerie infinita, hoc modo quoque eius ſinus & coſinus per ſeriem infinitam exprimi poſſunt. At vero quo hoc commodiſſime fiat, non ſufficit ad differentialia prima proceſſiſſe, ſed opus eſt, vt differentialia ſecundi gradus in ſubſidium vocemus. Sit igitur

$s =$

$s = \sin(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \&c.)$

fingaturque feries quae quaeritur:

$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \&c.$

primum enim terminum conftat euanefcere: quia vero ad differentialia fecunda defcendendum eft, coefficientem $\mathfrak{A}$ quoque aliunde definiri oportet, quod fiet fi x ponamus infinite paruum. Tum enim ob arcum $= \alpha x$ finus ipfi fiet aequalis, eritque ergo $\mathfrak{A} = \alpha$. Ponamus nunc breuitatis gratia $z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \&c.$ vt fit $s = \sin z$, erit differentiando $ds = dz \cos z$, denuoque differentiando $dds = ddz \cos z - dz^2 \sin z$. Quia igitur eft $\sin z = s$ & $\cos z = \frac{ds}{dz}$; erit

$$dds = \frac{ds\,ddz}{dz} - s\,dz^2, \text{ feu } dz\,dds + s\,dz^3 = ds\,ddz.$$

219. Ponamus arcum z tantum binomio exprimi effeque $z = \alpha x + \beta x^2$; erit $dz = (\alpha + 2\beta x)\,dx$, & pofito dx conftante, $ddz = 2\beta\,dx^2$; atque $dz^3 = (\alpha^3 + 6\alpha^2\beta x + 12\alpha\beta^2 x^2 + 8\beta^3 x^3)\,dx^3$. Deinde ob $s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \&c.$

erit $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + \&c.$

& $\frac{dds}{dx^2} = 2\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}x + 12\mathfrak{D}x^2 + \&c.$

Quibus valoribus in aequatione differentio-differentiali fubftitutis fiet:

$$\frac{dzdds}{dx^3} = 1.2\,\mathfrak{B}\alpha + 2.3\,\mathfrak{C}\alpha x + 3.4\,\mathfrak{D}\alpha x^2 + 4.5\,\mathfrak{E}\alpha x^3 + \&c.$$

$$+ 2.1.2\,\mathfrak{B}\beta + 2.2.3\,\mathfrak{C}\beta + 2.3.4\,\mathfrak{D}\beta + \&c.$$

$$+\frac{sdz^3}{dx^3} = + \mathfrak{A}\alpha^3 + \mathfrak{B}\alpha^3 + \mathfrak{C}\alpha^3 + \&c.$$

$$+ 6\mathfrak{A}\alpha^2\beta + 6\mathfrak{B}\alpha^2\beta + \&c.$$

$$+ 12\mathfrak{A}\alpha\beta^2 + \&c.$$

$$\frac{dsddz}{dx^3} = 2\mathfrak{A}\beta + 4\mathfrak{B}\beta + 6\mathfrak{C}\beta + 8\mathfrak{D}\beta + \&c.$$

Vnde coefficientes sequenti modo definientur:

$$\mathfrak{B} = \frac{2\mathfrak{A}\beta}{2\alpha}$$

$$\mathfrak{C} = 0 - \frac{\mathfrak{A}\alpha 2}{2.3}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\mathfrak{C}\beta}{4\alpha} - \frac{6\mathfrak{A}\alpha\beta}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}\alpha^2}{3.4}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\mathfrak{D}\beta}{5\alpha} - \frac{12\mathfrak{A}\beta^2}{4.5} - \frac{6\mathfrak{B}\alpha\beta}{4.5} - \frac{\mathfrak{C}\alpha^2}{4.5}$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{6\mathfrak{E}\beta}{6\alpha} - \frac{8\mathfrak{A}\beta^3}{5.6\alpha} - \frac{12\mathfrak{B}\beta\beta}{5.6} - \frac{6\mathfrak{C}\alpha\beta}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}\alpha^2}{5.6}$$

$$\mathfrak{G} = -\frac{8\mathfrak{F}\beta}{7\alpha} - \frac{8\mathfrak{B}\beta^3}{6.7\alpha} - \frac{12\mathfrak{C}\beta\beta}{6.7} - \frac{6\mathfrak{D}\alpha\beta}{6.7} - \frac{\mathfrak{E}\alpha 2}{6.7}$$

&c.

Quibus valoribus inuentis erit:

$$\sin(\alpha x + \beta x^2) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \&c.$$

existente $\mathfrak{A} = \alpha$.

220. Pari modo cosinus cuiusque anguli in seriem conuertitur, quia autem arcus rarissime per polynomium ex-

exprimitur, ostendamus vsum differentio-differentialium in invenienda serie pro cosinu arcus x. Sit ergo $s = \cos x$, & fingatur:

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \mathfrak{D}x^8 - \&c.$$

Quia est $ds = -dx \sin x$ & $dds = -dx^2 \cos x = -sdx^2$; erit $dds + sdx^2 = 0$; substitutione ergo facta fiet:

$$\frac{dds}{dx^2} = -1.2\mathfrak{A} + 3.4\mathfrak{B}x^2 - 5.6\mathfrak{C}x^4 + 7.8\mathfrak{D}x^6 - \&c.$$

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \&c.$$

& ex coaequatione terminorum sequitur:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1.2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{5.6} = \frac{1}{1.2.3\ldots6}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{7.8} = \frac{1}{1.2.3\ldots8} \quad \&c.$$

Patet ergo quod iam supra fusius demonstrauimus esse:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots8} - \&c.$$

prior vero series pro sinu posito $\mathfrak{G} = 0$ & $a = 1$ dabit:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{x^9}{1.2.3\ldots9} - \&c.$$

221. Ex his seriebus pro sinu & cosinu notissimis deducuntur series pro tangente, cotangente, secante

 &

& cosecante cuiusuis anguli. Tangens enim prodit si sinus per cosinum, cotangens si cosinus per sinum, secans si radius 1 per cosinum, & cosecans si radius per sinum diuidatur. Series autem ex his diuisionibus ortae maxime videntur irregulares; verum excepta serie secantem exhibente reliquae per numeros Bernoullianos supra definitos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. ad facilem progressionis legem reduci possunt. Quoniam enim supra §.127 inuenimus esse:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2.3...6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2.3...8} + \&c. = 1 - \frac{u}{2}\cot\tfrac{1}{2}u$$

erit posito $\frac{1}{2}u = x$;

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2.3...6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2....8} - \&c.$$

atque si ponatur $\frac{1}{2}x$ pro x, erit:

$$\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2.3...6} - \frac{2\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8} - \&c.$$

222. Hinc autem tangens cuiusuis arcus sequenti modo per seriem exprimetur.

Cum sit $\operatorname{tang} 2x = \frac{2\operatorname{tang}x}{1-\operatorname{tang}x^2}$, erit:

$$\operatorname{cotang}. 2x = \frac{1}{2\operatorname{tang}x} - \frac{\operatorname{tang}x}{2} = \tfrac{1}{2}\cot x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}x;$$

ideoque $\operatorname{tang}x = \cot x - 2\cot 2x$. Cum igitur sit

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^2\mathfrak{C}x^5}{1.2...6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2...8} - \&c.$$

2 cot

$$2\cot 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^{16}\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \&c.$$

erit hanc feriem ab illa fubtrahendo:

$$\operatorname{tg}x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots\ldots6} + \frac{2^8(2^8-1)\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots\ldots8} + \&c.$$

Si ergo hic introducantur numeri A, B, C, D, &c. §. 182. inuenti, erit:

$$\operatorname{tang} x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5Cx^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^7Dx^7}{1.2\ldots8} + \&c.$$

223. Cofecans autem fequenti modo inuenietur. Quia eft $\cot x = \operatorname{tang} x + 2\cot 2x = \frac{1}{\cot x} + 2\cot 2x$; erit $\cot x^2 = 2\cot x . \cot 2x + 1$, & radice extracta:

$$\cot x = \cot 2x + \operatorname{cofec.} 2x, \quad \text{unde fit}$$

$\operatorname{cofec.} 2x = \cot x - \cot 2x$, & x pro $2x$, pofito $\operatorname{cofec.} x = \cot \tfrac{1}{2}x - \cot x$. Quare cum cotangentes habeamus fcilicet:

$$\cot \tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \&c.$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \&c.$$

erit hac ferie ab illa fubtracta:

$$\operatorname{cofec.} x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots\ldots6} + \&c.$$

224. Per hos autem numeros Bernoullianos secans exprimi non potest, sed requirit alios numeros, qui in summas potestatum reciprocarum imparium ingrediuntur. Si enim ponatur:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. = \alpha . \frac{\pi}{2^2}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. = \frac{\beta}{1.2} . \frac{\pi^3}{2^4}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c. = \frac{\gamma}{1.2.3.4} . \frac{\pi^5}{2^6}$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \&c. = \frac{\delta}{1.2 \ldots 6} . \frac{\pi^7}{2^8}$$

$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \&c. = \frac{\epsilon}{1.2 \ldots 8} . \frac{\pi^9}{2^{10}}$$

$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \&c. = \frac{\zeta}{1.2 \ldots 10} . \frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$

&c.

erit:

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 5$
$\delta = 61$
$\epsilon = 1385$
$\zeta = 50521$
$\eta = 2702765$
$\theta = 199360981$
$\iota = 19391512145$
$\kappa = 2404879661671$ &c.

ex

ex hisque valoribus obtinebitur:

$$\text{sec.}\,x = \alpha + \frac{\beta}{1.2}xx + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2\ldots8}x^8 + \&c.$$

225. Vt autem nexum huius seriei cum numeris α, β, γ, δ, &c. ostendamus, consideremus seriem supra tractatam:

$$\frac{\pi}{n\,\text{sin}\frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \&c.$$

Ponatur $m = \frac{1}{2}n - k$, eritque

$$\frac{\pi}{2n\,\text{cos}\frac{k}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \&c.$$

Sit $\frac{k\pi}{n} = x$, seu $k\pi = nx$, erit

$$\frac{\pi}{2n}\,\text{sec.}\,x = \frac{\pi}{n\pi - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi + 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi - 2nx} - \&c.$$

seu

$$\text{sec.}\,x = \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \&c.$$

$$\text{sec.}\,x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{4.3\pi}{9\pi^2 - 4xx} + \frac{4.5\pi}{25\pi^2 - 4xx} - \frac{4.7\pi}{49\pi^2 - 4xx} + \&c.$$

si

ſi nunc ſinguli termini in ſeries conuertantur, fiet:

$$\sec . x = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c.\right)$$

&c.

quarum ſerierum loco ſi valores ſupra aſſignati ſubſtituantur, prodibit eadem ſeries pro ſecante, quam dedimus.

226. Hinc ſimul patet lex, qua numeri α, β, γ, δ, &c. quibus ſummae poteſtatum imparium conſtituuntur, procedunt. Cum enim ſit

$$\sec . x = \frac{1}{\cos . x} = \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots 6} + \&c.$$

neceſſe eſt vt haec ſeries aequalis ſit fractioni

$$\frac{1}{1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots 6} + \frac{x^8}{1.2\ldots 8} - \&c.}$$

aequalitate ergo conſtituta fiet $1 =$

$$\alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots 6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2\ldots 8}x^8 + \&c.$$

$$- \frac{\alpha}{1.2} - \frac{\beta}{1.2.1.2} - \frac{\gamma}{1.2.1\ldots 4} - \frac{\delta}{1.2.1\ldots 6}\ \&c.$$

+

$$+\frac{\alpha}{1.2.3.4}+\frac{\beta}{1\ldots4.1.2}+\frac{\gamma}{1\ldots4.1\ldots4}\ \&c.$$

$$-\frac{\alpha}{1\ldots6}-\frac{\beta}{1\ldots6.1.2}\ \&c.$$

$$+\frac{\alpha}{1\ldots8}\ \&c.$$

vnde fequuntur hae aequationes:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2.1}{1.2}\alpha$$

$$\gamma = \frac{4.3}{1.2}\beta - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\alpha$$

$$\delta = \frac{6.5}{1.2}\gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\beta + \frac{6\ldots1}{1\ldots6}\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{8.7}{1.2}\delta - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\gamma + \frac{8\ldots3}{3\ldots8}\beta - \frac{8\ldots1}{1\ldots8}\alpha$$

&c.

Ex hisque formulis inuenti funt iftarum litterarum valores, quos in §. 224. exhibuimus; & quorum ope fummae ferierum in hac forma contentarum,

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\&c.$$

fi n fuerit numerus impar, exprimi poffunt.

CAPUT IX.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQUATIONIBUS RESOLUENDIS.

227.

Constitutionem aequationum ad functionum rationem reduci posse supra iam satis ostensum est. Denotet enim y functionem quamcunque ipsius x, si ponatur $y=0$, in hac forma omnes omnino aequationes finitae siue sint algabraicae siue transcendentes comprehenduntur. Aequatio autem $y=0$ resolui dicitur, si is ipsius x valor definiatur, qui in functione y substitutus, eam actu nihilo aequalem reddat. Plerumque autem plures eiusmodi valores pro x dantur, qui aequationis $y=0$ radices vocantur. Si igitur ponamus numeros f, g, h, i, &c. esse radices aequationis $y=0$, functio y ita erit comparata, vt si in ea loco x vel f, vel g, vel h, &c. substituatur, fiat reuera $y=0$.

228. Quoniam igitur functio y euanescit, si in ea loco x ponatur f, seu $x+(f-x)$, existente f radice aequationis $y=0$, erit per ea, quae supra de functionibus demonstrauimus:

$$0=y+\frac{(f-x)dy}{dx}+\frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2}+\frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3}+\&c.$$

ex

ex qua aequatione valor radicis f ita definitur, vt quicquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, &c substituti, semper resultet aequatio verum valorem ipsius f exhibens. Quo hoc clarius percipiatur, ponamus esse $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$; $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2$; & $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$.

Quibus valoribus substitutis oritur:

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3) + (f-x)^2(3x-2) + (f-x)^3$$

seu multiplicationibus actu institutis:

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$$

oritur scilicet aequatio similis ipsi propositae, quae propterea easdem continet radices.

229. Quanquam autem hoc modo ad nouam aequationem non peruenitur, ex qua valor radicis f facilius definiri queat; tamen hinc ingentia subsidia ad inventionem radicum deduci possunt. Si enim pro x assumtus fuerit valor iam proxime ad quampiam radicem aequationis accedens, ita vt $f-x$ sit quantitas valde parva, tum termini aequationis:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

vehementer conuergent, hancque ob causam non multum a veritate aberrabitur, si praeter binos terminos ini-

tiales reliqui reiiciantur. Erit ergo si pro x iam valor cuipiam aequationis $y = o$ radici prope aequalis fuerit assumtus, proxime $o = y + \frac{(f-x)dy}{dx}$ seu $f = x - \frac{ydx}{dy}$, ex qua formula etsi non verus, tamen admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps denuo loco x substitutus, multo adhuc propiorem valorem pro f suppeditabit; sicque continuo propius ad verum radicis f valorem accedetur.

230. Hinc igitur primum radices omnium dignitatum ex quibuscunque numeris extrahi possunt. Sit enim propositus numerus $a^n + b$ ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat. Ponatur $x^n = a^n + b$ seu $x^n - a^n - b = o$, vt sit $y = x^n - a^n - b$; erit $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$; $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}$; &c.

Hinc si radix quaesita ponatur $= f$, vt sit $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ erit:

$$o = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2 x^{n-2} + \&c.$$

Si igitur pro x iam statuatur numerus ad valorem radicis quaesitae f prope accedens, quod fiet ponendo $x = a$, si quidem b sit numerus tam paruus, vt $a^n + b < (a+1)^n$; erit $b = na^{n-1}(f-a)$ proxime, ideoque $f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$, vnde valor radicis multo propius

pius cognoſcetur. Sin autem adhuc tertium terminum aſſumere velimus, vt ſit

$$b = n a^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}(f-a)^2, \text{ fiet}$$

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1}(f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}, \text{ ideoque}$$

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)} \text{ ſeu}$$

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{(aa + 2(n-1)b : na^{n-2})}}{n-1}.$$

Quare ope extractionis radicis quadratae valor radicis f adhuc propius reperietur.

EXEMPLUM.

Quaeramus radicem quadratam ex numero quocunque c, *ſeu ſit* $xx - c = y$.

Ponatur ergo numerus radici proximus $= a$, & $b = c - aa$, ob $aa + b = c$, & quia eſt $n = 2$, fiet prior formula $f = a + \frac{c-aa}{2a} = \frac{c+aa}{2a}$, altera vero dat $f = \sqrt{c}$, quae eſt ipſa radix quaeſita. Cum igitur ſit proxime radix $= \frac{c+aa}{2a}$, hic ipſe valor pro a ſcribatur, eritque propius radix $f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c+aa)}$. Sit verbi gratia $c = 5$; erit ex priori formula $f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}$. Ponatur ergo $a = 2$;

erit $f = 2,25$; nunc ponatur $a = 2,25$; fiet $f = 2,236111$, ſtatuatur porro $a = 2,236111$, erit $f = 2,2360679$, qui valor iam minime a vero diſcrepat.

231. Simili autem modo radix cuiuscunque aequationis inueniri poteſt proxime ope aequationis $f = x - \frac{ydx}{dy}$, poſtquam ſcilicet pro x aſſumtus fuerit valor parum a quapiam aequationis radice diſcrepans. Ad huiusmodi vero valorem pro x inueniendum, ſubſtituantur ſucceſſiue pro x varii valores, inter eosque is eligatur, qui functionis y minimum hoc eſt cyphrae proximum valorem indicat. Sic ſi ſit $y = x^3 - 2xx + 3x - 4$,

poſito $x = 0$ fit $y = -4$

$x = 1$ . . . $y = -2$

$x = 2$ . . . $y = +2$

vnde videmus radicem contineri inter valores 1 & 2, ipſius x. Cum ergo ſit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$, habebitur pro radice f aequationis $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$ inuenienda haec aequatio:

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{(x^3 - 2xx + 3x - 4)}{3xx - 4x + 3}.$$

Sit ergo $x = 1$; fiet $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nunc ponatur $x = 2$, fiet $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Sit ergo $x = \frac{12}{7}$; erit

erit $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1,653$. Si vlterius progredi velimus, logarithmis commodius vtemur.

Ponatur ergo $x = 1,653$, eritque

$lx = 0,2182729$	$x = 1,653000$
$lx^2 = 0,4365458$	$x^2 = 2,732409$
$lx^3 = 0,6548187$	$x^3 = 4,516673$

$x^3 = 4,516673$
$3x = 4,959000$
$\overline{9,475673}$ $\quad 3xx + 3 = 11,197227$
$2xx + 4 = 9,464818$ $\quad 4x = 6,612000$
num. $0,010855$ $\quad$ den. $= 4,585227$
l num. $= 8,0356298$
l den. $= 0,6613608$ $\quad x = 1,653000$
l fract. $= 7,3742690$; $\quad$ fractio $= 0,002367$
$f = 2,650633$

qui valor iam proxime ad verum accedit.

232. Citiores autem approximationes ex generali expreſſione deducere poterimus. Cum enim poſita functione quacunque $y = 0$, ſi radix huius aequationis fuerit $x = f$, inuenerimus eſſe:

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{2\,dx^2} + \frac{(f-x)^3\,d^3y}{6\,dx^3} + \&c.$$

ſit $f - x = z$, ita vt ſit radix $f = x + z$, atque ponatur

$$\frac{dy}{dx} = p;\ \frac{dp}{dx} = q;\ \frac{dq}{dx} = r;\ \frac{dr}{dx} = s;\ \text{erit:}$$

$$0 = y + zp + \frac{z^2 q}{2} + \frac{z^3 r}{6} + \frac{z^4 s}{24} + \frac{z^5 t}{120} + \&c.$$

in

in qua aequatione sumto pro x valore quocunque, ex quo simul y, p, q, r, s, &c. determinantur, inueniri debet quantitas z, qua inuenta habebitur aequationis propositae $y = 0$, radix $f = x + z$. In id ergo est incumbendum, vt quam commodissime ex hac aequatione valor incognitae z eruatur.

233. Fingatur pro z series conuergens haec:

$$z = A + B + C + D + E + \&c.$$

atque facta substitutione erit:

$$\begin{aligned}
y &= y \\
pz &= Ap + Bp + Cp + Dp + Ep + \&c. \\
\tfrac{1}{2}qz^2 &= \quad + \tfrac{1}{2}A^2q + ABq + ACq + ADq + \&c. \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}BBq + BCq + \&c. \\
\tfrac{1}{6}rz^3 &= \qquad \tfrac{1}{6}A^3r + \tfrac{1}{2}A^2Br + \tfrac{1}{2}A^2Cr + \&c. \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}AB^2r + \&c. \\
\tfrac{1}{24}sz^4 &= \qquad \tfrac{1}{24}A^4s + \tfrac{1}{6}A^3Bs + \&c. \\
\tfrac{1}{120}tz^5 &= \qquad \tfrac{1}{120}A^5t + \&c.
\end{aligned}$$

Vnde obtinentur sequentes aequationes:

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} \quad \&c.$$

ideo-

ideoque erit:

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2 q}{2p^3} - \frac{y^3 qq}{2p^5} + \frac{y^3 r}{6p^4} - \frac{5y^4 q^3}{8p^7} + \frac{5y^4 qr}{12p^6} - \frac{y^4 s}{24p^5} - \&c.$$

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Erit ergo $y = x^5 + 2x - 2$;

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2$$

$$\frac{dp}{dx} = q = 20x^3$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2$$

$$\frac{dr}{dx} = s = 120x \quad \&c.$$

Ponatur autem nunc $x = 1$, quia hic valor parum a radice discrepat, erit:

$y = 1$; $p = 7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$.

vnde fiet:

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5.1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

seu $z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7}$ &c. eritque ergo $z = -0{,}18$, & radix $f = 0{,}82$, qui valor si denuo loco x substitueretur, prodiret radix maxime verae propinqua.

234. Inuenimus ergo feriem infinitam, quae cuiusvis aequationis radicem exprimit: ea autem hoc laborat incommodo vt tum lex progreffionis non pateat, tum ipfa nimis fit perplexa atque ad vfum non fatis accommodata. Alio igitur modo idem negotium fufcipiamus, feriemque magis regularem inueftigemus, cuiuscunque aequationis propofitae radicem exprimentem.

Sit vt ante propofita aequatio $y = 0$, exiftente y functione quacunque ipfius x; & quaeftio huc redit, vt valor ipfius x definiatur, qui loco x fubftitutus functionem y reddat nihilo aequalem. Cum autem y fit functio ipfius x, viciffim x tanquam functio fpectari poterit ipfius y, atque hac confideratione adhibita quaerendus eft valor ipfius functionis x, quem induit, cum quantitas y euanefcit. Si igitur f ponatur defignare iftum ipfius x valorem, qui erit radix aequationis $y = 0$, quoniam x abit in f, fi ftatuatur $y = 0$, erit per ea quae fupra funt demonftrata:

$$f = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2\,ddx}{2dy^2} + \frac{y^3\,d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4\,d^4x}{24dy^4} - \&c.$$

in qua aequatione ftatuitur differentiale dy conftans. Si igitur ponatur:

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = q; \quad \frac{dq}{dy} = r; \quad \frac{dr}{dy} = s; \quad \&c.$$

erit his valoribus introductis, vt confideratio differentialis conftantis exuatur:

$$f = x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \&c.$$

235. Tributo ergo ipſi x quocunque valore, ſimul valores ipſius y, atque quantitatum p, q, r, s, &c. determinabuntur; hisque inuentis habebitur ſeries infinita valorem radicis f exprimens. Sin autem aequatio $y = 0$ plures admittat radices, tum eae prodibunt, ſi pro x diverſi valores aſſumantur: quia enim y eundem valorem induere poteſt, etiamſi ipſi x diuerſi valores tribuantur, mirum non eſt eandem ſeriem ſaepenumero plures valores ſuppeditare poſſe. Quo igitur his caſibus ambiguitas tollatur, ſimulque ſeries conuergens reddatur, pro x aſſumi debet valor iam prope ad valorem eius radicis, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipſius y fiet admodum paruus, ſerieique termini vehementer decreſcent, ita vt paucis terminis ſumendis iam ſatis iustus valor pro f inueniatur. Hic igitur valor ſi deinceps loco x ſubſtituatur, quantitas y multo minor euadet, ſeriesque multo magis conuerget; hocque modo ſtatim radix f tam exacte innoteſcet, vt error futurus ſit minimus. Hincque ſumma huius expreſſionis praerogatiua prae ea, quam ante elicueramus, manifeſto perſpicitur.

236. Ponamus extrahendam eſſe radicem poteſtatis n ex numero quocunque N. Sumta igitur proxima poteſtate exponentis n, numerus propoſitus facile reſolvetur in hanc formam $N = a^n + b$. Erit ergo

$$x^n = a^n + b \quad \& \quad y = x^n - a^n - b; \text{ vnde fit:}$$

$$dy = nx^{n-1}dx \quad ; \quad \& \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)dx}{nx^2} \quad ; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = -\frac{(n-1)}{nnx^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} ; \quad \& \quad \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3x^{3n}} ; \quad \& \quad s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n}}$$

&c.

Ponatur nunc $x = a$, eritque $y = -b$, atque radix quaesita $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ hoc modo exprimetur:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n\ a^{4n-1}} + \&c.$$

ficque prodit eadem feries, quae vulgo per euolutionem binomii $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ erui folet.

237. Poftquam ergo in actuali extractione radix proxime vera a fuerit inuenta, fimulque refiduum b fuerit repertum, tum ad radicem infuper addi oportet valorem fractionis $\frac{b}{na^{n-1}}$, quo propius vera radix obtineatur. Erit autem $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, ob $N = a^n + b$. At vero hoc modo radix iufto maior inuenietur, quoniam tertius terminus fubtrahi debet. Quo igitur per diui-

diuiſionem reſidui b radix multo propius ad verum accedens inueniatur idoneus diuiſor debet inueſtigari, qui fingatur eſſe $na^{n-1} + \alpha b + \beta bb + \gamma b^3 + \&c.$

Cum igitur debeat eſſe:

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.} =$$

$$\frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \&c.$$

fiet multiplicatione per $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \&c.$ inſtituta:

$$b = b$$

$$- \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{\alpha b^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}}$$

$$+ \frac{\beta b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}}$$

$$+ \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}}$$

Hinc deducuntur ſequentes determinationes:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = - \frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\beta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6nna^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}}$$

ſeu $\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$.

Frac-

Fractio ergo ad radicem iam inuentam a insuper addenda erit:

$$\frac{b}{na^{n-1}+\frac{(n-1)b}{2a}-\frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}}+\frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n+1}}}.$$

238. Quod si ergo radix quadrata extrahi debeat ex numero N, atque inuenta iam sit radix proxima $= a$, cum residuo $= b$, ad radicem inuentam insuper addi debet quotus, qui oritur, si residuum b diuidatur per $2a+\frac{b}{2a}-\frac{bb}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^6}-$ &c. Sin autem radix cubica extrahi debeat, tum residuum b diuidi debet per $3a^2+\frac{b}{a}-\frac{2bb}{9a^4}+\frac{b^3}{9a^7}-$ &c. quarum formularum vsum in his exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Extrahatur radix quadrata ex numero 200.

Ponatur $N = 200$, & cum proximum quadratum sit 196, erit $a = 14$, & residuum $b = 4$, quod propterea diuidi debebit per $28+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{196}+\frac{1}{7.196.98}$, eritque ergo diuisor $= 28,142135$, per quem si 4 diuidatur, obtinebitur fractio decimalis ad 14 addenda, quae iusta erit ad 10 figuras & vltra.

EXEMPLUM II.

Extrahatur radix cubica ex numero $N = 10$.

Proximus cubus est 8, & residuum $= 2$, vnde $a = 2$ &

& $b = 2$, atque diuisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12{,}9444$. Quare radix cubica quaesita erit proxime $=$ $2\frac{2}{12{,}9444} = 2\frac{10000}{64722}$.

239. Series pro radice inuenta etiam considerari potest tanquam recurrens orta ex quapiam fractione, hoc enim modo plures termini seriei ad multo pauciores, qui numeratorem & denominatorem fractionis constituant, reuocabuntur. Sic leui attentione adhibita perspicietur fore proxime:

$$(a+b)^n = a^n.\frac{a + \frac{(n+1)}{2}b}{a + \frac{(n-1)}{2}b}$$ atque adhuc propius

$$(a+b)^n = a^n.\frac{aa + \frac{(n+2)}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{(n-2)}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}.$$

Simili modo plures terminos introducendo fractiones adhuc accuratiores obtineri possunt:

$$(a+b)^n = a^n.$$

$$\frac{a^3 + \frac{(n+3)}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)b^3}{120}}{a^3 - \frac{(n-3)}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)b^3}{120}}.$$

Quin etiam huiusmodi forma generalis exhiberi potest, ad quam commode exprimendam sit:

A =

$$A = \frac{m(n+m)}{1.\ 2m}$$
$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2\ \ (2m-1)} A$$
$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3\ \ (2m-2)} B$$
$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4\ \ (2m-3)} C$$
&c.

$$\mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1.\ 2m}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2\ \ (2m-1)} \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3\ \ (2m-2)} \mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4\ \ (2m-3)} \mathfrak{C}$$
&c.

His autem valoribus determinatis erit:

$$(a+b)^n = a^n . \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \&c.}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \&c.}$$

240. Si igitur hic pro n fubftituatur numerus fractus, iftae formulae ad extractionem radicum apprime erunt accommodatae. Sic fi radix quaecunque poteftatis n extrahi debeat ex forma $a^n + b$, fequentes formulae in vfum vocari poffunt:

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a . \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a . \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}.$$

Sin autem ponatur $a^n + b = N$, vt fit $a^n = N - b$; erit:

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a . \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a . \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}.$$

241.

241. Formula igitur generalis pro radice cuiusque aequationis inuenienda in aequationibus, quae ex pluribus terminis constant, eundem praestat vsum, quem solita regula binomii ad resolutionem aequationum purarum $x^n = c$ afferre solet, atque adeo hoc casu in regulam illam ipsam abit. Sin autem aequatio fuerit affecta vel etiam transcendens, expressio nostra generalis semper aequali successu in vsum vocatur, seriemque praebet infinitam, quae valorem radicis exhibet. Quamobrem cum in hoc negotio summa vis istius formulae generalis consistat, eius vsum hic aliquanto fusius ostendamus. Sit igitur proposita haec aequatio affecta tribus terminis constans:

$$x^n + cx = N,$$

denotantibus c & N quantitates quascunque datas. Ponatur $x^n + cx - N = y$, erit $dy = (nx^{n-1} + c)dx$, hincque fiet $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$, tum est

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}dx}{(nx^{n-1}+c)^2}; \quad \& \quad q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}+c)^3}.$$

Simili modo ob $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$ &c. reperietur:

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = -\frac{n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1}+c)^7}$$

$$t = +\frac{n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} + n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5}}{(nx^{n-1}+c)^9}$$

&c.

 Qui-

Quibus valoribus inuentis, erit aequationis propositae radix

$$f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{\&c.}$$

quicquid enim pro x substituatur, vnde simul litterae y, p, q, r, &c. valores determinatos induunt, summa seriei aequabitur valori vnius radicis.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^3 + 2x = 2$.

Erit $c = 2$, $N = 2$, & $n = 3$, atque $y = x^3 + 2x - 2$, Ponatur $x = 1$, erit $y = 1$, & $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{84}{5^5}$; $s = -\frac{16.90}{5^7}$ &c. atque aequationis radix erit:

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{14}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \text{\&c.} = 0,7707751.$$

Ponatur nunc $x = 0,77$, & quia est $y = x^3 + 2x - 2$; $p = \frac{1}{3xx+2}$; $q = -6p^3x$; $r = 9xxp^5 - 12p^5$; atque $s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$; habebitur logarithmis adhibendis:

$lx = 9,8864907$	$x = 0,77$
$lx^2 = 9,7729814$	$x^2 = 0,5929$
$lx^3 = 9,6594721$	$x^3 = 0,456533$
	$2x = 1,54$
	$x^3 + 2x = 1,996533$
Ergo	$y = -0,003467$

$l - y$

$l\text{-}y = 7,5399538$; $3xx+2 = 3,7787$
$lp = 9,4226575$; $l(3xx+2) = 0,5773424$
$l\text{-}py = 6,9626113$; $-py = 0,000917511$

$lp^2 = 8,2679725$
$lx = 9,8864907$
$l3 = 0,4771213$
$ly^2 = 5,0799076$

$l\text{-}\tfrac{1}{2}qyy = 3,7114922$ $\quad -\tfrac{1}{2}qyy = 0,000000514$.

Ergo radix $f = 0,770916997$, quae vix in vltima figura a vero aberrabit.

EXEMPLUM II.

Sit propofita aequatio $x^4 - 2xx + 4x = 8$.

Ponatur $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, erit $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3-x+1)};\quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3xx+1}{4(x^3-x+1)^2}\ \text{Ergo}$$

$$q = \frac{-3xx+1}{16(x^3-x+1)^3};\quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4-12xx-3}{16(x^3-x+1)^4}\ \&$$

$$r = \frac{21x^4-12xx-3}{64(x^3-x+1)^5}\ \&c.$$

ex quibus erit radix aequationis propofitae:

$$f = x - \frac{y}{4(x^3-x+1)} - \frac{(3xx-1)yy}{32(x^3-x+1)^3} - \frac{(7x^4-4xx+1)y^3}{128(x^3-x+1)^5} - \&c.$$

Oportet ergo ipfi x idoneum valorem tribui, quo feries ifta fiat conuergens. Primum autem perfpicuum eft, fi

 ipfi

ipsi x tribueretur talis valor, quo fieret $x^3-x+1=0$, tum omnes seriei terminos praeter primum euadere infinitos, neque adeo exinde quicquam concludi posse. Conuenit ergo ipsi x eiusmodi valorem assignare, quo & y fiat exiguum & x^3-x+1 non admodum paruum. Sit $x=1$, erit $y=-5$, &

$$f=1+\frac{5}{4}-\frac{25}{16}+\frac{125}{64}-\&c.$$

vbi cum tres termini $\frac{5}{4}-\frac{25}{16}+\frac{125}{64}$ congruant cum progressione geometrica, cuius summa est $\frac{5}{9}$ erit circiter $f=\frac{14}{9}$. Statuamus ergo $x=\frac{3}{2}$, erit $y=-\frac{23}{16}$; & $x^3-x+1=\frac{23}{8}$, vnde fit:

$$f=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\frac{407}{256.529}-\&c.=1,61.$$

Ponatur nunc $x=1,61$; erit:

$lx=0,2068259$	$x=1,61$	fit $x^3-x+1=z$
$lx^2=0,4136518$	$x^2=2,5921$	
$lx^3=0,6204777$	$x^3=4,173281$	
$lx^4=0,8273036$	$x^4=6,718983$	
	hinc	
$l-y=8,4016934$	$y=-0,025217$	
$lz=0,5518502$	$z=3,563281$	
$l\frac{-y}{z}=7,8498432$		

$l4=$

$l4 = 0{,}6020600$	
$l\frac{-y}{4z} = 7{,}2477832$	$\frac{-y}{4z} = 0{,}0017692$
$l(3xx-1) = 0{,}8309926$	$3xx-1 = 6{,}7763$
$ly^2 = 6{,}8033868$	
$7{,}6343794$	
$lz^3 = 1{,}6555506$	
$5{,}9788288$	
$l32 = 1{,}2041200$	$\frac{(3xx-1)y^2}{32z^3} = 0{,}000005952$
$4{,}7747088$	

Ergo $f = 1{,}6117632$.

242. Methodus haec inueniendi radices aequationum proxime aeque patet ad quantitates transcendentes. Quaeramus numerum x, cuius logarithmus ex quocunque canone desumtus ad ipsum numerum datam habeat rationem vt 1 ad n, atque habebitur ista aequatio $x - n\,l\,x = 0$: sit autem k modulus horum logarithmorum, ita vt isti logarithmi obtineantur, si logarithmi hyperbolici multiplicentur per k, erit $d.lx = \frac{k\,dx}{x}$. Ponatur ergo $x - n\,l\,x = y$, sitque f valor ipsius x quaesitus, qui reddat $x = n\,l\,x$. Cum igitur sit $y = x - nlx$, erit $dy = dx - \frac{kndx}{x} = \frac{dx(x-kn)}{x}$

& $\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x-kn}$; vnde $dp = -\frac{kndx}{(x-kn)^2}$ ergo

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3};\quad dq = \frac{2knxdx + k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^5}$$ &c.

Qua-

Quare fiet:

$$f = x - \frac{xy}{x-kn} - \frac{knxyy}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \&c.$$

Infra autem oſtendemus hoc problema ſolutionem non admittere, niſi ſit $kn > e$, exiſtente e numero cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, ſeu debet eſſe $kn > 2,7182818$.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus praeter 10, *cuius logarithmus tabularis aequetur decimae parti ipſius numeri.*

Quia de logarithmis tabularibus quaeſtio inſtituitur, erit $k = 0,434294481903 25$, atque ob $n = 10$ habebitur $kn = 4,3429448190325$. Facto iam $x = 1$, erit $y = 1$, fietque $f = 1 + \frac{1}{3,3429} + \frac{2.1714724}{(3,3429)^3} - \&c.$ ſicque proxime erit $f = 1,37$. Statuatur ergo $x = 1,37$, erit $lx = 0,136720567156406$, & ob $y = x - 10lx$, erit $y = 0,002794328435 03$, & $-x + kn = 2,9729448190325$. Fiat ergo

$$\begin{array}{rl} lx = & 0,1367205 \\ ly = & 7,4462773 \\ \hline & 7,5829978 \\ l(kn-x) = & 0,4731866 \\ \hline & 1,1098112 \end{array} \quad \frac{-xy}{x-kn} = 0,00128769.$$

De-

Deinde cum sit tertius terminus $\frac{knxyy}{2(x-kn)^3} = \frac{kny}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{xy}{x-kn}$ erit:

$$l\frac{xy}{x-kn} = 7{,}1098112$$
$$ly = 7{,}4462773$$
$$lkn = 0{,}6377842$$

$$5{,}1938527$$
$$l(kn-x)^2 = 0{,}9463732$$

$$4{,}2474995$$
$$l2 = 0{,}3010300$$

$$l\,\text{tert. term.} = 3{,}9464695$$
$$\text{I. term. } x = 1{,}37$$
$$\text{II. term.} = 0{,}00128769$$
$$\text{III. term.} = 0{,}00000088$$

$$f = 1{,}37128857$$
$$lf = 0{,}137128857.$$

243. Si aequatio fuerit exponentialis, ea ad logarithmicam reduci poterit; ita si quaeratur valor ipsius x, vt sit $x^x = a$, erit $x\,lx = la$. Quare posito $y = x\,lx - la$, fiet $dy = dx\,lx + dx$, & $\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+lx}$. Tumque

$dp =$

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \quad \& \quad \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$$

$$dy = \frac{dx}{xx(1+lx)^3} + \frac{3dx}{xx(1+lx)^4},$$ ideoque

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{xx(1+lx)^4} + \frac{3}{xx(1+lx)^5};$$ porro erit

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6};$$ ergo

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7},$$ &

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}.$$

Hinc ergo si verus valor ipsius x sit $= f$, ita vt sit $ff = a$; erit:

$$f = x - \frac{y}{(1+lx)} - \frac{yy}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2xx(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$
$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$
$$- \frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$
$$- \frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$

&c.

Haec

Haec ergo expreſſio in infinitum continuata, quicunque valor pro x ſtatuatur, ſumto $y = xlx - la$ verum ipſius f dabit valorem. Sic ſi ponatur $x = 1$, erit $y = -la$, &

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} \text{ \&c.}$$

vbi notandum eſt eſſe la logarithmum hyperbolicum ipſius a.

EXEMPLUM.

Quaeratur numerus f, *vt ſit* $f^f = 100$.

Cum ſit $a = 100$, & $y = xlx - la = xlx - l100$, quia patet eſſe $f > 3$ & < 4, ſtatuatur

$x = \frac{7}{2}$; eritque $lx = 1,25276296849$

$xlx = 4,38467034972$

$l100 = 4,60517018599$

$y = -0,22049983627$

$1 + lx = 2,25276296849$

Hinc erit logarithmis vulgaribus adhibendis:

$l-y = 9,3434083$

$l(1+lx) = 0,3527156$

$8,9906927$; $\frac{-y}{1+lx} = 0,0978797$

$ly^2 = 8,6868166$

$3l(1+lx) = 1,0581468$

$= 7,6286698$

$l2x = l7 = 0,8450980$

$6,7835718$ $\frac{y^2}{2x(1+lx)^3} = 0,0006075$

Ergo proxime erit $f = 3,5972722$

ſequentibus vero inſuper terminis

ſumtis erit $f = 3,5972852$

244. Praeterea autem calculus differentialis insignem habet vsum in resolutione aequationum, si quaepiam relatio, quae inter radices intercedit, fuerit cognita. Sit proposita aequatio $y = 0$, in qua sit y functio quaecunque ipsius x. Si iam verbi gratia constet, duas huius aequationis radices inter se differre quantitate data a, hae duae radices facile inuenientur sequenti modo. Denotet x harum duarum radicum minorem, erit maior $= x + a$, quare cum functio y euanescat, si x significet vnam ex radicibus aequationis $y = 0$, euanescet quoque y, si loco x ponatur $x + a$. Quocirca erit:

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

Vnde cum sit $y = 0$ erit quoque

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{a\,ddy}{2dx^2} + \frac{a^2\,d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3\,d^4y}{24\,dx^4} + \&c.$$

quae duae aequationes simul sumtae per methodum eliminationis dabunt valorem illius radicis x, quam alia radix superat quantitate a.

EXEMPLUM.

Sit proposita haec aequatio

$$x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0,$$

quam vndecunque constet, habere duas radices vnitate differentes.

Posito

Posito $y = x^5 - 24x^3 + 49xx - 36$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Jam ob $a = 1$ erit:

A . . . $5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0.$ At est

B . . . $x^5 - 24x^3 + 49xx - 36 = 0.$

Multiplicetur superior per x & inferior per 5, alteraque ab altera subtracta relinquet:

$$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0 \quad \text{seu}$$

C . . . $5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0$

a qua prima A subtracta relinquet:

D . . . $19x^3 - 45x^2 - 18x + 64 = 0$

D.5x . . . $95x^4 - 225x^3 - 90x^2 + 320x = 0$

A.19 . . . $95x^4 + 190x^3 - 1178x^2 + 589x + 494 = 0$

E . . . . $415x^3 - 1088x^2 + 269x + 494 = 0$

D.415 . . . . $7885x^3 - 18675x^2 - 7470x + 26560 = 0$

E. 19 . . . . $7885x^3 - 20672x^2 + 5111x + 9386 = 0$

F . . . . $1997x^2 - 12581x + 17174 = 0$

$$\begin{array}{ll} D.247 \ldots & 4693x^3 - 11115x^2 - 4446x + 15808 = 0 \\ E.\ 32 \ldots & 13280x^3 - 34816x^2 + 8608x + 15808 = 0 \\ \hline & 8587x^3 - 23701x^2 + 13054x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} G \ldots & 8587x^3 - 23701x + 13054 = 0 \\ F.8587 \ldots & 17148239x^2 - 108033047x + 147473138 = 0 \\ G.1997 \ldots & 17148239x^2 - 47330897x + 26068838 = 0 \\ \hline & 60702150x - 121404300 = 0 \end{array}$$

Ex qua aequatione ſequitur $x = 2$, ac propterea quoque radix aequationis erit $x = 3$, quorum vterque valor aequationis ſatisfacit.

245. Poteſt autem haec operatio abſolui ſine ſubſidio calculi differentialis, propterea quod eadem aequatio, quam calculus differentialis ſuppeditauit, prodit ſi in ipſa aequatione propoſita ponatur $x + a$ loco x. Ceterum vero haec methodus eliminandi nimium eſt operoſa, &, ſi aequationes eſſent altioris gradus, labor penitus foret inſuperabilis; ex quo multo minus in aequationibus transcendentibus locum habere poteſt. Quod ſi autem ponamus duas aequationis propoſitae $y = 0$ radices inter ſe eſſe aequales, tum ob $a = 0$, aequatio differentialis abit in hanc $\frac{dy}{dx} = 0$. Quoties ergo quaepiam aequatio $y = 0$ habuerit duas radices aequales, toties erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque hae duae aequationes coniunctae praebebunt eum ipſius x valorem, cui binae radices ſunt aequa-

aequales. Vnde viciſſim ſi ambae aequationes $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habeant radicem, ea erit radix duplex aequationis $y = 0$. Euenit autem hoc, ſi poſtquam quantitas x ope duarum iſtarum aequationum $y = 0$ & $\frac{dy}{dx} = 0$ penitus fuerit eliminata, perueniatur ad aequationem identicam. Sic ſi proponatur aequatio:

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

erit quoque $3xx - 4x - 4 = 0$, cuius duplum ad eam additum dat $x^3 + 4xx - 12x = 0$ ſeu $xx + 4x - 12 = 0$ cuius triplum eſt $3xx + 12x - 36 = 0$

ſubtrahatur $3xx - 4x - 4 = 0$

$$16x - 32 = 0$$
$$x - 2 = 0$$

Cum ergo prodierit $x = 2$, ſubſtituatur hic valor in vna praecedentium $3xx - 4x - 4 = 0$, & prodibit aequatio identica $12 - 8 - 4 = 0$, vnde colligitur aequationem propoſitam $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ duas habere radices aequales, nempe 2.

246. Si igitur habeatur aequatio algebraica quotcunque dimenſionum:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

quae duas habeat radices inter ſe aequales, erit quoque

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \&c. = 0.$$

 Scili-

Scilicet illius aequationis radix duplex simul erit radix istius aequationis. Multiplicetur illa per n, ab eaque haec per x multiplicata subtrahatur, prodibitque haec noua aequatio:

$$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Nunc addantur prima per a & haec per b multiplicata erit:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae aequatio cum ipsa proposita coniuncta monstrabit radices aequales, si quas habet proposita. Cum igitur quantitates a & b pro lubitu assumi queant, coefficientes a, $a+b$, $a+2b$, &c. progressionem quamcunque arithmeticam repraesentant. Quamobrem si aequatio quaecunque habeat duas radices aequales, eae inuenientur, si singuli aequationis propositae termini multiplicentur per terminos cuiusuis progressionis arithmeticae respectiue; noua enim aequatio hoc modo resultans eam radicem, quae in proposita bis inest, quoque continebit. Sic aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

si eius termini multiplicentur per progressionem arithmeticam hanc:

$$a;\quad a+b;\quad a+2b;\quad a+3b;\quad a+4b;\quad \&c.$$

prodibit noua aequatio haec:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

quae cum illa coniuncta radices aequales ostendet. Haecque est regula satis cognita inueniendi radices aequales cuiuscunque aequationis.

247.

247. Si aequatio $y=0$ tres habeat radices aequales non solum erit $\frac{dy}{dx}=0$, sed etiam erit $\frac{ddy}{dx^2}=0$; si quidem pro x statuatur eius radicis valor, quae in aequatione $y=0$ ter inest. Ad hoc ostendendum ponamus aequationem $y=0$ tres habere radices huiusmodi x, $x+a$, & $x+b$, quae primum interuallis finitis a & b a se inuicem discrepent; & quia y euanescit, si loco x tam $x+a$, quam $x+b$ scribatur, erit:

$$y=0$$

$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{a^2ddy}{2dx^2}+\frac{a^3d^3y}{6dx^3}+\frac{a^4d^4y}{24dx^4}+\&c.=0$$

$$y+\frac{b\,dy}{dx}+\frac{b^2ddy}{2dx^2}+\frac{b^3d^3y}{6dx^3}+\frac{b^4d^4y}{24dx^4}+\&c.=0$$

a quibus binis posterioribus si prima subtrahatur erit:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a\,ddy}{2dx^2}+\frac{a^2d^3y}{6dx^3}+\frac{a^3d^4y}{24dx^4}+\&c.=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b\,ddy}{2dx^2}+\frac{b^2d^3y}{6dx^3}+\frac{b^3d^4y}{24dx^4}+\&c.=0$$

Subtrahantur quoque hae a se inuicem, diuisioneque per $a-b$ facta erit:

$$\frac{ddy}{2dx^2}+\frac{(a+b)d^3y}{6dx^3}+\frac{(aa+ab+bb)d^4y}{24dx^4}+\&c.=0.$$

Ponatur iam $a=0$ & $b=0$, ita vt tres illae radices inter se sint aequales, eritque ob terminos euanescentes:

$$y=0;\quad \frac{dy}{dx}=0;\quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2}=0.$$

248.

248. Quoties ergo aequatio $y = 0$, tres habent radices aequales puta f, f, f, tum ista quantitas f erit quoque radix non solum huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, sed etiam huius $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Hinc manifestum est, cum f sit radix communis aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$, & eius differentialis $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, eam in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, bis inesse debere, per ea quae ante de binis radicibus aequalibus ostendimus. Quare si aequatio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0$$

tres contineat radices aequales f, f, f, si eius termini per terminos progressionis arithmeticae cuiusuis multiplicentur, tum aequatio resultans binas habebit radices aequales f & f: quamobrem ea denuo per progressionem arithmeticam quamcunque multiplicari poterit, vt prodeat aequatio eandem radicem f semel complectens. Obtinebuntur ergo tres aequationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione haec ipsa radix facile elicietur. Si enim eiusmodi progressiones arithmemeticae eligantur, quarum vel primus vel vltimus terminus sit $= 0$, tum aequatio prodibit vno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilior euadet.

249. Simili modo ostendetur, si aequatio $y = 0$ quatuor habeat radices aequales f, f, f, f, tum posito $x = f$ non

non solum fieri $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, & $\frac{ddy}{dx^2}=0$, sed etiam fore $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Scilicet vti aequatio $y=0$ quater continet radicem $x=f$; ita aequatio $\frac{dy}{dx}$ eandem radicem ter; aequatio vero $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, & aequatio $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel complectetur. Hoc quoque facilius perspicietur, si perpendamus functionem y hoc casu huiusmodi formam $(x-f)^4X$ habere debere, denotante x functionem quamcunque ipsius x. Hac forma assumta erit: $\frac{dy}{dx}=(x-f)^3\left(4X+\frac{(x-f)dX}{dx}\right)$, ideoque per $(x-f)^3$ diuisibilis. Similiter porro habebit $\frac{ddy}{dx^2}$ factorem $(x-f)^2$, & $\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $x-f$; ex quo perspicuum est, si radix $x=f$ in aequatione $y=0$ quater insit, eam in aequatione $\frac{dy}{dx}=0$ ter, in aequatione $\frac{ddy}{dx^2}=0$ bis, atque in $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ semel adhuc inesse debere.

CAPUT X.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

250.

Si functio ipsius x ita fuerit comparata, vt crescentibus valoribus x ipsa continuo crescat vel decrescat, tum ista functio nullum habebit valorem maximum minimumve. Quicunque enim huius functionis valor consideretur, sequentes erunt maiores, praecedentes vero minores. Huiusmodi functio est $x^3 + x$, cuius valor crescentibus x continuo crescit, decrescentibus vero x, continuo decrescit; maximum ergo haec functio valorem alium induere nequit, nisi ipsi x valor maximus, hoc est infinitus tribuatur; similique modo minimum obtinebit valorem, si ponatur $x = -\infty$. Nisi autem functio ita fuerit comparata, vt crescente x continuo crescat decrescatue, maximum vel minimum alicubi habebit valorem; hoc est eiusmodi valorem, qui sit vel maior vel minor, quam antecedentes & sequentes. Sic ista functio $xx - 2x + 3$ minimum valorem induit, si ponatur $x = 1$, quicunque enim alius valor ipsi x tribuatur, perpetuo functio maiorem adipiscetur valorem.

251. Quo autem natura maximorum ac minimorum clarius perspiciatur, ponamus y eiusmodi esse functionem ipsius x, quae maximum obtineat valorem, si ponatur $x = f$; atque intelligitur, si x ponatur siue maius

ius fiue minus quam f, tum valorem ipfius y inde oriundum minorem fore illo, quem induit fi ponatur $x = f$. Simili modo, fi pofito $x = f$, functio y minimum obtineat valorem, neceffe eft vt, fiue x ponatur maius quam f fiue minus, femper maior ipfius y valor refultet: haecque eft definitio maximorum & minimorum abfolutorum. Praeterea autem quoque functio y maximum valorem recipere dicitur pofito verbi gratia $x = f$, dummodo ifte valor maior fuerit quam proximi fiue fequentes fiue antecedentes, qui oriuntur, fi x aliquantillum fiue maius fiue minus quam f ftatuatur; etiamfi aliis valoribus loco x fubftituendis functio y maiores forte valores recipiat. Similiter functio y minimum valorem recipere dicitur pofito $x = f$, dummodo ille valor minor fuerit iis, quos induit, fi loco x valores proxime fiue maiores fiue minores quam f fubftituantur. Atque in hac pofteriori fignificatione iftis maximorum & minimorum vocabulis vtemur.

252. Antequam autem modum oftendamus haec maxima & minima inueniendi, notari conuenit hanc inveftigationem proprie in iis tantum ipfius x functionibus locum habere, quas fupra vniformes vocauimus, & quae funt ita comparatae, vt pro fingulis ipfius x valoribus fingulos pariter valores recipiat. Biformes autem & multiformes functiones vocauimus, quae pro fingulis valoribus ipfius x binos pluresue valores inducunt, cuiusmodi functiones funt radices aequationum quadraticarum & plurium dimenfionum. Si igitur y huiusmodi fuerit functio ipfius x vel biformis vel multiformis, tum proprie

 dici

dici nequit, eam posito $x = f$ valorem siue maximum siue minimum induere: quoniam enim posito $x = f$ vel duos pluresue valores simul obtinet, atque praecedentes aeque ac sequentes sint numero plures, diiudicatio maximi minimiue non tam facile instituitur: nisi forte omnes functionis y valores, qui singulis ipsius x valoribus respondent, sint imaginarii praeter vnum; quo casu huiusmodi functiones speciem functionum vniformium mentiuntur. Primum ergo functiones vniformes harumque speciem mentientes contemplabimur, tum vero quomodo iudicium ad multiformes accommodari debeat, indicabimus.

253. Sit igitur y functio ipsius x vniformis, quae propterea, quicunque valor pro x substituatur, semper vnum recipiat valorem realem, denotetque x eum valorem, qui functioni y maximum minimumue valorem inducat. Priori ergo casu, siue loco x substituatur $x + \alpha$ siue $x - \alpha$, valor ipsius y minor erit, quam si $\alpha = 0$, posteriori vero casu maior. Cum igitur posito $x + \alpha$ loco x functio y abeat in

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

at posito $x - \alpha$ loco x in

$$y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

ne-

necesse est vt casu maximi sit

$$y > y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c. \quad \&$$

$$y > y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

In casu autem, quo valor ipsius y fit minimus erit:

$$y < y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

$$y < y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \&c.$$

254. Quoniam haec euenire debent, si α denotet quantitatem minimam, statuamus α tam paruum, vt eius potestates altiores reiici queant; debebitque tam pro casu maximi quam minimi esse $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$. Nisi enim $\frac{\alpha dy}{dx}$ esset $= 0$, neque valor ipsius y maximus neque minimus esse posset. Hinc tam pro maximis quam pro minimis inuestigandis haec habetur regula communis, vt differentiale propositae y nihilo aequale ponatur, eritque ille ipsius x valor, qui functionem reddit vel maximam vel minimam, radix istius aequationis. Vtrum vero valor hoc modo inuentus ipsius y futurus sit maximus an minimus, incertum relinquitur; quin etiam fieri potest, vt y neque maximum neque minimum sit futurum: tantum enim inuenimus vtroque casu fore $\frac{dy}{dx} = 0$, ne-

que viciſſim affirmauimus, quoties ſit $\frac{dy}{dx} = 0$, toties quoque valorem pro y prodire vel maximum vel minimum.

255. Interim tamen ad caſus, quibus valor ipſius y vel maximus vel minimus euadat, inueſtigandos haec prima operatio inſtituenda eſt, vt differentiale functionis propoſitae nihilo aequetur, atque ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ omnes ipſius x valores eliciantur. Quibus inuentis deinceps diſpiciendum erit, vtrum iis functio y maximum induat valorem, an minimum, an neutrum? oſtendemus enim fieri poſſe, vt neque maximum neque minimum locum habeat, etiamſi ſit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sit f valor ſeu vnus ex valoribus ipſius x, quem obtinet ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$, hicque valor ſubſtituatur in expreſſionibus $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. fiatque hac ſubſtitutione $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ &c. Abeat autem functio ipſa y poſito f loco x in F, atque ſi loco x ponatur $f + \alpha$, iſta functio abibit in

$$F + \frac{1}{2}\alpha^2 p + \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r + \&c.$$

ſin autem loco x ponatur $f - \alpha$ prodibit

$$F + \frac{1}{2}\alpha^2 p - \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r - \&c.$$

vnde

vnde patet, si p fuerit quantitas affirmatiua, vtrumque valorem maiorem fore quam F, saltem si α quantitatem valde paruam denotet, ac propterea valorem F, quem functio y induit posito $x=f$, fore minimum. Sin autem p sit quantitas negatiua, tum valor $x=f$ functioni y inducet valorem maximum.

256. Quodsi autem fuerit $p=0$, tum spectari debet valor ipsius q, qui si non fuerit $=0$, valor ipsius y neque maximus erit neque minimus; nam posito $x=f+\alpha$ erit $F+\frac{1}{6}\alpha^3 q > F$ & posito $x=f-\alpha$ erit $F-\frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Sin autem quoque fuerit $q=0$, ad quantitatem r erit respiciendum, quae si habuerit valorem affirmatiuum valor functionis F, quem recipit posito $x=f$, erit minimum; sin autem r habeat valorem negatiuum, erit F maximum. At si quoque r euanescat iudicium ex sequentis litterae s valore erit petendum, quod simile erit illi, quod ex littera q formauimus. Scilicet si s non fuerit $=0$, functio F neque maximum erit neque minimum; sin autem sit quoque $s=0$, tum sequens littera t, si habeat valorem affirmatiuum indicabit minimum, sin autem habeat valorem negatiuum, indicabit maximum. Verum si & haec littera t euanescat, tum in iudicando vlterius est procedendum eodem prorsus modo, quo in casibus praecedentibus sumus vsi. Sicque de qualibet radice aequationis $\frac{dy}{dx}=0$ indagabitur, vtrum functioni y inducat valorem maximum an mini-

minimum, an neutrum; atque hoc modo omnia maxima & minima, quae quidem functio y recipere potest, inuenientur.

257. Si ergo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat aequales, ita vt factorem habeat quadratum $(x-f)^2$, tum posito $x = f$ simul $\frac{ddy}{dx^2}$ euanescet, eritque $p = 0$, non autem q. Hoc ergo casu functio y neque maximum neque minimum valorem induet. Sin autem aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ tres radices habeat aequales, seu $\frac{dy}{dx}$ factorem cubicum $(x-f)^3$, tum posito $x = f$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ & $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; non autem $\frac{d^4y}{dx^4}$. Huius ergo termini valor si fuerit affirmatiuus indicabit minimum, sin negatiuus, maximum. Judicium ergo ante explicatum huc redit, vt si expressio $\frac{dy}{dx}$ factorem habuerit $(x-f)^n$, existente n numero impari, functio y, si in ea ponatur $x = f$, valorem sit acceptura vel maximum vel minimum; sin autem exponens n fuerit numerus par, tum substitutio $x = f$ neque maximum neque minimum valorem producat.

258. Deinde inuentio maximi ac minimi saepenumero non mediocriter adiuuabitur sequentibus considerationibus. Quibus scilicet casibus functio y fit maximum vel minimum, iisdem casibus fiet quoduis eius multiplum ay, si qui-

quidem a fuerit quantitas affirmatiua, itemque y^3, y^5, y^7, &c. atque generaliter ay^n, si quidem n fuerit numerus affirmatiuus impar, pariter maximum vel minimum; quoniam huiusmodi formulae ita sunt comparatae, vt crescente y crescant, & decrescente y decrescant. Quibus autem casibus fit y maximum vel minimum, iisdem casibus $-y$, $-ay$, $b-ay$, & generaliter $b-ay^n$ existente n numero affirmatiuo impari, fiet ordine inverso vel minimum vel maximum. Similiter quibus casibus y fit maximum vel minimum, iisdem casibus formulae hae $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$, & generaliter $\frac{a}{y^n} \pm b$, denotante a quantitatem affirmatiuam & n numerum affirmatiuum imparem, fient inuerso ordine vel minimum vel maximum; sin autem a fuerit quantitas negatiua, tum istae formulae maximum impetrabunt valorem, si y fuerit maximum, & minimum, si y sit minimum.

259. Ad potestates autem pares haec non item traduci possunt: quoniam enim, si y valores recipit negatiuos, eius potestates pares y^2, y^4, &c. valores affirmativos inducunt, fieri potest, vt dum y minimum valorem negatiuum scilicet recipit, eius potestates pares fiant maxima. Huius igitur conditionis ratione habita affirmare poterimus, si y fuerit maximum vel minimum, existente eius valore affirmatiuo, tum eius potestates pares y^2, y^4, &c. quoque fore maxima vel minima. Sin autem valor ipsius y negatiuus fuerit maximum, tum eius quadratum yy accepturum esse valorem minimum, & contra si valor

ipsius y negatiuus sit minimum, tum y^2, y^4, &c. fore maximum. Quodsi vero exponentes ipsius y pares fuerint negatiui, tum contrarium eueniet. Ceterum quae hic de exponentibus paribus & imparibus annotauimus, ea non solum pro numeris integris valent, sed etiam pro fractis, quorum denominatores sunt numeri impares; in hoc enim negotio fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, &c. numeris imparibus, at $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, &c. numeris paribus aequiualent.

260. Sin autem denominatores fuerint numeri pares, tum, quoniam si y negatiuum habet valorem, eius potestates $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; &c. fiunt imaginariae; hoc tantum de iis affirmari poterit, si valor ipsius y affirmatiuus fuerit maximum vel minimum, tum quoque $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; &c. fore pariter vel maxima vel minima; contra autem $y^{-\frac{1}{2}}$, $y^{-\frac{3}{2}}$, $y^{-\frac{1}{4}}$, &c. minima vel maxima. Quia autem haec irrationalia simul geminos valores habent, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum, de negatiuis contrarium erit tenendum, quod hic de affirmatiuis diximus. Sin autem valor ipsius y negatiuus euadat maximum vel minimum, tum quia huiusmodi potestates omnes fiunt imaginariae, neque maximis neque minimis annumerari poterunt. His igitur subsidiis inuestigatio maximi & minimi saepe admodum reddetur facilis, quae alias futura esset vehementer difficilis.

261. Quoniam haec proprie ad functiones rationales, quippe quae sunt solae uniformes, pertinent, primum functiones integras euoluamus, atque maxima minimaque quae in ipsis occurrunt indagemus. Cum igitur huiusmodi functiones ad hanc formam referantur:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

primum patet earum valorem maiorem fieri non posse, quam si ponatur $x = \infty$; tum vero si $x = -\infty$ valor huius formulae prodit $= \infty^n$, si n sit numerus par, at $-\infty^n$ si n sit numerus impar, qui propterea valor erit omnium minimus. Dantur autem praeterea saepe alia maxima & minima eo sensu, quem his vocibus attribuimus, quae sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire valores ipsius x, *quibus haec functio* $(x-a)^n$ *sit maximum vel minimum.*

Posito $(x-a)^n = y$, erit $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, quo posito $= 0$, fiet $x = a$. Cum igitur $\frac{dy}{dx}$ factorem habeat $(x-a)^{n-1}$, ex §. 257. intelligitur y maximum minimumue esse non posse, nisi sit $n-1$ numerus impar, seu n numerus par. Quia autem dum fit

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)(n-2) \ldots 1$$

hoc est numerus affirmatiuus, sequitur, valorem ipsius y posito $x = a$ proditurum esse minimum. Quod quidem

 faci-

facile patet; nam posito $x = a$ fit $y = 0$; & si x ponatur vel maius vel minus quam a, ob n numerum parem, accipiet y valorem positiuum hoc est nihilo maiorem; sin autem n fuerit numerus impar, tum functio $y = (x-a)^n$ neque maximum neque minimum admittit. Perspicuum autem porro est hoc idem valere, si n fuerit numerus fractus siue impar siue par. Scilicet $(x-a)^{\frac{\mu}{\nu}}$ fiet posito $x = a$ minimum, si μ fuerit numerus par & ν impar; sin autem vterque fuerit impar, neque maximum dabitur neque minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire casus quibus valor huius formulae $xx + 3x + 2$ *fit maximum vel minimum.*

Ponatur $xx + 3x + 2 = y$, erit $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$. Statuatur ergo $2x + 3 = 0$, fiet $x = -\frac{3}{2}$; qui casus vtrum maximum an minimum producat, cognoscetur ex valore $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, qui cum sit affirmatiuus, quicquid sit x, indicat minimum. Posito autem $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{4}$, & si alii quicunque valores ipsi x tribuantur, valor ipsius y inde oriundus perpetuo maior erit quam $-\frac{1}{4}$. Ex natura quoque ipsius formulae $xx + 3x + 2$ perspicitur, eam minimum valorem habere debere; nam cum in infinitum excrescat siue ponatur $x = +\infty$ siue $x = -\infty$, necesse est, vt quispiam valor ipsius x ipsi y omnium minimam quantitatem inducat.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire casus, quibus expressio haec $x^3 - axx + bx - c$ *maximum minimumue valorem accipit.*

Posito $y = x^3 - axx + bx - c$; erit $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$ & $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Statuatur ergo $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b = 0$; erit $x = \frac{a \pm \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$, ex quo intelligitur, nisi sit $aa > 3b$, formulam propositam neque maximum neque minimum esse habituram. Sin autem sit $aa > 3b$, duobus casibus fit maximum vel minimum. Hinc vero oritur $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm\sqrt{(aa - 3b)}$, vnde intelligitur nisi sit $aa = 3b$, valorem $x = \frac{a + \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ reddere formulam $y = x^3 - axx + bx - c$ minimam, alterum vero $x = \frac{a - \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ maximam. Quanti autem futuri isti sint ipsius y valores, cum sit $3xx - 2ax + b = 0$ seu $x^3 - \frac{2}{3}axx + \frac{1}{3}bx = 0$; erit $y = -\frac{1}{3}axx + \frac{2}{3}bx - c$ & ob $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$, fit $y = \frac{2}{9}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(aa-3b)}{27} \mp \frac{2(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}}{27} + \frac{ab}{9} - c$, siue $y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}}$, vbi signum superius valet pro minimo, inferius autem

 pro

pro maximo. Reſtat ergo caſus quo $aa = 3b$, in quo cum fiat $\frac{ddy}{dx^3} = 0$, ſequens vero terminus $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$; non ſit $= 0$, ſequitur hoc caſu formulam propoſitam neque maximum neque minimum eſſe recepturam.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire caſus quibus haec functio ipſius x;
$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$
ſit maximum vel minimum.

Poſito $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; erit
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$
$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22$$

Statuatur nunc $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$ ſeu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, orientur tres valores reales pro x; I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$. Ex primo valore fit $\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, ideoque poſito $x = 1$ functio propoſita fit minimum. Ex ſecundo valore $x = 2$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, ideoque functio propoſita maximum. Ex tertio valore $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^2} = +4$, ideoque functio propoſita iterum minimum.

EXEM-

EXEMPLUM V.

Proposita sit haec functio $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, *quae, quibus casibus fiat maximum minimumue quaeritur.*

Cum sit $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$, formetur aequatio $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$, cuius radices sunt I. & II. $x = 0$; III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Quoniam prima & secunda radices sunt aequales, ex iis neque maximum neque minimum sequitur, sit enim $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, at $\frac{d^3y}{2dx^3}$ non euanescit. Tertia radix autem $x = 1$, ob $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$ praebet $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, hocque ergo casu functio fit maximum. Ex quarta radice $x = 3$ fit $\frac{ddy}{2dx^3} = 45$, ideoque functio proposita minimum.

EXEMPLUM VI.

Inuenire casus quibus haec formula

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

fit maximum vel minimum.

Erit ergo $\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2$, & $\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$. Formetur aequatio $x^5 - x^4 + x^3 - xx = 0$, quae cum in factores res resoluta sit $x^2(x-1)(xx+1) = 0$, duas habet radices

dices aequales $x = 0$, & praeterea radicem $x = 1$, duasque insuper ex $xx + 1 = 0$ imaginarias. Cum igitur binae radices aequales $x = 0$ neque maximum neque minimum exhibeant, tantum confideranda fupereft radix $x = 1$, ex qua fit $\frac{ddy}{60\,dx^2} = 2$, cuius valor affirmatiuus indicat minimum.

262. Determinatio ergo maximorum & minimorum pendet a radicibus aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = 0$, cuius poteftas fumma, cum fit vno gradu inferior quam in ipfa functione propofita y, fi quidem haec fuerit functio rationalis integra: manifeftum eft fi in genere proponatur haec functio:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = y$$

eius maxima & minima determinari per radices huius aequationis:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Ponamus huius aequationis radices reales fecundum ordinem quantitatis difpofitas effe α, β, γ, δ, &c. ita vt α fit maxima $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$, &c. Ac primo quidem fi hae radices omnes fuerint inaequales, vnaquaeque formulae propofitae y inducet valorem maximum vel minimum; totque idcirco functio y habebit maxima vel minima, quo aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habuerit radices reales inaequales. Sin autem duae pluresue radices inter fe fuerint aequales, res ita fe habebit, vt duae radices aequales

les neque maximum neque minimum exhibeant; ternae vero radices aequales vni aequiualeant: atque in genere si numerus radicum aequalium fuerit par, nullum inde resultat maximum minimumue; sin autem sit impar, vnum inde oritur siue maximum siue minimum.

263. Quaenam autem radices maxima, & quae minima producant, sine subsidio regulae ante traditae ita definiri poterit. Cum functio y posito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipsius x intra limites ∞ & α, vllum producant siue maximum siue minimum; perspicuum est valores functionis y, dum loco x successiue valores ab ∞ vsque ad α substituantur, continuo decrescere oportere; ideoque valor $x = \alpha + \omega$ functioni y maiorem valorem inducet, quam valor $x = \alpha$: vnde cum $x = \alpha$ maximum minimumue producat, necesse est, vt hoc casu functio y fiat minimum. Vlterius ergo x diminuendo seu ponendo $x = \alpha - \omega$, valor ipsius y iterum crescet, donec fiat $x = \beta$, quae est secunda aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix maximum minimumue producens: quare haec secunda radix $x = \beta$ maximum praebebit, & valor $x = \beta - \omega$ minorem efficiet functionem y, quam $x = \beta$, donec perueniatur ad $x = \gamma$, quae consequenter iterum minimum generabit. Ex quo ratiocinio perspicitur, radices aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ primam, tertiam, quintam, &c. minima, secundam autem, quartam, sextam &c. maxima exhibere. Simul autem hinc intelligitur in casu

Ffff dua-

duarum radicum aequalium maximum & minimum coalescere, sicque neutrum locum habere.

264. Si ergo in functione proposita

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c.$$

maximus exponens n fuerit numerus par, aequatio

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \&c. = 0;$$

erit gradus imparis, ideoque vel vnam habebit radicem realem, vel tres, vel quinque, vel numero impares. Si vnica radix fuerit realis, ea dabit minimum; sin tres fuerint reales, maxima praebebit minimum, media maximum, & minima iterum minimum; & si quinque radices fuerint reales, functio y tria habebit minima & duo maxima; sicque porro. At si exponens n fuerit numerus impar, aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad gradum parem pertinebit, ideoque vel nullam habebit radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel sex, &c. Primo casu functio y neque maximum habebit neque minimum; altero casu, quo duae dantur radices, earum maior minimum, minor autem maximum indicabit: quatuor autem radicum prima (quae est maxima) & tertia minimum, secunda vero & quarta maximum producunt. Perpetuo autem quotcunque radices fuerint reales, maxima & minima se mutuo alternatim insequuntur.

265. Progrediamur ad functiones rationales fractas, quibus altera species functionum vniformium constituitur. Sit

Sit igitur $y = \frac{P}{Q}$, existentibus P & Q functionibus quibuscunque ipsius x; ac primo quidem apparet, si ipsi x eiusmodi valor tribuatur, vt fiat $Q = o$, nisi simul P euanescat, functionem y euadere infinitam, quod vtique maximum videatur. Nihilo vero minus iste casus pro maximo haberi nequit; cum enim fractio inuersa $\frac{Q}{P}$ iisdem casibus fiat minimum, quibus proposita $\frac{P}{Q}$ fit maximum, deberet fractio $\frac{Q}{P}$ fieri minimum, si Q euanescit; hoc autem non semper euenit, propterea quod adhuc minores valores, negatiuos scilicet, induere posset. Hoc igitur dubio exemto, simul regula ante data confirmatur, quod maxima & minima ex aequatione $\frac{dy}{dx} = o$ elici debeant. Fiet ergo casu proposito $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; ideoque $QdP - PdQ = o$; huiusque aequationis radices efficient functionem y vel maximum vel minimum. Atque si dubium sit, vtrum maximum an minimum locum habeat, confugiendum est ad valorem $\frac{ddy}{dx^2}$, qui si fuerit affirmatiuus minimum indicabit, sin autem sit negatiuus maximum. Quod si vero & hic valor $\frac{ddy}{dx^2}$ euanescat, quod euenit, si aequatio $\frac{dy}{dx} = o$ habeat duas pluresue ra-

dices aequales; perpetuo tenendum est radices aequales numero pares neque maximum neque minimum producere.

EXEMPLUM I.

Inuenire casus, quibus functio $\frac{x}{1+xx}$ fit maximum vel minimum.

Primum quidem apparet, hanc functionem in nihilum abire casibus tribus $x = \infty$, $x = 0$ & $x = -\infty$, vnde ad minimum duo recipiet siue maxima siue minima. Ad quae inuenienda ponatur $y = \frac{x}{1+xx}$; eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x+2x^3}{(1+xx)^3}$. Jam statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $1 - xx = 0$, & vel $x = +1$ vel $x = -1$. Priori casu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$; ideoque y maxim. $= \frac{1}{2}$, posteriori $x = -1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$; ideoque y minim. $= -\frac{1}{2}$. Haec quoque facilius inueniuntur, si fractio proposita $\frac{x}{1+xx}$ inuertatur, ponendo $y = \frac{1+xx}{x} = x + \frac{1}{x}$, dummodo recordemur tum quae maxima inueniuntur in minima & vicissim transmutari debere. Erit autem $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$. Statuto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, fit $xx - 1 = 0$, indeque vel $x = +1$ vel $x = -1$ vt ante. Atque

Atque casu $x = +1$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, ideoque y minimum, & formula proposita $\frac{1}{y}$ maximum. Casu autem $x = -1$, fit $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, vnde y maximum & $\frac{1}{y}$ minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire casus quibus formula $\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $y = \frac{xx - 3x + 2}{xx + 3x + 2}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 12}{(xx + 3x + 2)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{12x^3 + 72x + 72}{(xx + 3x + 2)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, fiet vel $x = +\sqrt{2}$ vel $x = -\sqrt{2}$. Priori casu $x = +\sqrt{2}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 + 3\sqrt{2})^3}$, ideoque affirmatiuum, ob denominatorem affirmatiuum: hinc erit y minimum $= \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 17 = -0,02943725$. Posteriori casu $x = -\sqrt{2}$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 - 3\sqrt{2})^3} = \frac{24(3 - 2\sqrt{2})}{(4 - 3\sqrt{2})^3}$, cuius valor ob numeratorem affirmatiuum & denominatorem negatiuum erit negatiuus, ideoque y fiet maximum $= \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2} - 17 = -33,97056274$. Qui valor etsi minor est quam prior minimus, tamen ideo est maximus, quod maior fit contiguis proximis, qui oriun-

untur, si loco x vel aliquantillum maiores vel minores valores quam $-\sqrt{2}$ substituantur. Cum igitur $\sqrt{2}$ inter limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$ contineatur, probatio facile instituetur hoc modo:

si $x = \frac{4}{3}$ fit $y = -\frac{2}{70} = -0,0285$

si $x = \sqrt{2}$ fit $y = 12\sqrt{2}-17 = -0,0294$ minimum

si $x = \frac{3}{2}$ fit $y = -\frac{1}{35} = -0,0285$

---

si $x = -\frac{4}{3}$ fit $y = -35$

si $x = -\sqrt{2}$ fit $y = -33,970$ maximum

si $x = -\frac{3}{2}$ fit $y = -35.$

EXEMPLUM III.

Inuenire casus, quibus formula $\frac{xx-x+1}{xx+x-1}$ *fit maximum vel minimum.*

Ponatur $y = \frac{xx-x+1}{xx+x-1}$, eritque $\frac{dy}{dx} = \frac{2xx-4x}{(xx+x-1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4x^3-12xx+4}{(xx+x-1)^3}$. Statuatur $\frac{dy}{dx} = 0$, erit vel $x = 0$ vel $x = 2$: priori casu fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, ideoque erit y maximum $= -1$. Posteriori casu $x = 2$ fit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, ideoque y minimum $= \frac{3}{5}$, etiamsi illud maximum

ximum minus sit quam hoc minimum. Probatio patebit ex his positionibus :

si $x = -\frac{1}{3}$; erit $y = -\frac{13}{11}$

si $x = 0$; . . $y = -1$ maximum

si $x = +\frac{1}{3}$; . . $y = -\frac{7}{5}$

---

si $x = 2 - \frac{1}{3}$; erit $y = \frac{19}{31}$

si $x = 2$; . . $y = \frac{3}{5}$ minimum.

si $x = 2 + \frac{1}{3}$; . . $y = \frac{37}{61}$

Quod autem, si ponatur $x = 1$, fiat $y = 1$, ideoque > -1, causa est, quod inter valores ipsius x, 0 & 1 contineatur unus, quo fit $y = \infty$.

EXEMPLUM VI.

Quaerantur casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$ fiat maxima vel minima.

Posito $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^6 - 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 + 18x^7 - 24x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}$. Habebimus ergo hanc aequationem : $x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$, quae resoluitur in has duas : $xx - 1 = 0$ & $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$, quarum illius radices sunt $x = +1$ & $x = -1$; haec vero

vero resoluta dat $xx = -\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, ex qua nulla radix realis emergit. Duarum igitur radicum inuentarum prior $x = +1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = -8$, ac propterea y maximum $= 2$; altera radix $x = -1$ facit $\frac{ddy}{dx^2} = +8$ ac propterea y minimum $= -2$.

EXEMPLUM V.

Inuenire casus, quibus haec fractio $\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$ *fit maximum vel minimum.*

Posito $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, erit $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$ & $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - x^2 + 1)^3}$. Facto autem $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, quae diuisa per $xx + 1$ dat $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, haecque vlterius resoluitur in $xx - x - 1 = 0$ & $xx + x - 1 = 0$, vnde sequentes quatuor oriuntur radices reales:

I. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; II. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

III. $x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; IV. $x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Quae cum omnes in aequatione $x^4 - 3xx + 1 = 0$ contineantur, posito $x^4 = 3xx - 1$, fiet pro omnibus

ddy

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10-20xx)}{8x^6} = \frac{5(1-2xx)}{2x^5} = \frac{5(1-2xx)}{2x(3xx-1)}$$

$$\& \quad y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx-1}{2x}.$$

Pro duabus autem prioribus ex aequatione $xx = x + 1$ ortis erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2x+1)}{2x(3x+2)} = -\frac{5(2x+1)}{2(5x+3)}$, & $y = \frac{1}{2}$. Prima igitur radix $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2+\sqrt{5})}{11+5\sqrt{5}}$, ideoque eſt y maximum. Secunda radix $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; dat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2-\sqrt{5})}{11-5\sqrt{5}} = -\frac{5(\sqrt{5}-2)}{5\sqrt{5}-11}$; ideoque $y = \frac{1}{2}$ erit quoque maximum. Duae reliquae radices dant $y = -\frac{1}{2}$ minimum.

266. In his igitur exemplis exploratio, vtrum valor quispiam inuentus maximum an minimum producat, facilius inſtitui poterit: cum enim ſit $\frac{dy}{dx} = 0$, valor termini $\frac{ddy}{dx^2}$, eius aequationis ratione habita, ſimplicius exprimi poterit. Sit enim propoſita fractio $y = \frac{P}{Q}$; cum ſit $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$, & $QdP - PdQ = 0$; erit $ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}$. At vero ob $QdP - PdQ = 0$ hic poſterior terminus euaneſ-

cit, eritque $ddy = \frac{d.(QdP - PdQ)}{QQ} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$; Quoniam vero iudicium ex huius termini valore ſiue affirmatiuo ſiue negatiuo petitur, denominator autem Q^2 perpetuo ſit affirmatiuus; ex ſolo numeratore negotium ita confici poterit, vt quoties $QddP - PddQ$ ſeu $\frac{d(QdP - PdQ)}{dx^2}$ fuerit affirmatiuum, minimum pronuncietur, ſin ſit negatiuum maximum. Siue poſtquam inuentum fuerit $\frac{dy}{dx}$, cuius forma erit huiusmodi $\frac{R}{QQ}$, tantum quaeratur $\frac{dR}{dx}$; & quae radix huic expreſſioni valorem affirmatiuum inducit, ex ea proueniet minimum, & contra maximum.

267. Si denominator fractionis propoſitae fuerit quadratum ſeu altior poteſtas quaecunque, ita vt ſit $y = \frac{P}{Q^n}$, fiet $dy = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$, & poſito $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$; & maxima minimaque determinabuntur ex radicibus aequationis $R = 0$. Cum deinde ſit $\frac{ddy}{dx} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$, ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$; cuius valor affirmatiuus indicabit minimum, negatiuus autem maximum. Perſpicuum autem eſt, ſi n fuerit numerus impar, ob Q^{n+1} ſemper affirmati-

matiuum, iudicium ex ſolo $\frac{dR}{dx}$ perfici poſſe; ſin autem n ſit numerus par, adhibeatur formula $\frac{QdR}{dx}$. Ponamus autem porro proponi huiusmodi fractionem $\frac{P^m}{Q^n} = y$, erit $dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$; ſi itaque ponatur $\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$, aequationis $R = 0$ radices indicabunt caſus, quibus functio y fit vel maximum vel minimum. Cum igitur ſit $\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$, erit:
$$\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}},$$
& ob $R = 0$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}$; quae inſuper per quodcunque quadratum $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ diuidi poteſt, ad iudicium abſoluendum. Praeterea vero quoque aequatio $P = 0$ dabit maximum vel minimum, ſi m fuerit numerus par; atque ſimili modo formulam inuerſam $\frac{Q^n}{P^m}$ ſpectando, prodibit maximum vel minimum ponendo $Q = 0$, ſi n fuerit numerus par, vti ſupra §. 257. oſtendimus: hic autem ad maxima vel minima hinc oriunda non reſpicimus, ſed tantum ad vſum methodi explicandum ea indagamus, quae oriuntur ex aequatione $R = 0$.

EXEMPLUM I.

Proponatur fractio $\frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, *quae, quo casu fiat maximum vel minimum, quaeritur.*

Posito $y = \frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$, primo quidem patet fore $y = 0$ si $x = -\frac{\alpha}{\beta}$, & $y = \infty$ si $x = -\frac{\gamma}{\delta}$: quorum casuum ille dabit minimum, hic vero maximum, si m & n fuerint numeri pares. Praeterea vero erit: $\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha+\beta x)^{m-1}}{(\gamma+\delta x)^{n+1}}[(m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta]$, ideoque $R = (m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta$. Quare posito $R = 0$, erit $x = \frac{n\alpha\delta - m\beta\gamma}{(m-n)\beta\delta}$. Deinde ob $\frac{dR}{dx} = (m-n)\beta\delta$, dispiciendum est, vtrum

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}\beta^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-2}\frac{dR}{dx}$$

sit quantitas affirmatiua an negatiua? priori casu formula proposita erit minimum, posteriori maximum. Sic si fuerit $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, fiet $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{9}{8}$, ideoque formula $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ fiet minimum, si ponatur $x = 0$. Sin autem sit $y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, erit $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{n-m+2}(m-n)$,

&

& $x = \frac{n+m}{n-m}$. Cum autem m & n ponantur numeri affirmatiui, iudicium petendum erit ex formula $(n-m)^{n-m+1}(m-n)$ seu $(n-m)^{n-m}(m-n)$. Si igitur fuerit $n > m$, valor erutus $x = \frac{n+m}{n-m}$ semper dabit maximum; sin autem sit $n < m$, numerus $m-n$ par dabit minimum, at impar, maximum: sic $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ fiet maximum posito $x = -5$; fit enim $y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{2}$.

EXEMPLUM II.

Proponatur formula $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$.

Erit $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(3-4x-xx)$,

& $\frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(2x+4)$,

vbi cum $(1+x)^2$ & $(1+xx)^3$ semper habeant valorem affirmatiuum, iudicium relinquetur formulae $-x-2$, quae si fuerit affirmatiua minimum, sin negatiua maximum indicat. At vero ex aequatione $3-4x-xx=0$ sequitur vel $x=-2+\sqrt{7}$ vel $x=-2-\sqrt{7}$. Priori casu fit $-x-2=-\sqrt{7}$, ideoque fractio proposita erit maximum, posteriori vero casu minimum ob $-x-2=+\sqrt{7}$. Posito autem $x=-2+\sqrt{7}$, erit $1+x=-1+\sqrt{7}$, & $1+xx=12-4\sqrt{7}$, vnde

 $y =$

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)^2 (\sqrt{7}-1) = \frac{(2+\sqrt{7})^2(\sqrt{7}-1)}{16} = \frac{17+7\sqrt{7}}{16}$$
$$= 2,220.$$

Posito autem $x = -2-\sqrt{7}$ fiet $y = \frac{17-7\sqrt{7}}{16} = -0,0950.$

268. Dantur etiam functiones irrationales & transcendentes, quae proprietatem functionum vniformium habent, & hancobrem maxima & minima eodem modo inueniri possunt. Radices enim cubicae & omnium imparium potestatum reuera sunt vniformes, cum nonnisi vnicum valorem realem exhibeant: radices autem quadratae atque omnium potestatum parium, etsi reuera, quoties sunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmatiuum alterum negatiuum, tamen vnusquisque seorsim spectari potest, hocque sensu etiam maxima & minima inuestigari possunt. Sic si y fuerit functio quaecunque ipsius x, etsi $\sqrt{y}$ geminum habet valorem tamen vterque seorsim tractari poterit. Scilicet $+\sqrt{y}$ maximum vel minimum habebit valorem, si y talem habuerit, dummodo fuerit affirmatiuus; quia alioquin $\sqrt{y}$ euaderet imaginarium. Vice versa autem $-\sqrt{y}$ fiet minimum vel maximum, iisdem casibus, quibus $+\sqrt{y}$ fit maximum vel minimum. Potestas autem quaecunque $y^{\frac{m}{n}}$, iisdem casibus fiet maximum vel minimum, siquidem n fuerit numerus impar; at si n fuerit numerus par, ii tantum casus valent, quibus y induit valorem affirmatiuum: hisque casibus ob ancipitem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

269. Quoniam aequatio differentialis, quae ex poteſtate functionis y^m naſcitur, eſt $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$, cuius radices ſimul caſus, quibus poteſtas ſurda $y^{\frac{m}{n}}$ ſit maximum vel minimum, indicant, ad hoc indagandum duplex habetur aequatio, altera $y^{m-1} = 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, atque tum ſolum maxima & minima exhibet, ſi $m - 1$ fuerit numerus impar, ſeu ſi m fuerit numerus par, ob rationes §. 257. allegatas. Quare cum n ſit numerus impar, ſi m fuerit numerus par, ſi numeros pares per 2μ & impares per $2\nu - 1$ indicemus, functio $y^{2\mu:(2\nu-1)}$ euadet maxima vel minima tribuendis ipſi x valoribus, quos tam ex hac aequatione $y = 0$ quam ex hac $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiſcitur. Sin autem m ſit numerus impar, functio $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$ vel $y^{(2\mu-1):2\nu}$ tum ſolum ſit maxima vel minima, cum loco x ſubſtituitur valor ex hac aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac poſteriori quidem caſu $y^{(2\mu-1):2\nu}$ maxima & minima tantum proueniunt, ſi y ab inuentis ex aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valoribus, affirmatiuos recipiat valores.

270. Sic iſta formula $x^{\frac{2}{3}}$ ſit minimum, ponendo $x = 0$, propterea quod hoc caſu x^2 ſit minimum. Niſi au-

autem formulam $x^{\frac{2}{3}}$ ad formam x^2 reducamus, methodus ante tradita hoc minimum indicaret; propterea quod casu $x = 0$, termini seriei $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} +$ &c. vnde iudicium peti debet, praeter primum omnes fiunt infiniti. Facto enim $y = x^{\frac{2}{3}}$ erit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}}; \quad \text{\&c.}$$

Hinc neque aequatio $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$ ostendit valorem $x = 0$, neque termini sequentes rationem maximi minimiue indicant. Cum igitur assumsimus seriem $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} +$ &c. fieri conuergentem, si ω statuatur quantitas valde parua; ii casus vtique methodum generalem effugiunt, quibus haec series fit divergens, quod euenit exemplo hic allato $y = x^{\frac{2}{3}}$, si ponatur $x = 0$. Quamobrem his casibus ea reductione, qua ante vsi sumus, erit opus, quo expressio proposita ad aliam formam reuocetur, quae huic incommodo non sit subiecta. Hoc autem tantum paucissimis casibus vsu venit, qui in formula $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic si requirantur maxima minimaue formulae $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}} z$, existente z functione quacun-

cunque ipsius x, inuestigetur forma haec $y^{2\mu} z^{2\nu-1}$, quippe quae iisdem casibus fit maxima vel minima, quibus ipsa proposita.

271. Hoc casu excepto, qui iam facile expeditur, functiones, quae continent quantitates irrationales, eodem modo quo rationales tractari, earumque maxima & minima determinari possunt, id quod sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Proposita sit formula $V(aa+xx)-x$, *quae quibus casibus fiat maxima vel minima, quaeritur.*

Posito $y=V(aa+xx)-x$, erit $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{V(aa+xx)}-1$, & $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{aa}{(aa+xx)^{3:2}}$. Facto ergo $\frac{dy}{dx}=0$, erit: $x=V(aa+xx)$, ideoque $x=\infty$, ac fit $\frac{ddy}{dx^2}=0$. Simili vero modo fiunt sequentes termini $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; &c. omnes $=0$; ex quo iudicium incertum relinquitur, vtrum sit maximum an minimum? ratio est quod reuera tam fiat $x=-\infty$, quam $x=+\infty$. Interim ponendo $x=+\infty$, ob $V(aa+xx)=x+\frac{aa}{2x}$, fit $y=0$, qui valor omnium est minimus.

EXEMPLUM II.

Quaerantur casus, quibus haec forma $\sqrt{(aa+2bx+mxx)}-nx$ fit maximum vel minimum.

Posito $y=\sqrt{(aa+2bx+mxx)}-nx$, erit: $\frac{dy}{dx}=\frac{b+mx}{\sqrt{(aa+2bx+mxx)}}-n$, quo facto $=0$, erit: $bb+2mbx+mmxx=nnaa+2nnbx+mnnxx$, seu $xx=\frac{2bx(nn-m)+nnaa-bb}{mm-mnn}$, ideoque

$$x=\frac{(nn-m)b\pm\sqrt{[mnn(m-nn)aa-nn(m-nn)bb]}}{m(m-nn)},$$

siue $x=-\frac{b}{m}\pm\frac{n}{m}\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$: vnde fit $\sqrt{(aa+2bx+mxx)}=\frac{b+mx}{n}=\pm\sqrt{\frac{maa-bb}{m-nn}}$. Cum igitur sit $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{maa-bb}{(aa+2bx+mxx)^{\frac{3}{2}}}$, erit:

$$\frac{ddy}{dx^2}=\frac{maa-bb}{\pm\left(\frac{maa-bb}{m-nn}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pm(m-nn)\sqrt{(m-nn)}}{\sqrt{(maa-bb)}}.$$

Nisi ergo fuerit $\frac{m-nn}{maa-bb}$ quantitas affirmatiua, maximum minimumue plane non datur. Sin autem sit quantitas affirmatiua, signum superius dabit minimum si $m>nn$, maximum vero si $m<nn$: contrarium euenit, si signum inferius valeat. Si ergo sit $m=2$, $n=1$, & $b=0$, formula $\sqrt{(aa}$

$\sqrt{(aa+2xx)}-x$ fit minimum ponendo $x=+\frac{1}{2}\sqrt{2aa}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, at maximum ponendo $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$. Erit ergo minimum $=a\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, & maximum $=a\sqrt{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

EXEMPLUM III.

Quaerantur casus, quibus haec expressio

$$\sqrt[4]{(1+mx^4)}+\sqrt[4]{(1-nx^4)}$$

fiat maximum vel minimum.

Cum sit $\frac{dy}{dx}=\frac{mx^3}{(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}}-\frac{nx^3}{(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}}$, fiet $mx^3(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}=nx^3(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $m^4(1-nx^4)^3=n^4(1+mx^4)^3$, seu $n^4-m^4+3mn(n^3+m^3)x^4+3m^2n^2(n^2-m^2)x^8+m^3n^3(n+m)x^{12}=0$. Nisi ergo haec aequatio radicem positiuam habeat pro x^4, maximum minimumue prorsus non datur. Quia haec aequatio generaliter commode resolui nequit, fiet enim $x^4=\frac{m^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})}$ seu $x^4=\frac{m-\sqrt[3]{m^2n}+\sqrt[3]{mn^2}-n}{mn}$ ponamus pro casu speciali $m=8n$, eritque $-4095+24.513nx^4-3.63.64n^2x^8+9.512n^3x^{12}=0$ seu $512n^3x^{12}-1344n^2x^8+1368nx^4-455=0$ ponatur $8nx^4=z$, erit $z^3-21z^2+171z-455=0$ quae diuisorem habet $z-5$, alterque factor erit:

$zz - 16z + 91 = 0$ radices continens imaginarias. Erit ergo tantum $z = 8nx^4 = 5$, ideoque $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$ qui valor reddet expressionem $\sqrt[4]{(1+8nx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$ maximum vel minimum. Quorum vtrum eueniat? quaeratur $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1+mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1-nx^4)^{\frac{7}{4}}}$. At ob $m = 8n$, posito $x^4 = \frac{5}{8n}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{(3:8)^{\frac{7}{4}}}\right) xx = -\frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}}$ ideoque negatiuum, ergo fiet $\sqrt[4]{(1+8nx^4)} + \sqrt[4]{(1-nx^4)}$ maximum posito $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$. Erit vero hoc maximum $= \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Si loco nx^4 ponamus u, patet hanc expressionem $\sqrt[4]{(1+8u)} + \sqrt[4]{(1-u)}$ fieri maximam, posito $u = \frac{5}{8}$, huncque valorem maximum fore $= \frac{3\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627$. Quicunque ergo valor praeter $\frac{5}{8}$ pro u scribatur, expressio minorem accipiet valorem.

272. Simili modo maxima ac minima determinabuntur, si quantitates quoque transcendentes in expressione proposita insint. Nisi enim functio proposita fuerit

rit multiformis, atque aliquot eius significatus simul considerari debeant, radices aequationis differentialis ostendent maxima vel minima, nisi affuerint radices aequales, quarum numerus sit par. Hanc ergo inuestigationem in aliquot exemplis declarabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire numerum, qui ad suum logarithmum minimam teneat rationem.

Dari huiusmodi rationem minimam $\frac{x}{lx}$ inde patet, quod haec ratio tam posito $x = 1$, quam $x = \infty$ fiat infinita. Vicissim ergo habebit fractio $\frac{lx}{x}$ alicubi maximum valorem, eodem scilicet casu, quo $\frac{x}{lx}$ fit minimum. Ad hunc casum indagandum ponatur $y = \frac{lx}{x}$, fietque $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Quo nihilo aequali posito erit $lx = 1$, & quia hic logarithmum hyperbolicum assumsimus, si e ponatur numerus cuius logarithmus hyperbolicus sit $= 1$, erit $x = e$. Cum igitur omnes logarithmi ad hyperbolicos in data sint ratione, erit in quocunque logarithmorum canone $\frac{e}{le}$ minimum, seu $\frac{le}{e}$ maximum. Quoniam in logarithmis tabularibus est $le = 0,4342944819$, fractio $\frac{lx}{x}$ perpetuo erit minor

quam $\frac{4342944819}{27182818284}$, seu proxime quam $\frac{47}{305}$: neque vllus datur numerus, qui ad suum logarithmum minorem teneat rationem quam 305 ad 47. Esse autem hoc casu $\frac{lx}{x}$ maximum inde patet, quod ob $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{xx}$, fiat $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1-lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, propter $1-lx = 0$, ideoque negatiuum.

EXEMPLUM II.

Inuenire numerum x, *vt haec potestas* $x^{1:x}$ *fiat maximum.*

Dari huius formulae valorem maximum inde patet, quod numeris loco x substituendis sit

$$1^{1:1} = 1,000000$$
$$2^{1:2} = 1,414213$$
$$3^{1:3} = 1,442250$$
$$4^{1:4} = 1,414213$$

Ponatur ergo $x^{1:x} = y$, eritque $\frac{dy}{dx} = x^{1:x}\left(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}\right)$. Quo valore nihilo aequali posito, erit $lx = 1$ & $x = e$, existente $e = 2,718281828$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = (1-lx)\frac{x^{1:x}}{xx}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{x^{1:x}}{x^3} + (1-lx)\,d.\frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$ ob $1-lx = 0$. Quare cum sit $\frac{ddy}{dx^2}$ quantitas negatiua, fiet $x^{1:x}$ maximum

casu

casu $x = e$. Cum autem sit $e = 2,718281828$, reperitur fore $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667861009764$, qui valor obtinetur facile ex serie $e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} +$ &c.

Hoc exemplum quoque ex praecedenti resoluitur: si enim sit $x^{1:x}$ maximum, quoque eius logarithmus, qui est $\frac{lx}{x}$, debebit esse maximum; quod quo fiat, debet esse $x = e$, vti inuenimus.

EXEMPLUM III.

Inuenire arcum x, *vt sit eius sinus maximus vel minimus.*

Posito $\sin x = y$ erit $\frac{dy}{dx} = \cos x$, ideoque $\cos x = 0$, vnde prodeunt sequentes valores pro x: $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$ &c. Fit autem $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin x$. Cum igitur hi valores pro x substituti dent pro $\sin x$ vel $+1$ vel -1, illi erunt maximi, hi vero minimi, vti constat.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire arcum x, *vt rectangulum* x . *sin* x *fiat maximum.*

Dari maximum inde patet, quod posito vel $x = 0$ vel $x = 180°$ vtroque casu rectangulum propositum euanescat. Sit igitur $y = x \sin x$; erit $\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$,

ideo-

ideoque $\operatorname{tg} x = -x$. Sit $x = 90^\circ + u$, erit $\operatorname{tg} x = -\cot u$, ergo $\cot u = 90 + u$. Ad quam aequationem modo supra tradito resoluendam ponatur $z = 90 + u - \cot u$, sitque f valor arcus u quaesitus. Cum sit $dz = du + \frac{du}{\sin u^2}$, erit $p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin u^2}{1 + \sin u^2}$; $dp = \frac{2\, du \sin u \cos u}{(1 + \sin u)^2}$; ideoque $\frac{dp}{dz} = q = \frac{2 \sin u^3 \cos u}{(1 + \sin u^2)^3}$; $dq = \frac{6\, du \sin u^2 \cos u^2 - 2\, du \sin u^4}{(1 + \sin u^2)^3}$ $- \frac{12\, du \sin u^4 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^4}$. Ergo $\frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin u^4 \cos u^2 - 2 \sin u^6}{(1 + \sin u^2)^4}$ $- \frac{12 \sin u^6 \cos u^2}{(1 + \sin u^2)^5} = \frac{6 \sin u^4 - 14 \sin u^6 + 4 \sin u^8}{(1 + \sin u^2)^5}$. Ex quibus erit $f = u - pz + \frac{1}{2} qzz - \frac{1}{6} rz^3 + \&c.$ Ponatur, postquam aliquot tentaminibus proximus ipsius f valor est detectus, $u = 26^\circ, 15'$, erit $90 + u = 116^\circ, 15'$, & arcus cotangenti u aequalis ita definiatur:

A	$l \cot u =$	$10,3070250$
subtrahatur		$4,6855749$
		$5,6214501$
Ergo	$\cot u =$	$418263, 7''$
seu	$\cot u =$	$116^\circ, 11', 3\frac{7}{10}''$
vnde	$z =$	$3', 56\frac{3}{10}'' = 236, 3''$.

Iam

Iam ad valorem termini pz inueniendum, iste instituatur calculus:

$l \sin u =$	9,6457058
$l \sin u^2 =$	9,2914116
$1 + \sin u^2 =$	1,19561
$l(1 + \sin u^2) =$	0,0775895
$lp =$	9,2138221
$lz =$	2,3734637
$lpz =$	1,5872858
Ergo $pz =$	38,6621 secundis
seu $pz =$	$38''$, $39'''$, $43''''$
ab $u =$	$26°$, $15'$
fiet $f =$	$26°$, $14'$, $21''$, $20'''$, $17''''$

& arcus quaesitus $x = 116$, 14, 21, 20, 17

Tertius vero terminus $\frac{1}{2}qzz = \frac{\sin u^3 \cos u}{(1+\sin u^2)^3}zz$ insuper addi debet.

Cuius valor vt inueniatur, vnum z in partibus radii exprimi debet, hoc modo:

$$l z'' = 2,3734637$$

add. $4,6855749$

$$7,0590386$$

add. $l \frac{\sin u^2}{1 + \sin u^2} z = 1,5872858$

$$= 8,6463244$$

add. $l \sin u = 9,6457058$

$$l \cos u = 9,9527308$$

$$8,2447600$$

fubtr. $l(1 + \sin u^2)^2 = 0,1551790$

$$l \tfrac{1}{2} q z z = 8,0895810$$

Ergo $\tfrac{1}{2} q z z = 0,012291$

feu $\tfrac{1}{2} q z z = 44'''', 15'''''$.

Vnde & hoc termino adhibito fiet arcus quaefitus

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 21''', 0''''$$

maioribus autem logarithmis adhibitis reperitur

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 35'''', 47'''''.$$

CAPUT

CAPUT XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONUM MULTIFORMIUM PLURESQUE VARIABILES COMPLECTENTIUM.

273.

Si y fuerit functio multiformis ipſius x, ita vt pro vnoquoque valore ipſius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x plures illi ipſius y valores ita inter ſe connectentur, vt plures ſeries valorum ſucceſſiuorum repraeſentent. Si enim y tanquam applicatam lineae curuae conſideremus, x exiſtente abſciſſa, quot y habuerit valores reales diuerſos, totidem diuerſi eiusdem curuae rami eidem abſciſſae x reſpondebunt: atque hinc illi ipſius y valores ſucceſſiui, qui eundem ramum conſtituunt, cohaerere cenſendi ſunt; valores autem ad diuerſos ramos relati erunt inter ſe disiuncti. Tot igitur ſeries valorum cohaerentium ipſius y habebimus, quot diuerſos valores reales pro quouis ipſius x valore receperit; atque in qualibet ſerie valores ipſius y, dum x creſcens aſſumitur, vel creſcent vel decreſcent, vel poſtquam creuerint iterum decreſcent, vel vice verſa. Ex quo perſpicuum eſt, in unaquaque valorum cohaerentium ſerie aeque dari maxima minimaue, atque in functionibus uniformibus.

 274.

274. Ad haec maxima minimaue determinanda eadem quoque methodus valebit, quam capite praecedente pro functionibus uniformibus tradidimus. Cum enim, si variabilis x incremento ω augeatur, functio y perpetuo recipiat hanc formam $y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6 dx^3} + \&c.$ necesse est vt casu maximi minimiue terminus $\frac{\omega dy}{dx}$ euanescat, fiatque $\frac{dy}{dx} = 0$. Radices ergo huius aequationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipsius x valores indicabunt, quibus in singulis valorum ipsius y cohaerentium seriebus, maxima minimaue respondeant. Neque vero ambiguum erit, in quanam valorum cohaerentium serie detur maximum minimumue. Cum enim in aequatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambae insint variabiles x & y, valores ipsius x definiri nequeunt, nisi ope aequationis, qua relatio functionis y ab x continetur, variabilis y eliminetur; antequam autem hoc fit, peruenitur ad aequationem, qua valor ipsius y per functionem rationalem seu vniformem ipsius x exprimitur. Hinc inuentis valoribus ipsius x, cuique respondens valor ipsius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in serie valorum successiuorum cohaerentium, ad quam pertinet.

275. Iudicium autem, vtrum isti valores ipsius y sint maximi an minimi? instituetur eodem modo, quem ante

ante indicauimus. Scilicet quaeratur valor ipsius $\frac{ddy}{dx^2}$ finitis terminis expressus, in eoque loco x substituatur vnusquisque ipsius x valor inuentus successive, simul autem pro y ponatur valor, qui ipsi pro quolibet ipsius x valore conuenit; quo facto dispiciatur, vtrum expressio $\frac{ddy}{dx^2}$ adeptura sit valorem affirmatiuum an negatiuum? priorique casu minimum, posteriori vero maximum indicabitur. Quodsi vero & $\frac{ddy}{dx^2}$ euanescat, tum procedendum erit ad formulam $\frac{d^3y}{dx^3}$, quae si eodem casu non euanescat, neque maximum habebitur neque minimum: sin autem quoque $\frac{d^3y}{dx^3}$ euanescat, iudicium formari oportebit ex formula $\frac{d^4y}{dx^4}$ eodem modo, quo ratione formulae $\frac{ddy}{dx^2}$ praecipimus. Atque si quoque $\frac{d^4y}{dx^4}$ quopiam casu euanescat, ad differentiale quintum ipsius y erit progrediendum: perpetuo autem quousque progredi necesse fuerit, iudicia ex differentialibus ordinum imparium similia sunt illi, quod de formula $\frac{d^3y}{dx^3}$ dedimus. His scilicet casibus in formulis $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. eousque erit pergendum, quoad

 per-

perueniatur ad talem, quae propofito cafu non euanefcat; quae fi fuerit differentialis ordinis imparis, neque maximum neque minimum indicabitur, fin autem fuerit ordinis paris, eius valor affirmatiuus minimum, negatiuus vero maximum innuet.

276. Ponamus functionem y determinari ex x per aequationem quamcunque: quae aequatio fi differentietur, induet huiusmodi formam $P\,dx + Q\,dy = 0$. Facto ergo $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $\frac{P}{Q} = 0$ ideoque vel $P = 0$ vel $Q = \infty$. Pofterior quidem aequatio, fi relatio inter x & y exprimatur per aequationem rationalem integram, locum habere nequit; quia vel x vel y vel vtramque fieri oporteret infinitam. Quare iudicium relinquetur aequationi $P = 0$, cuius radices, feu valores ipfius x, quos adipifcitur, poftquam ope aequationis propofitae variabilis y penitus fuerit eliminata, indicabunt cafus, quibus valores ipfius y fiunt maximi vel minimi. Ad iudicium vero, vtrum prodeat maximum an minimum? abfoluendum, examinetur formula $\frac{ddy}{dx^2}$. Aequatio vero differentialis $P\,dx + Q\,dy = 0$ denuo differentiata, fi ponamus $dP = R\,dx + S\,dy$ & $dQ = T\,dx + V\,dy$, dabit (pofito dx conftante):

$$R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dx\,dy + V\,dy^2 + Q\,ddy = 0.$$

Cum autem iam fit $\frac{dy}{dx} = 0$, aequatione per dx^2 divifa fiet $R + \frac{Q\,ddy}{dx^2} = 0$, ideoque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Hinc in

in aequatione differentiali $Pdx + Qdy = 0$, differentietur tantum quantitas P, ponendo y constans, prodibitque Rdx, tum indagetur, valor fractionis $\frac{R}{Q}$, qui si fuerit affirmatiuus, maximum, sin negatiuus minimum indicabit.

277. Sit y functio biformis ipsius x, quae determinetur per hanc aequationem $yy + py + q = 0$, denotantibus p & q functiones quascunque ipsius x vniformes. Erit ergo differentiando $2ydy + pdy + ydp + dq = 0$, ideoque $Pdx = ydp + dq$. Posito igitur $P = 0$ erit $ydp + dq = 0$ prodibitque $y = -\frac{dq}{dp}$, sicque y per functionem ipsius x vniformem exprimitur, ita vt, quicunque valor pro x fuerit inuentus, ex eo & y valorem determinatum vnicum acquirat. Eliminatio vero nunc ipsius y erit facilis; nam si in aequatione proposita $yy + py + q = 0$ loco y valor $-\frac{dq}{dp}$ substituatur, habebitur $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, quae aequatio diuisa per dx^2 & resoluta praebebit valores ipsius x omnes, quibus maxima vel minima respondent: quod clarius fiet sequentibus exemplis.

EXEMPLUM I.

Proposita aequatione $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$ *definire maxima vel minima functionis* y.

Differentiata aequatione habebimus:

$$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$$

vnde

vnde fit $P = my + b + 2nx$ & $Q = 2y + mx$. Posito ergo $P = 0$ fiet $y = -\frac{b - 2nx}{m}$; qui valor in ipsa aequatione substitutus dat:

$$\begin{aligned}\frac{4nn}{mm}xx &+ \frac{4nb}{mm}x + \frac{bb}{mm}\\ -2nxx &- bx + aa = 0\\ +nxx &+ bx\end{aligned}$$

seu $$xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn};$$ vnde fit

$$x = \frac{2nb \pm V[mmnbb + mmn(mm-4n)aa]}{mmn - 4nn}$$

seu $$x = \frac{2nb \pm mV[nbb + n(mm-4n)aa]}{n(mm - 4n)}$$

& $$y = \frac{-mb \mp 2V[nbb + n(mm-4n)aa]}{mm - 4n}.$$

Tum posito solo x variabili fit $dP = 2ndx$, ideoque $R = 2n$. At est $Q = 2y + mx = \pm\frac{V[nbb + n(mm-4n)aa]}{n}$, vnde $\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2nn}{V[nbb + n(mm-4n)aa]}$, cuius numerator $2nn$ cum sit perpetuo affirmatiuus, si signum superius valeat, prodibit pro y valor maximus, sin inferius prodibit minimus. Vbi sequentia annotari debent.

I. Si fuerit $m = 0$, ex aequatione $P = 0$ statim sequitur $x = -\frac{b}{2n}$, vt nulla eliminatione opus sit. Huicque valori

lori geminus ipſius y reſpondet ob $y = \pm \frac{1}{2n} \surd (nbb - 4nnaa)$ quorum alter affirmatiuus eſt maximus, alter negatiuus minimus.

II. Si ſit $n = 0$, fit $y = -\frac{b}{m}$, & x in infinitum excreſcit, atque y per ſpatium infinitum eundem valorem retinet, ita vt neque maximus ſit neque minimus.

III. Si ſit $mm = 4n$, erit $4nbx + bb + mmaa = 0$ ſeu $x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}$; fietque $y = -\frac{b - 2nx}{m} =$ $-\frac{2b - mmx}{m} = -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$. Huic ergo valori ipſius $x = -\frac{mmaa - bb}{mmb}$ alter ipſius y valor, qui reſpondet $\frac{mmaa - bb}{mb}$, erit maximus vel minimus. Quia autem, vt iſte ipſius y valor prodeat, in expreſſione $y = -\frac{mb \mp 2\surd[nbb + n(mm - 4n)aa]}{mm - 4n}$ ſignum inferius valere debet, erit valor ipſius y minimus.

EXEMPLUM II.

Propoſita aequatione $yy - xxy + x - x^3 = 0$ *definire valores ipſius* y *maximos vel minimos.*

Differentiata aequatione prodit:

$$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3xxdx = 0.$$

 Fit-

Fitque $P = 1 - 3xx - 2xy$ & $Q = 2y - xx$. Quare posito $P = 0$, erit $y = \frac{1-3xx}{2x}$; ideoque hoc valore substituto:

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

seu $1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0$. Cuius vna radix est $x = -1$, cui respondet $y = 1$. At posito y constante fit $R = -6x - 2y$, ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$; quod casu $x = -1$ & $y = 1$ abit in -4, ita vt valor ipsius $y = 1$ sit maximus. Ipsi $x = -1$ autem geminus valor ipsius y respondet ex aequatione $yy - y = 0$: alter ergo est $y = 0$, qui neque maximus est neque minimus. Quodsi aequatio illa quinti gradus per $x + 1$ diuidatur, prodit aequatio, cuius radices simpliciter exhiberi nequeunt.

EXEMPLUM III.

Sit proposita haec aequatio: $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ *ex qua maximi minimiue valores ipsius* y *requiruntur.*

Per differentiationem ergo prodibit haec aequatio:

$$2ydy + 2xxdy + 4xydx + 4dx = 0$$

Factoque $\frac{dy}{dx} = 0$ erit $xy + 1 = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{x}$, qui valor substitutus in ipsa aequatione proposita oritur,

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

cuius

cuius radices ſunt $x = 1$; $x = 1$; & $x = -\frac{1}{2}$. Quia nunc eſt $\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy-4}{2y+2xx} = -\frac{2xy-2}{y+xx}$, erit differentiando $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y+xx}$, poſito y conſtanti ob $dy = 0$ & facto $xy+1 = 0$. Quare iſti valores ita ſe habebunt

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$
1	-1	∞
1	-1	∞
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$ pro maximo.

Quoniam pro radicibus aequalibus fit $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$, vtrum hoc caſu maximum an minimum prodeat? non determinatur. Quia autem ſimul fit $y+xx = 0$; nequidem hoc caſu erit $\frac{dy}{dx} = 0$; ob $P = 0$ & $Q = 0$ in fractione $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$; quare cum primaria proprietas deſit, neque maximum nec minimum habet locum. Indicatur autem hoc caſu $x = 1$, ambos ipſius y valores inter ſe fieri aequales. Quam indolem infra fuſius ſumus expoſituri, cum ad vſum calculi differentialis in doctrina de lineis curuis perueniemus. Etiamſi enim haec materia & huc pertineat; tamen ne eam bis attingere opus ſit, eam totam ſequenti tractationi reſeruamus.

278. Datur vero insuper in functionibus multiformibus alia species maximorum ac minimorum, quae methodo hactenus tradita non inuenitur, cuius natura ex functionibus biformibus facillime explicari potest. Sit enim y functio quaecunque biformis ipsius x, ita vt, quicunque valor ipsi x tribuatur, pro y oriantur bini valores vel ambo reales vel ambo imaginarii. Ponamus hos ipsius y valores fieri imaginarios, si ponatur $x > f$, reales autem esse, si statuatur $x < f$; atque posito $x = f$ ambo ipsius y valores in vnum coalescent, qui sit $y = g$. Cum igitur si sumatur $x > f$; functio y nullum habeat valorem realem: si eveniat, vt posito $x < f$ ambo ipsius y valores fiant vel maiores quam g, vel minores quam g: priori casu valor $y = g$ erit minimus, posteriori maximus; quoniam illo casu minor est, quam ambo praecedentes, hoc vero maior. Neque hoc maximum minimumue methodo hactenus tradita reperietur, propterea quod hic non fit $\frac{dy}{dx} = 0$. Sunt autem quoque haec maxima vel minima generis diuersi, cum talia non sint ratione valorum antecedentium & consequentium in serie cohaerentium; sed ratione binorum valorum disiunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum.

279. Euenit hoc si aequatio proposita fuerit huiusmodi $y = p \pm (f - x) \sqrt{(f - x) q}$, existentibus p & q functionibus ipsius x per $f - x$ non diuisibilibus; obtineatque q valorem affirmatiuum, si ponatur vel $x = f$ vel ali-

aliquanto maius minusue. Fiat $p = g$ posito $x = f$: & manifestum est, casu $x = f$ ambos ipsius y valores in vnum $y = g$ coalescere; posito autem $x > f$ ambo valores ipsius y fient imaginarii. Si igitur ponamus x aliquanto minus quam f, puta $x = f - \omega$, functio p abibit in $g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \&c.$ & q in $q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c.$ vnde hoc casu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \&c.$ $\pm \omega \sqrt{\omega}\left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \&c.\right)$. Ponamus ω minimum, vt prae ω altiores eius potestates euanescant, eritque $y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega \sqrt{\omega q}$; qui valores ambo ipsius y minores erunt quam g, si $\frac{dp}{dx}$ fuerit affirmatiuum, maiores autem, si negatiuum. Vnde valor duplex ipsius $y = g$ illo casu erit maximus, hoc vero minimus.

280. Haec igitur maxima atque minima inde ortum suum habent, quod primo posito $x = f$ ambo ipsius y valores fiant aequales: posito autem $x > f$ imaginarii, at posito $x < f$ reales. Deinde quod posito $x = f - \omega$ alterum membrum irrationale praebeat altiores potestates ipsius ω, quam membrum rationale. Hoc ergo euenit quoque si fuerit $y = p \pm (f-x)^n \sqrt{(f-x)}q$, dummodo sit n numerus integer > 0. Cum autem non solum radix quadrata sed etiam quaecunque alia radix potestatis paris eandem ambiguitatem signorum introducat; idem eueniet, si fuerit

 $y =$

$y = p \pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$, dummodo sit $2n+1 > 2m$, erit ergo $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} q^{2m}$ seu $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} Q$. Quoties ergo functio y per huiusmodi aequationem exprimitur, ita vt sit $2n+1 > 2m$, toties posito $x = f$, valor ipsius y fiet maximus vel minimus: prius quidem si fuerit $\frac{dp}{dx}$ quantitas affirmatiua, posterius vero si sit $\frac{dp}{dx}$ quantitas negatiua posito $x = f$. Sin autem fiat hoc casu $\frac{dp}{dx} = 0$, tum erit $y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2 dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} q$. Nisi ergo sit $\frac{2n+1}{2m} > 2$, neque maximum neque minimum locum habebit; at si $\frac{2n+1}{2m} > 2$, tum $y = g$ erit maximum, si $\frac{ddp}{dx^2}$ habuerit valorem negatiuum, minimum vero, si affirmatiuum: sicque vlterius si quoque $\frac{ddp}{dx^2}$ euanescat, iudicium erit instituendum.

281. Si igitur y fuerit huiusmodi functio ipsius x, fieri potest, vt praeter maxima & minima, quae prior methodus exhibet, etiam maxima minimaue huius alterius speciei adsint, quae modo hic exposito explorari poterunt. Id quod sequentibus exemplis declarabimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Determinare maxima ac minima functionis y, quae definitur hac aequatione:

$$yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0.$$

Ad maxima minimaue primae speciei inuestiganda differentietur aequatio, eritque

$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0$, positoque $\frac{dy}{dx} = 0$, erit $y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx$, qui valor in prima aequatione substitutus dat: $9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0$, quae resoluitur in $9xx - 14x + 5 = 0$ & $xx - 2x + 1 = 0$. Posterior bis dat $x = 1$, fitque $y = 1$, vnde hoc casu in fractione $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3 - 4x + 3xx}{2y - 2x}$ denominator quoque euanescit, sicque maximum minimumue primi generis non datur: prior vero aequatio $9xx - 14x + 5 = 0$ dabit $x = 1$ & $x = \frac{5}{9}$, quorum valorum ille eodem incommodo laborat, quo praecedentes. Posito autem $x = \frac{5}{9}$, fit $y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}$. Et cum sit $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$, fiet $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{+4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$ ob $dy = 0$ & numeratorem $= 0$. Erit ergo $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}$, vnde hic valor

$x =$

$x = \frac{5}{9}$ dat minimum primi generis. Deinde cum sit $(y-x)^2 = (1-x)^3$, erit $y = x \pm (1-x)\sqrt{(1-x)}$; ideoque posito $x = 1$ prodit maximum secundae speciei: facto enim $x = 1-\omega$, erit $y = 1-\omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, quorum vterque minor est quam vnitas, siquidem ω sumatur minimum.

EXEMPLUM II.

Inuenire maxima ac minima functionis:

$$y = 2x - xx \pm (1-x)^2\sqrt{(1-x)}.$$

Pro primi generis maximis & minimis differentietur aequatio; eritque

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1-x)\sqrt{(1-x)}$$

qui valor positus $= 0$ prodit primo $x = 1$, & cum sit $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1-x)}$, erit y hoc casu maximum primi generis, fitque $y = 1$. Aequatione vero $\frac{dy}{dx} = 0$ per $1-x$ diuisa erit $4 \mp 5\sqrt{(1-x)} = 0$ seu $16 = 25 - 25x$, vnde fit $x = \frac{9}{25}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3$. Quare si signum superius valet, erit $y = \frac{2869}{3125}$ minimum; sin autem signum inferius valeat, erit $y = \frac{821}{3125}$, quod maximum videatur: at vero tantum signum superius locum habere potest, quoniam $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nequit esse $= 0$, nisi sit

$\sqrt{(1}$

$\sqrt{(1-x)} = +\frac{4}{5}$. Primi ergo generis inuenimus maximum casu $x = 1$ & $y = 1$, atque minimum casu $x = \frac{9}{25}$ & $y = \frac{2869}{3125}$. Ex genere vero altero maximum quoque prodit, si $x = 1$, quo casu fit $y = 1$. Nam posito $x = 1 - \omega$, erit $y = 1 - \omega\omega \mp \omega^2 \sqrt{\omega}$ vtroque casu < 1. Hic itaque, si $x = 1$, maxima duo primae & alterius speciei coalescunt, maximumque quasi mixtum constituunt.

282. Ex his exemplis non solum natura huius alterius speciei maximorum & minimorum elucet; sed etiam pro lubitu istiusmodi functiones formari possunt, quae maxima vel minima secundae speciei admittant. Quemadmodum autem, si proposita fuerit functio quaecunque, explorari possit, vtrum eiusmodi maximis minimisue sit praedita nec ne? id in sequenti sectione ostendemus: propterea quod natura linearum curuarum hac inuestigatione maxime illustratur. Ceterum vero facile intelligitur, si fuerit y eiusmodi functio ipsius x, quae maximum minimumue secundae speciei recipiat, tum quoque vicissim x eiusmodi fore functionem ipsius y. Nam quia ex hac aequatione $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, facto $x = 1$, obtinet y valorem maximum secundae speciei; si variabiles y & x permutentur, haec aequatio $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ exhibet pro y quoque eiusmodi functionem ipsius x, quae habeat maximum secundae speciei. Facto enim $x = 1$, fiet $(1 - y)^2 = (1 - y)^3$,

hincque erit bis $y = 1$ & semel $y = 0$. Sin autem ponatur $x = 1 + \omega$, erit $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^3$; vnde si statuamus $y = 1 + \phi$ erit $(\omega - \phi)^2 = (-\phi)^3 = -\phi^3$ ideoque ϕ debet esse negatiuum. Sit ergo $y = 1 - \phi$ erit $(\omega + \phi)^2 = \phi^3$, atque cum sumto ϕ minimo, ϕ^3 prae ϕ^2 euanescat, debebit necessario ω esse negatiuum: hinc valori $x = 1 + \omega$ nulli valores reales ipsius y respondent. At posito $x = 1 - \omega$, & $y = 1 - \phi$. ob $(\phi - \omega)^2 = \phi^3$, erit $\phi = \omega \pm \omega V\omega$, ideoque $y = 1 - \omega \mp \omega V\omega$, vnde vterque valor ipsius y respondens ipsi $x = 1 - \omega$ minor est valore $y = 1$, qui respondet valori $x = 1$; eritque consequenter iste ipsius y valor maximus.

283. Hactenus tantum functiones biformes sumus contemplati, quarum maxima vel minima, quia ambo valores facile per resolutionem aequationis quadraticae exprimi possunt, ad examen reuocari possunt. Sin autem functio y per aequationem altiorem exprimatur, methodus ante tradita, qua maxima minimaque primae speciei indagauimus, eodem successu adhiberi poterit. Inuentionem vero maximorum ac minimorum secundae speciei sequenti sectioni reseruamus. Functiones ergo triformes ac multiformes, quemadmodum tractari oporteat, aliquot exemplis ostendamus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Definiatur functio y, cuius maxima vel minima quaeruntur, per hanc aequationem:

$$y^3 + x^3 = 3axy.$$

Differentiata hac aequatione fit $3y^2 dy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, ideoque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$. Maximum ergo vel minimum dabitur, si fuerit $ay = xx$, seu $y = \frac{xx}{a}$, qui valor in aequatione proposita substitutus dat:

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3 \quad \text{seu} \quad x^6 = 2a^3x^3;$$

Erit ergo ter $x = 0$, quo casu quoque fit denominator $yy - ax = 0$, ob $y = \frac{xx}{a} = 0$. Vtrum ergo hoc casu maximum minimumue prodeat? patebit si ipsi x valorem tribuamus minime ab 0 discrepantem. Sit ergo $x = \omega$, & $y = \phi$, ob $\phi^3 + \omega^3 = 3a\omega\phi$, fiet vel $\phi = \alpha\sqrt{\omega}$ vel $\phi = \beta\omega^2$. Priori casu erit $\alpha^3\omega\sqrt{\omega} = 3\alpha a\omega\sqrt{\omega}$, ideoque $\alpha = \sqrt{3a}$. Hinc posito $x = \omega$ erit $y = \pm\sqrt{3a\omega}$. Vnde etiamsi ω negatiue accipi nequeat, tamen binorum ipsius y valorum alter maior erit quam 0, alter minor; hincque $y = 0$ neque maximum erit neque minimum. Sin autem statuatur $\phi = \beta\omega^2$ erit $\omega^3 = 3a\beta\omega^3$, ideoque $\beta = \frac{1}{3a}$ & $\phi = \frac{\omega^2}{3a}$. Ergo hoc casu siue x capiatur $= +\omega$ siue $= -\omega$, valor

 ipsius

ipsius $y = \dot{\Phi}$ nihilo erit maior, ideoque hoc casu $y = 0$ erit minimum. Restat ergo tertius casus ex aequatione $x^3 = 2a^3$ examinandus, qui dat $x = a\sqrt[3]{2}$, & $y = a\sqrt[3]{4}$. Qui vtrum sit maximus an minimus? ex aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$ quaeratur differentiale secundum, quod ob $dy = 0$ & $ay - xx = 0$ erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$, cuius valor praesenti casu est $-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$, qui indicat valorem ipsius y esse maximum.

EXEMPLUM II.

Si functio y *definiatur per hanc aequationem:*
$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y,$$
inuenire eius maximos minimosue valores.

Cum per differentiationem oriatur
$$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx;$$
erit $\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$, ponique oportet: $b^3 = 3axx + 4x^3$. Quaestio ergo huc reducitur, vt functionis vniformis $b^3 - ax^3 - x^4$ maxima ac minima indagentur, quae simul erunt maxima seu minima functionis y. Sit $a = 2$ & $b = 3$ seu proponatur haec aequatio $y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$; erit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$ & $4x^3 + 6xx - 27 = 0$,

quae

quae diuisa per $2x - 3 = 0$ dat $2xx + 6x + 9 = 0$, cuius posterioris radices cum sint imaginariae, erit $x = \frac{3}{2}$ & $y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$, cuius singulae radices erunt vel maximae vel minimae. Cum autem sit $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, erit $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$, qui posito $x = \frac{3}{2}$, si fuerit affirmatiuus, indicabit minimum, contra vero maximum.

EXEMPLUM III.

Si fuerit $y^m + ax^n = by^p x^q$; *definire maxima & minima ipsius* y.

Per differentiationem fit $\frac{dy}{dx} = \frac{qby^p x^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$, quo posito $= 0$, erit primo $x = 0$, si quidem n & q fuerint vnitate maiores; atque simul $y = 0$. Quo casu an detur maximum vel minimum, valores proximi sunt inuestigandi, quoniam quoque denominator fit $= 0$; quae inuestigatio ab exponentibus potissimum pendebit. Praeterea vero aequatio $\frac{dy}{dx} = 0$ dabit $y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$, qui valor in proposita substitutus ponendo $\frac{na}{qb} = g$ dabit $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n$ seu $g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq - np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$,

 vnde

vnde fit $x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-np)}$, ſimulque valor ipſius y innoteſcit. Deinde diſpiciendum eſt, vtrum differentio - differentiale $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$ obtineat valorem affirmatiuum an negatiuum? vt ex priori minimum, ex poſteriori vero maximum pronuncietur.

EXEMPLUM. IV.

Si fuerit $y^4 + x^4 = 4xy - 2$, *maxima & minima functionis* y *aſſignare.*

Differentiatione inſtituta fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^3}{y^3-x}$, hincque oritur $y = x^3$, erit ergo $x^{12} = 3x^4 - 2$ ſeu $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$, quae aequatio reſoluitur in has $x^4 - 1 = 0$ & $x^8 + x^4 - 2 = 0$, poſteriorque in $x^4 - 1 = 0$ & $x^4 + 2 = 0$. Hinc erit bis vel $x = +1$ vel $x = -1$; vtroque vero caſu & denominator fractionis $\frac{dy}{dx}$ euaneſcit. Ad inueſtigandum ergo, vtrum his caſibus maximum minimumue locum habeat? ponamus $x = 1 - \omega$ & $y = 1 - \phi$; erit:

$$\begin{aligned} 1 - 4\phi &+ 1 - 4\omega = 4 - 4\omega - 4\phi - 2. \\ + 6\phi^2 &+ 6\omega^2 \qquad\qquad + 4\omega\phi \\ - 4\phi^3 &- 4\omega^3 \\ + \phi^4 &+ \omega^4 \end{aligned}$$

ideo-

ideoque $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2 - 4\phi^3 - 4\omega^3 + \phi^4 + \omega^4$, & ob ω & ϕ minima $4\omega\phi = 6\phi^2 + 6\omega^2$. Valor ergo ipſius ϕ erit imaginarius, ſiue ω capiatur affirmatiue ſiue negatiue. Seu ſi y & x deſignent coordinatas curuae, ea caſu $x = 1$ & $y = 1$ habebit punctum coniugatum. Neque ergo hic valor pro maximo neque pro minimo haberi poteſt, propterea quod antecedentes & conſequentes, cum quibus comparari deberet, fiunt imaginarii.

284. Si aequatio, qua relatio inter x & y exprimitur, ita fuerit comparata, vt functio ipſius y aequetur functioni ipſius x, puta $Y = X$; ad maxima minimaue inuenienda poni debebit $dX = 0$: fiet ergo y maximum vel minimum iisdem caſibus, quibus X ſit maximum vel minimum. Simili modo ſi x tanquam functio ipſius y conſideretur, fiet x maximum vel minimum ſi $dY = 0$ hoc eſt ſi Y fuerit maximum vel minimum. Neque tamen hinc ſequitur y & x ſimul fieri maxima vel minima. Nam ſi fuerit $2ay - yy = 2bx - xx$, erit y maximum vel minimum, ſi fuerit $x = b$; eritque $y = a \pm V(aa - bb)$. Contra vero x ſit maximum vel minimum, ſi fuerit $y = a$, ſitque $x = b \pm V(bb - aa)$, neque ergo fiet y maximum vel minimum, ſi $x = b \pm V(bb - aa)$, quo tamen caſu x eſt maximum minimumue. Ceterum hoc caſu, ſi y habeat valores maximos vel minimos, x hac indole prorſus carebit: namque y maximum minimumue fieri nequit, niſi ſit $a > b$, quo caſu maximum minimumue ipſius x ſit imaginarium.

285. Tum vero etiam euenire poteſt, vt non omnes radices aequationis $dX = 0$ praebeant maximos minimosue valores pro y; ſi enim illa aequatio duas habuerit radices aequales, exinde neque maximum neque minimum conſequitur; hocque idem euenit, ſi quotcunque radices numero pares fuerint inter ſe aequales. Sic ſi proponatur aequatio $b(y-a)^2 = (x-b)^3 + c^3$; quia ſumtis differentialibus fit $2bdy(y-a) = 3dx(x-b)^2$, functio y neque maxima fiet neque minima poſito $x = b$, propterea quod hic occurrunt duae radices aequales. Sin autem x tanquam functio ipſius y ſpectetur, ea fiet maxima vel minima, ſi ſtatuatur $y = a$; eritque $x = b - c$ minimum. Quia denique in huiusmodi aequationibus $Y = X$ variabiles x & y inter ſe non permiſcentur, ſi ipſi x tribuitur valor, qui ſit radix aequationis $dX = 0$, omnes valores ipſius y, quotcunque fuerint reales, erunt maximi vel minimi; quod non euenit, ſi in aequatione ambae variabiles fuerint permixtae.

286. Quae praeterea ſuperſunt de natura maximorum ac minimorum exponenda, ea in ſequentem ſectionem reſeruamus, quoniam commodius ope figurarum menti repraeſentari atque explicari poſſunt. Pergamus ergo ad functiones, quae ex pluribus variabilibus ſunt compoſitae, atque inueſtigemus valores, quos ſingulis variabilibus tribui oportet, vt ipſa functio vel maximum vel minimum valorem obtineat. Ac primo quidem patet, ſi variabiles non fuerint inter ſe permixtae, ita vt functio propoſita ſit huiusmodi $X + Y$, exiſtente

X

X functione ipsius x; & Y ipsius y tantum, tum functionem propositam X + Y fore maximum, si simul X & Y maximum euadat: minimumque, si simul X & Y fiat minimum. Ad maximum ergo inueniendum inquirantur valores ipsius x, quibus X fiat maximum, similique modo valores ipsius y, quibus Y fit maximum: hique valores pro x & y inuenti efficient functionem X + Y maximam, quod similiter de minimo erit tenendum. Cauendum ergo est, ne duo valores ipsarum x & y diuersae naturae combinentur, quorum ille reddat X maximum, hic vero Y minimum, aut contra. Hoc enim si fieret, functio X + Y neque maximum foret neque minimum. At huiusmodi functio X — Y fiet maxima, si X fuerit maximum simulque Y minimum; contra vero X — Y fiet minimum, si X fuerit minimum & Y maximum. Sin autem vtraque functio X & Y statueretur vel maxima vel minima, earum differentia X — Y neque foret maxima, neque minima; quae omnia sunt ex natura maximorum ac minimorum ante exposita clara & perspicua.

287. Si ergo quaerantur maximi minimiue valores functionis duarum variabilium; quaestio multo magis cautioni obnoxia est, quam si vnica fuerit variabilis. Non solum enim pro vtraque variabili casus, quibus maximum minimumue producitur, diligenter sunt distinguendi; sed etiam ex his bini eiusmodi sunt coniungendi, vt functio proposita fiat maximum vel minimum; id quod ex exemplis clarius patebit.

EXEMPLUM I.

Sit propofita haec duarum variabilium x & y *functio:* $y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ & *quaerantur valores pro* y & x *fubftituendi, vt haec functio maximum vel minimum obtineat valorem.*

Quoniam haec expreffio in duas huiusmodi partes $Y + X$ refoluitur, quarum illa eft functio ipfius y, haec vero ipfius x tantum; cafus quibus vtraque fit maxima vel minima, inueftigentur. Cum igitur fit $Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y$, erit $\frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$ qua expreffione nihilo aequali pofita, fiet per 4 diuifo $y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$, cuius radices funt $y = 2$, & $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Cum ergo fit $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$; cafu $y = 2$, prodibit maximum. Pro reliquis binis radicibus $y = 2 \pm \sqrt{3}$, quae oriuntur ex aequatione $yy - 4y + 1 = 0$ fiet $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, vnde vtraque dat minimum. Erit autem his cafibus vt fequitur.

$y = 2$	$Y = 8$	maximum
$y = 2 - \sqrt{3}$	$Y = -1$	minimum
$y = 2 + \sqrt{3}$	$Y = -1$	minimum

Simili modo cum fit $X = x^3 - 3xx - 3x$, erit $\frac{dX}{dx} = 3xx - 6x - 3$, vnde oritur haec aequatio $xx = 2x + 1$ &

& $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Est vero $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm \sqrt{2}$. Ergo radix $x = 1 + \sqrt{2}$ dat minimum, nempe $X = -5 - 4\sqrt{2}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$ dat maximum, nempe $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Quocirca formula proposita $X + Y = y^4 - 8y^3 - 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$ fiet maxima, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, prodibitque $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Eadem autem formula $X + Y$ fiet minima, si sumatur vel $y = 2 - \sqrt{3}$ vel $y = 2 + \sqrt{3}$ & $x = 1 + \sqrt{2}$, vtroque casu erit $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

EXEMPLUM II.

Si proponatur haec functio duarum variabilium:

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

quae quibus casibus fiat maxima vel minima inuestigetur.

Posito vt in praecedente exemplo habuimus, $Y = y^4 - 8y^2 + 18y^2 - 8y$ & $X = x^3 - 3xx - 3x$; formula proposita erit $Y - X$; ideoque fiet maxima, si Y fuerit maximum & X minimum Cum igitur hos casus iam ante eruerimus, patet $Y - X$ obtinere valorem maximum, si ponatur $y = 2$ & $x = 1 + \sqrt{2}$; fietque $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Minimus vero valor ipsius $Y - X$ euadet, si Y sit minimum, & X maximum, quod euenit ponendo $y = 2 \pm \sqrt{3}$ & $x = 1 - \sqrt{2}$, fiet autem $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Ceterum in vtroque exemplo patet hos valores, quos inuenimus, neque omnium esse maximos neque minimos: nam si vtrinque poneretur verbi gratia $y = 100$ & $x = 0$, sine dubio maior prodiret valor eo,

quem inuenimus: ſimilique modo ponendo $y=0$ & vel $x=-100$ vel $x=+100$ minor prodiret valor, quam ſunt illi, quos pro caſu minimi inuenimus. Probe ergo tenenda eſt idea ſupra expoſita, quam de natura maximorum ac minimorum dedimus. Scilicet eum valorem vocari maximum, qui maior ſit valoribus tam antecedentibus quam conſequentibus contiguis proximis; minimum autem eſſe eum, qui his valoribus tam antecedentibus quam conſequentibus fuerit minor. Sic in hoc exemplo eſt valor ipſius $Y-X$, qui prodit ponendo $y=2$ & $x=1+\sqrt{2}$ maior eſt iis, qui reſultat ſi ponatur $y=2\pm\omega$ & $x=1+\sqrt{2}\pm\phi$ ſumtis pro ω & ϕ quantitatibus ſatis exiguis.

288. His exemplis expeditis facilior erit via ad ſolutionem generalem indagandam. Denotet V functionem quamcunque duarum variabilium x & y, ſintque pro x & y valores inueniendi, qui functioni V inducant maximum vel minimum valorem. Cum igitur ad hoc efficiendum vtrique variabili x & y determinatus valor tribui debeat; ponamus alteram y iam habere eum valorem, qui requiritur ad functionem V vel maximam vel minimam reddendam: hocque poſito tantum opus erit, vt pro altera x idoneus quoque valor inueſtigetur, quod fiet, dum functio V differentiatur ponenda ſola x variabili, differentialeque nihilo aequale ſtatuitur. Simili modo ſi fingamus variabilem x iam eum habere valorem, qui aptus ſit ad functionem V vel maximam vel minimam efficiendam, valor ipſius y reperietur differen-

tian-

tiando V posita sola y variabili, hocque differentiale nihilo aequali ponendo. Hinc si differentiale functionis V fuerit $= P\,dx + Q\,dy$, oportebit esse & $P = 0$ & $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus valores vtriusque variabilis x & y erui poterunt.

289. Quoniam vero hoc pacto sine discrimine reperiuntur valores pro x & y, quibus functio V vel maxima vel minima redditur; casus, quibus vel maximum vel minimum oritur, probe a se inuicem sunt distinguendi. Vt enim functio V fiat maxima, necesse est vt ambae variabiles ad hoc conspirent; namque si altera maximum exhiberet, altera minimum, ipsa functio neque maxima neque minima euaderet. Quocirca inuentis ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ valoribus ipsarum x & y inquirendum est, vtrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant; atque tum demum, cum compertum fuerit vtriusque variabilis valorem hinc erutum pro maximo valere, affirmare poterimus functionem hoc casu maximum valorem induere. Quod idem de minimo erit tenendum, ita vt functio V minimum valorem adipisci nequeat, nisi simul ambae variabiles x & y minimum producant. Hinc ergo omnes illi casus reiici debebunt, quibus altera variabilis maximum, altera vero minimum indicare deprehendetur. Interdum vero etiam euenit, vt alterius vel etiam vtriusque variabilis valores ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ oriundi neque maximum neque minimum exhibeant, qui casus proinde pariter tanquam prorsus inepti erunt reiiciendi.

290. Vtrum autem valores pro x & y reperti valeant pro maximo an minimo? de vtroque seorsim simili modo inuestigabitur, quo supra, cum vnica adesset variabilis, sumus vsi. Ad iudicium scilicet de variabili x instituendum consideretur altera y tanquam constans, & cum sit $dV = P\,dx$ seu $\frac{dV}{dx} = P$, differentietur P denuo posito y constante, vt prodeat $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$, ac dispiciatur, vtrum valor ipsius $\frac{dP}{dx}$, postquam loco x & y valores ante inuenti fuerint substituti, fiat affirmatiuus an negatiuus; priori enim casu indicabitur minimum, posteriori vero maximum. Simili modo cum posito x constante fit $dV = Q\,dy$ seu $\frac{dV}{dy} = Q$, differentietur Q denuo posita sola y variabili, & examinetur valor $\frac{dQ}{dy}$, substitutis loco x & y valoribus, qui ex aequationibus $P = 0$ & $Q = 0$ sunt inuenti; qui si fuerit affirmatiuus, declarabit minimum, contra vero maximum. Hinc ergo colligitur, si ex valoribus pro x & y inuentis formulae $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ induant valores diuersis signis affectos altera scilicet affirmatiuum, altera negatiuum, tum functionem V neque maximam neque minimam effici; sin autem vtraque formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiat affirmatiua, minimum resultabit: contraque, si vtraque fiat negatiua, maximum.

291.

291. Quodſi vero altera formula $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$, vel etiam vtraque, ſi pro x & y valores inuenti ſubſtituantur, euaneſcat, tum progrediendum erit ad differentialia ſequentia $\frac{ddP}{dx^2}$ & $\frac{ddQ}{dy^2}$, quae niſi pariter euaneſcant, neque maximum neque minimum habebit locum; ſin autem euaneſcant, iudicium ex formulis differentialibus ſequentibus $\frac{d^3P}{dx^3}$ & $\frac{d^3Q}{dy^3}$ erit petendum, ſimilique modo inſtituendum, quo pro formulis $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ eſt factum. Quo autem, quibus caſibus hoc vſu veniat, clarius exponamus, prodierit valor $x = \alpha$, qui ſi formulam $\frac{dP}{dx}$ reddat euaneſcentem, neceſſe eſt vt $\frac{dP}{dx}$ factorem habeat $x-\alpha$; qui factor ſi fuerit ſolitarius, neque ſimul alium ſibi habeat aequalem ſocium, neque maximum neque minimum indicabitur, quod idem euenit ſi $\frac{dP}{dx}$ factorem habuerit $(x-\alpha)^3$, vel $(x-\alpha)^5$, &c. Sin autem factor fuerit $(x-\alpha)^2$, vel $(x-\alpha)^4$, &c. tum quidem maximum vel minimum indicabitur; at inſuper videndum erit, vtrum cum caſu, per y indicato conſentiat.

292. Labor autem his caſibus ad differentialia vlteriora progrediendi mirifice ſubleuari poterit: ſi enim ponamus, vt rem generalius complectamur, inuentum eſſe

esse $\alpha x + \beta = 0$, atque formulam $\frac{dP}{dx}$ factorem habere $(\alpha x + \beta)^2$, ita vt sit $\frac{dP}{dx} = (\alpha x + \beta)^2 T$; quia est $\alpha x + \beta = 0$, fiet $\frac{d^3 P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$, hincque ob $2\alpha^2$ affirmatiuum, ex ipsa quantitate T iudicium absolui poterit; quae si induet valorem affirmatiuum, pro minimo, contra vero pro maximo pronunciabit. Hocque idem subsidium in maximorum minimorumque inuestigatione, si vnica insit variabilis adhiberi poterit, ita vt nunquam opus sit ad altiora differentialia ascendere. Quin etiam nequidem ad differentialia secunda procedere opus erit: si enim ex aequatione $P = 0$, fiat $\alpha x + \beta = 0$, necesse est vt P factorem habeat $\alpha x + \beta$; sit $P = (\alpha x + \beta) T$, & cum sit $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \beta)\frac{dT}{dx}$, ob $\alpha x + \beta = 0$, erit $\frac{dP}{dx} = \alpha T$, hincque iam ipse alter factor T, prout valor ipsius αT fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, statim vel minimum vel maximum indicabit.

293. His igitur traditis praeceptis haud difficile erit, si functio quaecunque duas variabiles inuoluens fuerit proposita, casus inuestigare, quibus haec functio fiat vel maxima vel minima.. Si quae insuper notanda fuerint, ea ipsa exemplorum euolutio suggeret, quamobrem aliquot exemplis regulas datas illustrari expediet.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista functio duarum variabilium $V = xx + xy + yy - ax - by$, *quae quibus casibus fiat vel maxima vel minima inquiratur.*

Cum sit $dV = 2xdx + ydx + xdy + 2ydy - adx - bdy$, si comparetur cum forma generali $dV = Pdx + Qdy$ erit $P = 2x + y - a$ & $Q = 2y + x - b$: vnde formabuntur istae aequationes $2x + y - a = 0$ & $2y + x - b = 0$, quibus coniunctis eliminando y fiet $x - b = 4x - 2a$, ideoque $x = \frac{2a - b}{3}$, & $y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$. Cum igitur sit $\frac{dP}{dx} = 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 2$, vtraque ostendit minimum; ex quo concludimus formulam $xx + xy + yy - ax - by$ fieri minimam, si ponatur $x = \frac{2a - b}{3}$ & $y = \frac{2b - a}{3}$, prodibitque hoc modo $V = -\frac{3aa + 3ab - 3bb}{9} = -\frac{aa + ab - bb}{3}$, qui cum sit vnicus, omnium erit minimus. Vnico ergo modo fieri potest $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3}$, & quia minor fieri nequit, erit haec aequatio $xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3} - cc$ impossibilis.

EXEMPLUM II.

Si proponatur formula $V = x^3 + y^3 - 3axy$, *quaerantur casus, quibus* V *adipiscatur valorem maximum vel minimum.*

Ob $dV = 3xxdx + 3yydy - 3aydx - 3axdy$ erit $P = 3xx - 3ay$ & $Q = 3yy - 3ax$, vnde fit $ay = xx$ & $ax = yy$. Cum ergo sit $yy = x^4 : aa = ax$ erit $x^4 - a^3x = 0$; ideoque vel $x = 0$ vel $x = a$. Priori casu fit $y = 0$, posteriori vero $y = a$. Quoniam ergo est $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$ & $\frac{dQ}{dy} = 6y$ atque $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$; priori ergo casu, quo $x = 0$ & $y = 0$, neque maximum neque minimum resultat. Posteriori vero casu quo & $x = a$ & $y = a$ minimum prodit, si quidem a fuerit quantitas affirmatiua, fietque $V = -a^3$, qui autem valor tantum minor est proximis antecedentibus & consequentibus: nam sine dubio V multo minorem induere potest valorem, si vtrique variabili x & y valores negatiui tribuantur.

EXEMPLUM III.

Proposita sit haec functio $V = x^3 + ayy - bxy + cx$, *cuius valores maximi seu minimi inquirantur.*

Quia est $dV = 3xxdx + 2aydy - bydx - bxdy + cdx$ erit $P = 3xx - by + c$ & $Q = 2ay - bx$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis erit $y = \frac{bx}{2a}$, ideoque

3xx

$3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0$ seu $xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$ vnde fit $x = \frac{bb \pm \surd(b^4 - 48aac)}{12a}$. Nisi ergo sit $b^4 - 18aac > 0$, neque maximum neque minimum habet locum. Ponamus ergo esse $b^4 - 48aac = bbff$, vt sit $c = \frac{bb(bb-ff)}{48aa}$; erit $x = \frac{bb \pm bf}{12a}$ & $y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}$. Quoniam porro est $\frac{dP}{dx} = 6x$ & $\frac{dQ}{dy} = 2a$, fiet $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2}$. Nisi ergo $2a$ & $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ sint quantitates eiusdem signi, neque maximum neque minimum habet locum. At si sint ambae vel affirmatiuae vel ambae negatiuae, quod euenit, si earum productum $b(b \pm f)$ fuerit affirmatiuum; tum functio V euadet minimum, si a sit quantitas affirmatiua; contra vero maximum, si a sit quantitas negatiua. Hinc si fuerit $f = 0$ seu $c = \frac{b^4}{48aa}$, ob bb quantitatem affirmatiuam, functio V euadet minima, si a sit quantitas positiua, ponaturque $x = \frac{bb}{12a}$ & $y = \frac{b^3}{24aa}$; contra vero si a sit negatiuum, istae substitutiones producent maximum. Si sit $f < b$, duobus casibus oritur vel maximum vel minimum: at si $f > b$, tum casus tantum $x = \frac{b(b+f)}{12a}$ & $y = \frac{bb(b+f)}{24aa}$ praebebit maximum minimumue, prout a fuerit vel negatiuum vel af-

firmatiuum. Sit $a = 1$, $b = 3$ & $f = 1$, vt habeatur haec formula $V = x^3 + yy - 3xy + \frac{3}{2}x$, haec fiet minima ob a affirmatiuum, si ponatur vel $x = 1$ & $y = \frac{3}{2}$ vel $x = \frac{1}{2}$ & $y = \frac{3}{4}$. Priori casu oritur $V = \frac{1}{4}$, posteriori vero $V = \frac{5}{16}$. Interim tamen patet loco x numeris negatiuis ponendis multo minores valores pro V oriri posse. Ita ergo intelligi debet valor ipsius $V = \frac{1}{4}$ minor esse, quam si ponatur $x = 2 + \omega$ & $y = 3 + \phi$; dummodo sint ω & ϕ numeri parui, siue affirmatiui siue negatiui; limes autem quem ω transgredi non debet est $- \frac{15}{4}$; nam si $\omega < - \frac{15}{4}$ fieri poterit vt V fiat minor quam $\frac{1}{4}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire maxima vel minima huius functionis:

$$V = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy.$$

Sumto differentiali erit $P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx$ & $Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy$, quibus valoribus nihilo aequalibus positis, si a se inuicem subtrahantur erit: $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$, quae cum sit diuisibilis per $x - y$, erit primo $y = x$, atque $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$, quae dat $x = 0$ & $4xx = 3ax - 2cc$ seu $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$. Si sumamus $x = 0$, erit quoque $y = 0$; & ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2ay + 2cc$, atque $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$, fiet functio V minima $= 0$.

Sin

Sin statuamus $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, si quidem fuerit $9aa > 32cc$, ob $4xx = 3ax - 2cc$, erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc = \frac{21aa - 32cc \pm 7a\sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, qui valor cum sit semper affirmatiuus ob $32cc < 9aa$, valor V hoc quoque casu fit minimus, eritque $V = \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$. Diuidamus autem aequationem $4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$ per $x - y$ fietque $4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0$. At ex aequatione $P = 0$, erit $yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$, quo valore in illa substituto fit

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8ccx + 2acc}{4ax - aa}.$$

Verum illa dat $y = -x \pm \sqrt{\frac{4x^3 + axx + 2ccx}{a}}$, vnde efficitur:

$$16x^3 + 8axx + 4ccx + 2acc = (4x - a)\sqrt{(4ax^3 + aaxx + 2accx)};$$

quae ad rationalitatem perducta, dat

$$256x^6 + 192ax^5 + (80aa + 128cc)x^4 + (4a^3 + 96acc)x^3 + (-a^4 + 48aacc + 16c^4)x^2 + (-2a^3cc + 16ac^4)x + 4a^2c^4 = 0$$

cuius radices, si quas habet, reales indicabunt maxima vel minima functionis V, si quidem $\frac{dP}{dx}$ & $\frac{dQ}{dy}$ fiant quantitates eodem signo affectae.

EXEMPLUM V.

Inuenire maxima & minima huius expressionis:

$$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = V.$$

Facta differentiatione erit:

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$
$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0$$

quae aequationes inuicem vel subtractae vel additae dant:

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$
$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

quae diuisae per $x - y$ & $x + y$, & denuo vel additae vel subtractae dant:

$4xx + 4yy + 2aa = 0$ & $4xy - 2mxy - naa = 0$.

Ex quarum posteriori fit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, prior autem reales valores non admittit. Tres igitur habemus casus:

I. Si $y = x$, eritque $4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$, vnde fit vel $x = 0$ vel $2(2+m)xx + (2+n)aa = 0$. Sit $x = 0$, erit quoque $y = 0$, atque ob $\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$, hoc casu fiet $V = 0$ minimum, si quidem coefficiens aa fuerit affirmatiuus. Alter casus dat $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, quae realis esse nequit nisi sit $\frac{n+2}{m+2}$ numerus negatiuus. Sit $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$ seu

seu $n = -2kkm - 4kk - 2$, erit $x = \pm ka$ & $y = \pm ka$. At $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ & $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$, quae cum sint aequales, erit V vel minimum vel maximum, prout istae quantitates fuerint vel affirmatiuae vel negatiuae.

II. Sit $y = -x$, eritque $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$ ergo vel $x = 0$ vel $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Prior radix $x = 0$ recidit in praecedentem. Posterior vero erit realis si $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ fuerit quantitas affirmatiua: & cum fiat $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ prodibit vel maximum vel minimum.

III. Sit $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, erit $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = 0$ seu $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = 0$, cuius aequationis nulla radix est realis, nisi sit aa quantitas negatiua.

EXEMPLUM VI.

Proposita sit haec functio determinata:

$$V = x^4 + y^4 - xx + xy - yy,$$

cuius valores maximi vel minimi inuestigentur.

Cum hinc fiat $P = 4x^3 - 2x + y = 0$ & $Q = 4y^3 - 2y + x = 0$ erit ex priori $y = 2x - 4x^3$, qui in altera substitutus dat $256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$.

Cuius

Cuius vna radix est $x = 0$, vnde fit quoque $y = 0$. Ergo hoc casu ob $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$ & $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$ prodit maximum $V = 0$.

Diuisa autem aequatione inuenta per x erit:

$$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40xx + 3 = 0,$$

quae factorem habet $4xx - 1$, vnde fit $4xx = 1$ & $x = \pm\frac{1}{2}$; atque $y = \pm\frac{1}{2}$, tum vero erit $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$, vtroque ergo casu oritur minimum $V = -\frac{1}{8}$.

Diuidatur illa aequatio per $4xx - 1$, atque obtinebitur:

$$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0,$$

quae denuo bis continet $4xx - 1 = 0$; ita vt praecedens casus oriatur. Praeterea vero inde fit $4xx - 3 = 0$, & $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$; cui respondet $y = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Erit igitur quoque $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, ideoque fiet V minimum $= -\frac{9}{8}$; qui est valor omnium minimus, quos quidem functio V recipere potest: & hanc ob rem ista aequatio $V = -\frac{9}{8} - cc$ semper est impossibilis. Hinc autem patet via determinandi maxima & minima functionum, quae tres pluresue variabiles inuoluunt.

CAPUT

CAPUT XII.

DE VSU DIFFERENTIALIUM IN INUESTIGANDIS RADICIBUS REALIBUS AEQUATIONUM.

294.

Natura maximorum ac minimorum viam nobis patefacit ad indolem radicum aequationum, vtrum sint reales an imaginariae, cognoscendam. Sit enim proposita aequatio cuiuscunque ordinis:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

cuius radices ponamus esse p, q, r, s, t, &c. ita vt p sit minima, q ea quae ratione magnitudinis sequitur, sicque & reliquae radices secundum ordinem quantitatis sint dispositae: scilicet sit $q > p$; $r > q$; $s > r$; $t > s$ &c. Assumamus autem omnes radices aequationis esse reales, eritque exponens maximus n simul numerus radicum p, q, r, &c. Consideremus quoque has radices omnes tanquam inter se inaequales; hinc tamen aequales radices non excluduntur, propterea quod radices inaequales, si earum differentia abeat in infinite paruam, fiant aequales.

295. Quoniam proposita expressio $x^n - Ax^{n-1} + \&c.$ tum solum fit nihilo aequalis, cum loco x aliquis valor ex p, q, r, &c. substituitur, reliquis vero casibus omnibus non euanescit, ponamus generatim:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = z$$

ita vt z ſpectari poſſit tanquam functio ipſius x. Fingamus nunc pro x ſucceſſiue ſubſtitui valores determitos, incipiendo a minimo $x = -\infty$, atque continuo maiores in locum ipſius x collocari; perſpicuumque eſt z nacturum hinc eſſe valores vel nihilo maiores vel nihilo minores, neque prius eſſe euaniturum, quam ponatur $x = p$; quo caſu fiet $z = 0$. Augeantur valores ipſius x vltra p, atque valores ipſius z vel affirmatiui vel negatiui fient, donec perueniatur ad valorem $x = q$; quo caſu iterum erit $z = 0$. Neceſſe ergo eſt, vt cum valores ipſius z ab 0 iterum ad 0 acceſſerint, interea z habuerit valorem vel maximum vel minimum; maximum ſcilicet ſi valores ipſius z, dum x intra limites p & q verſabatur, fuerint affirmatiui, minimum, ſi fuerint negatiui. Simili modo dum x vltra q ad r vsque augetur, functio z maximum vel minimum attinget; maximum nimirum ſi ante fuerit minimum, & contra. Supra enim vidimus maxima & minima ſe mutuo alternatim excipere.

296. Quare cum inter binas quasuis radices ipſius x exiſtat caſus, quo functio z fit maximum vel minimum; erit numerus maximorum & minimorum, quae in functione z implicantur, vnitate minor, quam numerus radicum realium; atque ita quidem alternatim ſe excipient, vt maximi ipſius z valores ſint affirmatiui, minimi negatiui. Quod ſi viciſſim functio z habeat maximum vel ſaltem valorem affirmatiuum caſu $x = f$, atque minimum ſeu ſaltem negatiuum caſu

casu $x = g$; quoniam dum valores ipsius x ab f ad g transeunt, functio z ab affirmatiuo abit in negatiuum necesse, est vt interea per o transierit, & hancobrem dabitur radix ipsius x intra limites f & g contenta. Nisi autem haec conditio adsit, vt valores maximi minimique ipsius z fiant alternatim affirmatiui & negatiui, illa conclusio non sequitur. Si enim dentur functionis z minima, quae quoque sint affirmatiua, fieri potest vt valor ipsius z a maximo ad sequens minimum transeat, cum tamen interea non euanescat. Ceterum ex dictis intelligitur, etiamsi aequationis propositae non omnes radices fuerint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum; etiamsi propositio conuersa generatim non valeat, vt inter bina quaeuis maxima seu minima radix realis contineatur: valet autem adiecta conditione, si alter valor ipsius z fuerit affirmatiuus, alter negatiuus.

297. Quoniam ergo supra vidimus, valores ipsius x, quibus functio:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c.$$

fit maximum vel minimum, esse radices aequationis differentialis huius:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

manifestum est, si aequationis $z = 0$ omnes radices, quarum numerus est $= n$ fuerint reales, tum quoque omnes radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ fore reales. Cum

 enim

enim functio z tot habeat maxima vel minima, quot numerus $n-1$ continet vnitates, necesse est vt aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ totidem habeat radices reales; ideoque omnes eius radices erunt reales. Ex quo simul perspicitur, functionem z plura maxima minimaue habere non posse, quam $n-1$. Habemus ergo hanc regulam latissime potentem; si aequationis $z=0$ omnes radices fuerint reales, tum quoque aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ omnes radices habebit reales. Vnde vicissim sequitur, si aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ non omnes radices fuerint reales, tum quoque non omnes aequationis $z=0$ radices reales fore.

298. Quia inter binas quasuis aequationis $z=0$ radices reales datur vnus casus, quo functio z fit maximum vel minimum; sequitur si aequatio $z=0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx}=0$ necessario vnam radicem habituram esse realem. Pariter si aequatio $z=0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ certo duas habebit radices reales. Atque generatim si aequatio $z=0$ habeat m radices reales, necesse est vt aequationis $\frac{dz}{dx}=0$ ad minimum sint $m-1$ radices reales. Quare si aequatio $\frac{dz}{dx}=0$ pauciores habeat radices reales quam $m-1$, tum vicissim aequatio $z=0$ certo pauciores quam m habebit radices reales. Cauendum autem

tem eſt, ne propoſitio conuerſa pro vera habeatur; etiamſi enim aequatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ aliquot vel adeo omnes radices ſuas habeat reales, tamen non ſequitur, aequationem $z = 0$ vllam habituram eſſe radicem realem. Fieri enim poteſt, vt aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ omnes radices ſint reales, cum tamen aequationis $z = 0$ omnes radices ſint imaginariae.

299. Interim tamen, ſi conditio ſupra memorata adiiciatur, propoſitio conuerſa ita proponi poterit, vt ex radicibus realibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, numerus radicum realium aequationis $z = 0$ certo cognoſci poſſit. Ponamus enim α, β, γ, δ, &c. eſſe radices reales aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, inter quas α ſit maxima, reliquae vero ordine magnitudinis ſe inuicem ſequantur. His igitur valoribus loco x ſubſtitutis functio z obtinebit vel maximos vel minimos valores alternatim. Cum autem functio z fiat $= \infty$, ſi ponatur $x = \infty$, patet eius valores continuo decreſcere debere, dum valores ipſius x ab ∞ vsque ad α diminuuntur; ex quo, caſu $x = \alpha$, fiet z minimum. Quodſi ergo hoc caſu $x = \alpha$ functio z valorem induat negatiuum, neceſſe eſt vt ante alicubi fuerit $= 0$, ſicque aequationis $z = 0$ radix dabitur realis $x > \alpha$; ſin autem poſito $x = \alpha$ functio z adhuc retineat valorem affirmatiuum, ante nusquam potuit eſſe

minor, alias enim quoque daretur minimum antequam x ad α vsque diminueretur, quod esset contra hypothesin; hinc aequatio $z = 0$ nullam habere poterit radicem realem maiorem quam α. Si ergo ponamus posito $= \alpha$ fieri $z = \mathfrak{A}$, hoc modo iudicari poterit: si fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas affirmatiua, tum aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem α maiorem; sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negatiua, tum aequatio $z = 0$ vnam perpetuo habebit radicem realem α maiorem, neque plures.

300. Ad hoc iudicium vlterius persequendum

si ponatur	fiat
$x = \alpha$	$z = \mathfrak{A}$
$x = \beta$	$z = \mathfrak{B}$
$x = \gamma$	$z = \mathfrak{C}$
$x = \delta$	$z = \mathfrak{D}$
$x = \varepsilon$	$z = \mathfrak{E}$
&c.	&c.

Quia ergo $\mathfrak{A}$ fuit minimum, erit $\mathfrak{B}$ maximum, & quidem si $\mathfrak{A}$ fuerit affirmatiuum, erit quoque $\mathfrak{B}$ affirmatiuum, neque ergo inter limites α & β dabitur radix realis aequationis $z = 0$. Quare si haec aequatio nullam habeat radicem realem α maiorem, neque vllam habebit, quae esset maior quam β. Sin autem $\mathfrak{A}$ fuerit quantitas negatiua, quo casu vna datur aequationis radix $x > \alpha$; dispiciatur vtrum valor ipsius $\mathfrak{B}$ sit affirmatiuus an negatiuus? priori casu dabitur radix $x > \beta$, posteriori vero nulla dabitur radix intra limites α & β contenta. Simili modo cum $\mathfrak{B}$ fuerit maximum, erit $\mathfrak{C}$ minimum; quare si $\mathfrak{B}$ habuerit valorem negatiuum, multo

tò magis 𝔈 erit negatiuum, nullaque hoc casu dabitur radix intra limites β & γ contenta. Ad si 𝔅 fuerit affirmatiuum, radix dabitur realis inter limites β & γ, si 𝔈 fiat negatiuum: sin autem 𝔈 quoque sit affirmatiuum, tum nulla dabitur radix inter limites β & γ contenta, similique modo iudicium vlterius erit instituendum.

301. Quo haec iudicia facilius intelligantur, ea in sequenti tabella complexus sum:

Aequatio $z = 0$ vnam habebit radicem realem, quae continetur intra limites	Si fuerit
$x = \infty$ & $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ & $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ & $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ & $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ & $x = \epsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$
&c.	&c.

Harumque propositionum conuersae & in negantes transmutatae pariter in omni rigore locum obtinent. Scilicet

Aequatio $z = 0$ nullam habebit radicem realem, quae contineatur inter limites:	si non fuerit
$x = \infty$ & $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ & $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ & $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ & $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ & $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ & $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ & $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ & $x = \epsilon$	$\mathfrak{D} = +$ & $\mathfrak{E} = -$
&c.	&c.

Ope

Ope harum ergo regularum ex radicibus aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$, si eae fuerint cognitae, non solum numerus radicum realium aequationis $z = 0$ colligitur, sed etiam limites innotescunt, intra quos singulae istae radices contineantur.

EXEMPLUM.

Sit proposita ista aequatio: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ *quae an habeat radices reales & quot quaeritur.*

Aequatio differentialis erit $4x^3 - 28x + 24 = 0$ seu $x^3 - 7x + 6 = 0$, cuius radices sunt 1, 2, & -3, quae secundum ordinem magnitudinis dispositae dabunt

vnde erit

$\alpha = 2$	$\mathfrak{A} = -4$
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = -1$
$\gamma = -3$	$\mathfrak{C} = -129$

Ob $\mathfrak{A}$ negatiuum ergo aequatio proposita habebit radicem realem > 2, at ob $\mathfrak{B}$ negatiuum, neque inter limites 2 & 1, neque inter limites 1 & -3 radicem habebit realem. Cum autem posito $x = -3$ fiat $z = \mathfrak{C} = -129$, ac si statuatur $x = -\infty$, fiat $z = +\infty$ necesse est, vt radix detur realis inter limites -3 & $-\infty$ contenta. Habebit ergo aequatio proposita duas radices reales, alteram $x > 2$, alteram $x < -3$; ex quo duae radices erunt imaginariae. Simili modo ergo ex vltimo aequationis propositae maximo vel minimo iudicari debet,

bet, quo ex primo ſolo. Scilicet ſi aequatio propoſita fuerit ordinis paris, vltimum ſiue maximum ſiue minimum (erit autem hoc caſu minimum), ſi fuerit negatiuum radicem realem, ſin affirmatiuum radicem imaginariam indicat. At pro aequationibus imparium graduum, quia poſito $x = -\infty$ fit $z = -\infty$, ſi vltimum maximum fuerit affirmatiuum, radix realis, ſin negatiuum, imaginaria indicatur.

302. Regula ergo pro cognoſcendis radicibus realibus & imaginariis hoc modo commode exprimi poterit. Propoſita aequatione quacunque $z = 0$, conſideretur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$, cuius radices reales ſecundum ordinem quantitatis diſpoſitae ſint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. tum poſito $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon,\ \zeta$, &c.

fiat $z = \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F}$, &c.

Iam ſi ſigna ſint: $-\ +\ -\ +\ -\ +$ &c.

tot aequatio $z = 0$ habebit radices reales, quot habentur litterae α, β, γ, &c. & inſuper vnam. Sin autem vna ex his literis maiuſculis non habeat ſignum infra ſcriptum, tum binae radices imaginariae indicabuntur. Ita ſi $\mathfrak{A}$ haberet ſignum $+$, tum nulla daretur radix intra limites ∞ & β contenta. Si $\mathfrak{B}$ habeat ſignum $-$, nulla dabitur radix inter limites α & γ; &, ſi $\mathfrak{C}$ habeat ſignum $+$, nulla erit radix inter limites β & δ, & ita porro. Generatim autem praeter radices imaginarias hoc modo indicatas, aequatio $z = 0$ inſuper tot habebit imaginarias, quot aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$.

303. Si eueniat, vt valorum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. aliquis euanescat, tum eo loco aequatio $z = o$ duas habebit radices aequales. Scilicet si fuerit $\mathfrak{A} = o$, tum habebit duas radices ipsi a aequales; sin sit $\mathfrak{B} = o$, duae erunt radices $= \mathfrak{b}$. Hoc enim casu aequatio $z = o$ vnam habebit radicem communem cum aequatione differentiali $\frac{dz}{dx} = o$; supra autem demonstrauimus, hoc esse indicium duarum radicum aequalium. Sin autem aequatio $\frac{dz}{dx} = o$ duas pluresue radices habeat aequales, tum si earum numerus fuerit par, neque maximum neque minimum indicabitur: vnde pro praesenti instituto radices aequales numero pares negligi poterunt. Sin autem numerus radicum aequalium aequationis $\frac{dz}{dx} = o$ fuerit impar, tum omnes praeter vnam in formatione iudicii reiiciendae sunt; nisi forte hoc casu ipsa quoque functio z euanescat. Si enim hoc eueniat aequatio $z = o$ quoque habebit radices aequales & quidem vna plures, quam aequatio $\frac{dz}{dx} = o$. Sic si fuerit $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, ita vt haec aequatio habeat n radices aequales ipsi ζ, si posito $x = \zeta$ quoque euanescat z, tum aequatio $z = o$ habebit $n + 1$ radices aequales ipsi ζ.

304. Applicemus haec praecepta ad aequationes ſimpliciores, ac primo quidem a quadratica incipiamus. Sit igitur propoſita haec aequatio: $z = x^2 - Ax + B = o$: erit eius differentialis $\frac{dz}{dx} = 2x - A$, qua facta $= o$, erit $x = \frac{1}{2}A$, ſeu $\alpha = \frac{1}{2}A$. Subſtituatur hic valor loco x, fietque $z = -\frac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A}$; vnde colligimus, ſi iſte valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit negatiuus, hoc eſt ſi ſit $AA > 4B$, aequationem $xx - Ax + B = o$ habituram eſſe duas radices reales, alteram maiorem quam $\frac{1}{2}A$ alteram minorem. Sin autem valor ipſius $\mathfrak{A}$ fuerit affirmatiuus ſeu $AA < 4B$, tum ambae aequationis propoſitae radices erunt imaginariae. At ſi fuerit $\mathfrak{A} = o$ ſeu $AA = 4B$, tum aequatio propoſita habebit duas radices aequales, vtramque ſcilicet $= \frac{1}{2}A$. Quae cum ex natura aequationum quadraticarum ſint notiſſima, veritas horum principiorum non mediocriter illuſtratur; ſimulque eorum vtilitas in hoc negotio perſpicitur.

305. Progrediamur ergo ad aequationes cubicas ſimili modo inquirendas. Sit ergo propoſita aequatio $x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = o$: cuius differentialis cum ſit $3xx - 2Ax + B = \frac{dz}{dx}$, ſi haec ponatur $= o$, fiet $xx = \frac{2Ax - B}{3}$, cuius aequationis vel ambae radices ſunt imaginariae, vel aequales, vel reales inaequales. Cum igitur hinc ſit $x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$, ambae radi-

ces erunt imaginariae, ſi fuerit $AA < 3B$: hoc ergo caſu aequatio cubica propoſita vnicam habebit radicem realem, cuius alii limites non patent praeter $+\infty$ & $-\infty$. Sint iam ambae radices inter ſe aequales, ſeu $AA = 3B$, erit $x = \frac{A}{3}$. Niſi ergo ſimul fiat $z = 0$, hae duae radices pro nulla reputari debebunt, habebitque aequatio vt ante vnicam radicem realem; ſin autem caſu $x = \frac{A}{3}$ ſimul fiat $z = 0$, quod euenit, ſi fuerit $-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = 0$, ſeu $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$; hoc eſt ſi fuerit $B = \frac{1}{3}A^2$ & $C = \frac{1}{27}A^3$, aequatio habebit tres radices aequales, ſingulas ſcilicet $= \frac{1}{3}A$. Euoluamus nunc tertium caſum, quo ambae radices aequationis differentialis ſunt reales & inter ſe inaequales, quod euenit ſi $AA > 3B$. Sit ergo $AA = 3B + ff$, ſeu $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, erunt ambae illae radices $x = \frac{A \pm f}{3}$. Fiet ergo $\alpha = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Quaerantur ergo valores ipſius z his reſpondentes $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$; & cum ambae radices contineantur in haec aequatione $xx = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, fiet $z = -\frac{1}{3}Axx + \frac{2}{3}Bx - C = -\frac{2}{9}AAx + \frac{1}{9}AB + \frac{2}{3}Bx - C$. Hinc itaque oritur:

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^2f + \tfrac{2}{9}Bf - C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - C$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB + \tfrac{2}{27}A^2f - \tfrac{2}{9}Bf - C = \tfrac{4}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 - C$$

ob $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Si igitur fuerit $\mathfrak{A}$ quantitas negatiua, quod euenit, ſi fuerit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, aequatio $z = 0$ vnam habebit radicem realem $> \alpha$, hoc

eſt

eſt maiorem quam $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Ponamus ergo eſſe $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ ſeu eſſe $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3 + gg$; atque, vt vidimus, aequatio propoſita cubica habebit radicem realem $> \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Quales autem futurae ſint reliquae radices, ex valore $\mathfrak{B}$ intelligetur: erit autem $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3 - gg$; qui ſi fuerit affirmatiuus, aequatio inſuper duas habebit radices reales, priorem intra limites α & β, hoc eſt intra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ & $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ contentam, alteram vero minorem quam $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Sin autem fuerit $gg > \frac{4}{27}f^3$, ſeu $\mathfrak{B}$ negatiuum, tum aequatio habebit duas radices imaginarias. At ſi fuerit $\mathfrak{B} = 0$ ſeu $\frac{4}{27}f^3 = gg$ tum duae radices euadent aequales, vtraque $= \beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Denique ſi ſit valor ipſius $\mathfrak{A}$ affirmatiuus ſeu $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$, tum aequatio duas habebit radices imaginarias, tertiaque erit realis & $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Atque ſi ſit valor ipſius $\mathfrak{A} = 0$, duae erunt radices aequales $= \alpha$, manente tertia $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306. Quo igitur aequationis cubicae $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ omnes tres radices ſint reales, requiruntur tres conditiones. Primo vt ſit $B < \frac{1}{3}AA$: ſit ergo $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Secundo vt ſit $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$. Tertio vt ſit $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Quae duae poſteriores conditiones eo redeunt, vt C contineatur intra hos limites $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$ ſeu intra hos limites $\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f)$ & $\frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$. Quod ſi ergo harum conditionum vnica deſit, aequatio duas habebit radices imaginarias. Sic ſi fuerit $A = 3$,

 $B = 2$,

$B = 2$, erit $\frac{1}{3}ff = \frac{1}{3}AA - B = 1$ & $ff = 3$; vnde ista aequatio: $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ omnes radices reales habere nequit, nisi C contineatur intra limites $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ & $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Quare si fuerit vel $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C < -0,3849$, vel $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$ seu $C > 0,3849$ aut coniunctim $CC > \frac{4}{27}$, aequatio vnicam habebit radicem realem.

307. Quoniam in omni aequatione secundus terminus tolli potest, ponamus esse $A = 0$, ita vt habeamus hanc aequationem cubicam $x^3 + Bx - C = 0$. Vt igitur huius aequationis omnes tres radices sint reales, necesse est vt primo sit $B < 0$, seu B debet esse quantitas negatiua. Sit ergo $B = -kk$, erit $ff = 3kk$, atque insuper requiritur, vt quantitas C contineatur intra hos limites $-\frac{2}{27}f^3$ & $+\frac{2}{27}f^3$; hoc est inter hos $-\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$ & $+\frac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$. Erit ergo $CC < \frac{4}{27}k^6$ seu $CC < -\frac{4}{27}B^3$. Vnica ergo conditione natura aequationum cubicarum, quae omnes tres radices habeant reales comprehendi poterit, dum dicemus esse oportere $4B^3 + 27CC$ quantitatem negatiuam. Sic enim iam postulatur, vt sit B quantitas negatiua, quia alioquin $4B^3 + 27CC$ negatiuum fieri non posset. Quocirca generatim affirmamus, aequationem $x^3 + Bx \pm C = 0$ omnes tres radices habituram esse reales, si fuerit $4B^3 + 27CC$ quantitas negatiua. Sin autem haec quantitas fuerit affirmatiua, tum vnicam fore realem, reliquas binas imaginarias; at si fiat

$4B^3$

$4B^3 + 27CC = 0$, tum omnes quidem radices futuras esse reales, at binas inter se aequales.

308. Progrediamur ad aequationes biquadratas, in quibus etiam secundum terminum deesse ponamus. Sit ergo $x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0$. Statuamus $x = \frac{1}{u}$, eritque $1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$, cuius aequatio differentialis est $2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0$, quae vnam habet radicem $u = 0$, tum vero erit $uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$ & $u = \frac{3C \pm \sqrt{(9CC - 32BD)}}{8D}$. Vt igitur omnes quatuor radices sint reales, primo requiritur, vt sit $9CC > 32BD$. Ponamus ergo esse $9CC = 32BD + 9ff$; erit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Hic C semper pro quantitate affirmatiua sumere poterimus, nisi enim talis fuerit, ponendo $u = -v$ talis euadet. Mox autem demonstrabimus omnes radices reales esse non posse, nisi sit B quantitas negatiua. Sit ergo $B = -gg$, eritque $9CC = 9ff - 32ggD$, & $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Atque duo casus erunt perpendendi, prout D sit quantitas affirmatiua vel negatiua.

I. Sit D quantitas affirmatiua, eritque $f > C$, ac tres ipsius u radices secundum quantitatis ordinem dispositae erunt 1°; $u = \frac{3C + 3f}{8D}$, 2°; $u = 0$, 3°; $u = \frac{3C - 3f}{8D}$.

Aequa-

Aequatio autem $u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$, his valoribus loco u ſubſtitutis dabit ſequentes tres valores.

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3\,(C-3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C-f)^3\,(C+3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

quorum primus ac tertius debet eſſe negatiuus: vterque quidem ob C affirmatiuum & $C < f$ fit minor quam $\frac{1}{D}$. Oportet itaque eſſe $\frac{1}{D} < \frac{27(C+f)^3\,(3f-C)}{4096\,D^4}$ & $\frac{1}{D} < \frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096\,D^4}$, ſeu $4096\,D^3 < 27(f+C)^3\,(3f-C)$ & $4096\,D^3 < 27(f-C)^3\,(C+3f)$. At prior quantitas ſemper longe maior eſt poſteriori; vnde ſufficit, ſi fuerit $D^3 < \frac{27}{4096}\,(f-C)^3\,(C+3f)$, exiſtente $B = \frac{9\,CC - 9ff}{32\,D}$ & $f > C$, atque $D > 0$. Si igitur fuerit D quantitas affirmatiua, C affirmatiua, B negatiua, vt ſit $f > C$, atque $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3\,(C+3f)$, hoc eſt $D < \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{(3f+C)}$, tum aequatio

omnes

omnes radices habebit reales. Sin autem fuerit $D > \frac{3}{16}(f - C)\sqrt[3]{(3f + C)}$, attamen $D < \frac{3}{16}(f + C)\sqrt[3]{(3f - C)}$; tum duae radices erunt reales & duae imaginariae. At si adeo fuerit $D > \frac{3}{16}(f + C)\sqrt[3]{(3f - C)}$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

II. Sit D quantitas negatiua puta $= -F$, manente C affirmatiua ac B negatiua, ob $B = \frac{9CC - 9ff}{32D} = \frac{9ff - 9CC}{32F}$, erit $C > f$. Cum igitur sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \mp 3f}{8F}$, tres valores ipsius u secundum ordinem magnitudinis dispositi erunt 1°, $u = 0$; 2°, $u = -\frac{3C + 3f}{8F}$; 3°, $u = -\frac{3C - 3f}{8F}$, qui dabunt sequentes valores

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

Cum igitur $\mathfrak{A}$ sit quantitas negatiua, aequatio iam certo vnam, ac propterea quoque duas habebit radices reales. Vt autem omnes radices sint reales, oportet vt $\mathfrak{B}$ sit

 quan-

quantitas affirmatiua, ideoque $27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$; tum vero necesse est, vt sit $\mathfrak{C}$ quantitas negatiua seu $27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$. Quocirca vt omnes radices fiant reales, requiritur vt F^3 contineatur intra hos limites $\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f)$ & $\frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$ seu vt F contineatur intra limites $\frac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{(C-3f)}$ & $\frac{1}{16}(C-f)\sqrt[3]{(C+3f)}$; & nisi F contineatur intra hos limites, duae radices erunt imaginariae.

III. Ponamus iam B esse quantitatem affirmatiuam, & D pariter affirmatiuam, ob $B = \frac{9CC-9ff}{32D}$, erit $C > f$, & cum sit $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$, radices ordine magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \frac{3(C+f)}{8D}$; 2°, $u = \frac{3(C-f)}{8D}$ & 3°; $u = 0$, vnde sequentes oriuntur valores:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{D}$$

vbi cum $\mathfrak{C}$ sit quantitas affirmatiua, certo duae radices erunt imaginariae. Sin autem fuerit $\mathfrak{A}$ negatiuum,

quod

quod euenit, si $4096 D^3 < 27 (C+f)^3 (3f-C)$, duae radices erunt reales: sin fuerit $4096 D^3 > 27 (C+f)^3 (3f-C)$, tum omnes quatuor radices erunt imaginariae.

IV. Maneat B affirmatiuum, sit autem D negatiuum $= -F$, ob $B = \frac{9ff-9CC}{32 F}$, erit $f > C$ & ob $u = -\frac{3C \mp 3f}{8F}$, tres ipsius u radices secundum ordinem magnitudinis dispositae erunt 1°, $u = \frac{3(f-C)}{8F}$; 2°, $u = 0$; & 3°, $u = -\frac{3(C+f)}{8F}$, vnde isti valores nascuntur.

$$\mathfrak{A} = -\frac{27 (f-C)^3 (C+3f)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{27 (C+f)^3 (3f-C)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

vbi ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negatiua aequatio certo duas habet radices reales, at ob $\mathfrak{B}$ negatiuum, duae radices erunt imaginariae.

309. Si igitur ponamus litteras B, C, D quantitates affirmatiuas denotare, sequentes oriuntur casus diversi diiudicandi, qui ob $f = \sqrt{(CC - \frac{32}{9} BD)}$ huc redeunt.

I. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Omnes radices erunt reales, si fuerit

$$D < \frac{3}{16} [\sqrt{(CC + \frac{32}{9} BD)} - C] \sqrt[3]{[3\sqrt{(CC + \frac{32}{9} BD)} + C]}$$

Duae radices erunt reales, duaeque imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}-C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]}$$

at $D < \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}CD)}-C]}$

Omnes autem radices erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}-C]}.$$

II. Si aequatio sit $x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Duae radices semper sunt reales, reliquae binae quoque erunt reales, si quantitas D contineatur intra hos limites.

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[C-3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}]}$$

$$D < \tfrac{3}{16}[C-\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}]\sqrt[3]{[C+3\sqrt{(CC+\tfrac{32}{9}BD)}]}$$

nisi autem D contineatur intra hos limites, duae reliqua radices erunt imaginariae.

III. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$. Duae radices semper erunt imaginariae. Reliquae vero duae erunt reales, si fuerit

$$D < \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}-C]}$$

Reliquae vero duae quoque erunt imaginariae, si fuerit

$$D > \tfrac{3}{16}[\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}+C]\sqrt[3]{[3\sqrt{(CC-\tfrac{32}{9}BD)}-C]}$$

IV. Si aequatio sit $x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$. Huius aequationis duae radices semper erunt reales, duae reliquae vero semper imaginariae.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Si proponatur haec aequatio $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$ *quaeratur natura radicum, vtrum ſint reales an imaginariae.*

Quia hoc exemplum ad caſum primum pertinet, eſt $B = +2$; $C = 3$ & $D = 4$; vnde $CC + \frac{32}{9}BD$ $= 9 + \frac{32 \cdot 8}{9} = \frac{337}{9}$ & $\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD) = \frac{\sqrt{337}}{3}$ vnde conditiones vt omnes radices ſint reales, ſunt

$$4 < \frac{3}{16}\left(3 + \frac{\sqrt{337}}{3}\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)} = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{337})\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)}$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{337}}{3} - 3\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)} = \frac{1}{16}(\sqrt{337} - 9)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)}$$

Adhibitis, approximationibus examinari debet ergo, vtrum ſit $4 < \frac{69}{16}$ & $4 < \frac{24}{16}$; quare cum prior tantum conditio locum habeat, aequatio habebit duas radices reales, & duas imaginarias.

EXEMPLUM II.

Propoſita ſit haec aequatio:

$$x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0.$$

Quae cum pertineat ad caſum ſecundum, duas habebit radices reales. Ad reliquarum naturam inueſtigan-

dam, ob $B = 9$, $C = 12$ & $D = 4$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(144 - 32.4)} = 4$. Ideoque videndum eſt, vtrum ſit

$$4 > \frac{3}{16}.\ 16 \sqrt[3]{0}, \quad \text{hoc eſt } 4 > 0$$

$$\&\ 4 < \frac{3}{16}.\ 8 \sqrt[3]{24} \quad \text{hoc eſt } 4 < 3\sqrt[3]{3}$$

quorum vtrumque cum eueniat, aequatio propoſita quatuor habebit radices reales.

EXEMPLUM III.

Propoſita ſit haec aequatio:

$$x^4 + xx - 2x + 6 = 0.$$

Quae cum pertineat ad caſum tertium, duae radices certo erunt imaginariae. Tum verò eſt $B = 1$; $C = 2$ & $D = 6$, ideoque $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{\left(4 - \frac{64}{3}\right)}$, quae quantitas cum ſit imaginaria, & duae reliquae radices certo erunt imaginariae.

EXEMPLUM IV.

Sit propoſita aequatio haec:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0.$$

Eliminetur primo ſecundus terminus, ſubſtituendo $x = y + 1$ fiet

$$\begin{array}{rcl} x^4 & = & y^4 + 4y^3 + 6yy + 4y + 1 \\ -4x^3 & = & - 4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 \\ +8x^2 & = & + 8y^2 + 16y + 8 \\ -16x & = & - 16y - 16 \\ +20 & = & + 20 \\ \hline \text{Ergo} & & y^4 + 2yy - 8y + 9 = 0 \end{array}$$

quae

quae cum pertineat ad casum tertium, duas radices habebit imaginarias. Tum vero ob $B = 2$, $C = 8$, $D = 9$, erit $\sqrt{(CC - \frac{32}{9}. BD)} = \sqrt{(64 - 64)} = 0$. Comparetur ergo $D = 9$ cum $\frac{3}{16}. 8 \sqrt[3]{-8} = -3$. Cum ergo sit $D = 9 > -3$, etiam duae reliquae radices erunt imaginariae.

EXEMPLUM V.

Sit proposita haec aequatio: $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$ *cuius radices constat esse,* $1, 2, 4.$ & -3.

Quod si autem regulas applicemus, sublato secundo termino ponendo $x = y + 1$ fiet: $y^3 - 13yy + 12y + 0 = 0$ quae cum casu secundo comparata dat $B = 13$, $C = 12$, $D = 0$. Debet ergo esse $D > \frac{3}{16}. 24. \sqrt[3]{-24}$; seu $0 > -9\sqrt[3]{3}$ & $D < 0$; cum igitur D non sit maius quam 0, aequatio quatuor radices reales habere indicatur. Si enim sit $D = 0$, altera aequatio abit in $D < \frac{3}{16} \left(\frac{16\,BD}{9\,C}\right) \sqrt[3]{4\,C}$ ideoque $1 < \frac{B}{3C} \sqrt[3]{4\,C}$, seu $27\,CC < 4\,B^3$: est vero $27. 144 < 4. 13^3$ seu $36. 27 < 13^3$.

310. Opus foret maxime difficile, si simile iudicium ad aequationes altiorum graduum transferre vellemus, propterea quod aequationum differentialium radices plerumque exhiberi non possunt; quoties autem has radices assignare licet, ex traditis principiis facile colli-

colligitur, quot aequatio propofita habeat radices reales & imaginarias. Hinc omnis aequationis, quae tantum ex tribus terminis conftat, radices, vtrum fint reales an imaginariae? definiri poterunt. Sit enim propofita haec aequatio generalis:

$$x^{m+n} + Ax^{n} + B = o = z$$

Sumatur eius differentialis $\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$, qua nihilo aequali pofita, erit primo $x^{n-1} = o$; vnde fi n fuerit impar numerus, nulla radix maximum minimumue exhibens oritur: fin autem fit n numerus par, vna radix in computum ducenda erit $x = o$. Tum vero erit $(m+n)x^{m} + nA = o$; quae aequatio, fi m fit numerus par, & A affirmatiua quantitas, nullam habet radicem realem. Hinc fequentes cafus erunt expendendi.

I. *Sit* m *numerus par &* n *numerus impar*, & radix $x = o$ non valebit. Si igitur fuerit A quantitas affirmatiua, nulla prorfus habebitur radix maximum minimumue exhibens; vnde ob $m+n$ numerum imparem aequatio propofita vnicam habebit radicem realem. Sin autem fuerit A quantitas negatiua; puta $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$: vnde $\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$.

Ex quibus valoribus fit:

$$\mathfrak{A} = (x^{m} - E)x^{n} + B = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

atque $\mathfrak{B} = +\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Si igitur fuerit

fuerit igitur $\mathfrak{A}$ quantitas negatiua, seu $\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} > B$, aequatio vnam habebit radicem realem $> \alpha$. Si insuper fuerit $B > -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}$, hoc est ambas conditiones in vnam complectendo, si fuerit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m n^n E^{m+n}$, tum aequatio tres habebit radices reales: &, nisi haec conditio locum habeat, aequationis vnica radix erit realis. Valent haec de aequatione $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, si fuerit m numerus impar: vbi si E fuerit numerus negatiuus, aequatio semper vnicam radicem habebit realem.

II. Sint ambo numeri m & n impares, vt sit $m+n$ numerus par, nullaque radix $x = 0$ in computum veniat. Quia est $(m+n)x^m + nA = 0$, erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$, quae vnica radix si sit $= \alpha$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{mA}{m+n}x^n + B = -\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Qui valor si fuerit negatiuus, aequatio proposita duas habebit radices reales, contra nullam. Aequatio ergo proposita $x^{m+n} + Ax^n + B = 0$ duas habebit radices reales, si fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$; sin fuerit $m^m n^n A^{m+n} < (m+n)^{m+n} B^m$, nulla prorsus radix erit realis.

III. Sint ambo numeri m & n pares, erit $m+n$ pariter numerus par: vnaque radix $x = 0$ maximum mi-

nimumue praebebit: quae erit vnica, si A fuerit quantitas affirmatiua, vnde facto $\alpha = 0$, erit $\mathfrak{A} = B$. Quare si fuerit B quoque quantitas affirmatiua, aequatio nullam habebit radicem realem; sin autem B sit quantitas negatiua, duae habebuntur radices reales, neque plures, si quidem A fuerit quantitas affirmatiua. At ponamus esse A quantitatem negatiuam seu $A = -E$, erit $x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; habebimusque tria maxima vel minima: nempe $\alpha = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$; $\beta = 0$; $\gamma = -\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$. Quibus ipsius $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$ respondent valores $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$; $\mathfrak{B} = B$; $\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Si igitur B sit quantitas negatiua, ob $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{C}$ negatiuas, aequatio duas tantum habebit radices reales, propterea quod quoque $\mathfrak{B} = B$ sit negatiuum. At si B fuerit quantitas affirmatiua, aequatio quatuor habebit radices reales, si sit $(m+n)^{m+n} B^m < m^m \cdot n^n E^{m+n}$. Nullam autem habebit radicem realem, si fuerit $(m+n)^{m+n} B^m > m^m n^n E^{m+n}$.

IV. Sit m numerus impar & n numerus par: atque radix $x = 0$ dabit maximum vel minimum. Praeterea vero erit $x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Si ergo A sit numerus affir-

affirmatiuus, fiet $\alpha = 0$ & $\beta = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$; hincque

$\mathfrak{A} = B$, & $\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$. Quare si sit B quantitas negatiua, puta $B = -F$, atque insuper fuerit $m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n} F^m$, aequatio tres habebit radices reales; contra vnica tantum erit realis. Sin autem sit A quantitas negatiua puta $A = -E$, fiet

$x = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ & $\beta = 0$, quibus respondent $\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$ & $\mathfrak{B} = B$.

Quare aequatio tres habebit radices reales, si fuerit B quantitas affirmatiua, & $m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$, quae proprietas nisi locum inueniat, aequatio vnicam habebit radicem realem.

311. Sint omnes coefficientes $= 1$, atque denotantibus μ & ν numeros integros, aequationes sequentes ita diiudicabuntur:

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ vnicam habebit radicem realem:

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$, tres habebit radices reales, si fuerit

$(2\mu+2\nu-1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu-1)^{2\nu-1}$,

 quod

quod cum nunquam fieri possit, aequatio semper vnicam radicem realem habebit:

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0$ duas habet radices reales.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$ nullam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$ duas habet radices reales.

$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$ vnicam habet radicem realem.

$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$ vnicam habet radicem realem.

Ceterum quia in casu tertio ambo exponentes sunt pares, is ponendo $xx = y$ ad formam simpliciorem reduci potest, ideoque hic casus praetermitti posset. Quo facto affirmari poterit, nullam aequationem tribus terminis constantem plures tribus habere posse radices reales.

EXEMPLUM.

Quaerantur casus, quibus aequatio haec $x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$ *tres habeat radices reales.*

Quia haec aequatio pertinet ad casum quartum, patet quantitates A & B, esse debere signis contrariis affectas. Quare nisi huiusmodi habeat formam, vnicam habebit radicem realem: sin autem aequatio proposita fuerit huiusmodi

modi $x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0$, quo ea habeat tres radices reales, necesse est vt sit $3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3$ seu $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$. Quodsi ergo fuerit $B = 1$, oportet esse, $A^5 > \frac{3125}{108}$, seu $A > 1,960132$. Si ergo sit $A = 2$ ista aequatio $x^5 - 2x^2 + 1 = 0$ tres habet radices reales, quarum cum vna sit $x = 1$; sequitur hanc aequationem biquadratam $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, duas habere radices reales. Quod quidem tum ex his datis praeceptis intelligi potest, tum ex iis, quae in libro superiori sunt demonstrata, manifestum est, vbi ostendimus, quamuis aequationem paris gradus, cuius terminus absolutus sit numerus negatiuus, habere semper duas radices reales.

312. Ex his principiis quoque aequationes, quae constant quatuor terminis, diiudicari poterunt, dummodo aequationis differentialis radices commode exhiberi queant, quod euenit, si exponentes ipsius x vel in tribus anterioribus, vel in tribus posterioribus terminis sint in arithmetica progressione. Cum autem haec diiudicatio in genere suscepta ad plures perducatur casus, eam in nonnullis exemplis absoluamus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec aequatio $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Facto $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, erit $\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3xx$, quo valore nihilo aequali posito fiet primo $xx = 0$,

 qui

qui duplex valor pro nullo reputandus. Tum vero erit $7x^4 = 10x^2 - 3$, vnde fit $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$; & quatuor valores pro x emergent, qui fecundum magnitudinem ordinati, fequentes pro z praebebunt valores:

$\alpha = 1$	$\mathfrak{A} = -a$
$\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\delta = -1$	$\mathfrak{D} = -a.$

Si ergo fit a numerus affirmatiuus, erit vel $a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, vel $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, priori cafu ob $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, omnes negatiuas, aequatio propofita vnicam habebit radicem realem $x > 1$. Pofteriori cafu fi $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$ aequatio tres habebit radices reales, primam > 1, fecundam contentam inter limites 1 & $\sqrt{\frac{3}{7}}$, & tertiam intra limites $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ & $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Sin a fit quantitas negatiua ponendo $x = -y$, aequatio perducetur ad formam priorem. Quo ergo aequatio propofita tres habeat radices reales, neceffe eft vt fit $a < 0{,}0916134$ vel $a < \frac{1}{11}$.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec aequatio:

$$ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0.$$

Quia hic exponentes trium posteriorum terminorum sunt in arithmetica progressione, ponatur $x = \frac{1}{y}$ atque aequatio transmutabitur in hanc:

$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0$, ponatur ergo $z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$, eritque differentiando $\frac{dz}{dy} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0$, ex qua aequatione primo fit $y = 0$; tum vero erit $y^6 = \frac{50y^3 - 6}{96}$ & $y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$, ideoque vel $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ vel $y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$. His ergo tribus radicibus secundum magnitudinem dispositis, respondentes ipsius z valores ita se habebunt:

$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$.
$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a.$

Quodsi ergo fuerit $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, aequatio proposita duas habebit radices reales, alteram $> \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, alteram < 0:

at

at praeter has inſuper habebit duas radices reales, ſi ſimul fuerit 𝔅 quantitas affirmatiua, hoc eſt, ſi fuerit $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Quamobrem aequatio propoſita quatuor habebit radices reales, ſi quantitas a contineatur intra limites $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ & $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; qui limites proxime ſunt: $0,48075$ & $0,50674$. Poſito ergo $a = \frac{1}{2}$, haec aequatio $x^8 - 6x^6 + 20x^3 - 24 = 0$ quatuor habet radices reales intra limites ∞; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$; 0; $-\infty$; ergo tres erunt affirmatiuae & vna negatiua.

CAPUT

CAPUT XIII.

DE CRITERIIS RADICUM IMAGINARIARUM.

313.

In capite praecedenti modum exhibuimus naturam radicum cuiusque aequationis explorandi, ita vt eius beneficio, si proponatur aequatio quaecunque, inueniri possit, quot ea radices habeat reales, & quot imaginarias. Plerumque quidem haec inuestigatio difficillime instituitur, cum aequatio differentialis ita est comparata, vt eius radices exhiberi nequeant. Quanquam autem his casibus eadem operatio ad aequationem differentialem ipsam accommodari, eiusque radicum natura ex ipsius differentiali indagari, hincque illius radices proxime assignari possent; tamen labor nimium saepissime fieret molestus. Quamobrem in hoc negotio saepenumero sufficit eiusmodi criteria nosse, ex quorum praesentia tuto concludi possit, inesse in aequatione proposita radices imaginarias; etiamsi ex eorum absentia vicissim inferri nequeat, omnes prorsus radices esse reales. Quae cognitio etsi est imperfecta, tamen frequenter vsu non destituitur: quocirca his criteriis explicandis praesens caput destinauimus.

314. In capite igitur praecedenti vidimus, si aequatio quaecunque:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum etiam eius differentialem

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

omnes ſuas radices habituram eſſe reales. Simul vero oſtendimus, etiamſi aequatio differentialis omnes habeat radices reales; tamen inde non ſequi, ipſius aequationis propoſitae omnes radices futuras eſſe reales. Interim tamen, ſi aequatio differentialis habeat radices imaginarias, tum ſemper recte concludimus, aequationem ipſam propoſitam ad minimum totidem habere debere radices imaginarias. Ad minimum dico: fieri enim poteſt, vt ipſa aequatio plures habeat radices imaginarias. Hoc ergo modo ex aequatione differentiali plus concludi non poteſt, quam, ſi ea habeat radices imaginarias, ipſam propoſitam aequationem eiusmodi radices quoque habere debere, & quidem ad minimum totidem.

315. Si aequatio propoſita multiplicetur per poteſtatem quamcunque x^m, denotante m numerum integrum affirmatiuum; tum quia haec noua aequatio omnes radices habebit reales, ſi quidem propoſitae radices omnes fuerint reales: tum quoque eius differentialis, poſtquam per x^{m-1} fuerit diuiſa, radices erunt reales omnes. Hinc ſi haec aequatio:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque iſta aequatio

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \&c. = 0$$

om-

omnes radices habebit reales. Ob eandem rationem, si haec multiplicetur per x^k & denuo differentietur, aequatio resultans:

$$(m+n)(k+n)x^n-(m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1}+(m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2}-\text{\&c.}=0$$

omnes adhuc radices habebit reales: sicque quousque libuerit, vlterius progredi licet. Sin autem huiusmodi aequatio radices imaginarias habere deprehendatur, tum simul certum erit, ipsam aequationem propositam saltem totidem radices imaginarias esse habituram.

316. Si aequatio proposita, antequam differentiatur, per nullam potestatem ipsius x multiplicetur, tum iudicium ad aequationem vno gradu inferiorem deducitur. Ita si aequatio proposita

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{\&c.} = 0$$

omnes radices habeat reales, tum quoque eius differentiales omnium ordinum omnes radices habebunt reales. Quare & sequentium aequationum omnium radices erunt reales:

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\text{\&c.}=0$$

$$n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}-\text{\&c.}=0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+\text{\&c.}=0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5}+\text{\&c.}=0$$

&c.

quae aequationes ad sequentes formas reuocantur:

$$x^{n-1} - \frac{(n-1)}{n} Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{(n-2)}{n} Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-5} + \&c. = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{(n-3)}{n} Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-6} + \&c. = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{(n-4)}{n} Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{n-7} + \&c. = 0$$

&c.

317. Hoc igitur modo iudicium ad aequationem dati gradus inferioris, quam eſt ipſa propoſita, reduci poteſt. Sic ſi m fuerit numerus quicunque minor quam n, tum ſi aequatio propoſita omnes radices habeat reales, tum quoque huius aequationis gradus m omnes radices erunt reales:

$$x^m - \frac{m}{n} Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{m-3} + \&c. = 0.$$

Quare ſi ponatur $m = 2$, prodibit iſta aequatio:

$$x^2 - \frac{2}{n} Ax + \frac{2.1}{n(n-1)} B = 0,$$

cuius radices debebunt eſſe reales, ſi quidem aequatio propoſita $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0$, omnes habeat radices reales. Cum autem iſta aequatio quadratica radices reales habere nequeat, niſi ſit $\frac{AA}{nn} > \frac{2.1}{n(n-1)} B$, ſequitur, aequationis propoſitae radices

ces omnes reales eſſe non poſſe, niſi ſit $AA > \frac{2n}{n-1}B$. Quamobrem ſi fuerit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, hoc certum erit ſignum, aequationis propoſitae ad minimum duas radices fore imaginarias.

318. Hinc ergo aſſecuti ſumus affectionem neceſſariam, qua coefficientes trium primorum terminorum affecti eſſe debent, ſi quidem aequationis propoſitae omnes radices fuerint reales. Hocque eſt eiusmodi criterium, vti initio meminimus: ſcilicet etiamſi caſu $AA > \frac{2n}{n-1}B$, nihil pro realitate radicum ſequatur, at ſi ſit $AA < \frac{2n}{n-1}B$, hoc tamen certum ſit ſignum duarum ſaltem radicum imaginariarum. Sic vt omnes radices ſint reales, ſucceſſiue pro n numero 2, 3, 4, 5, &c. ſubſtituendo requiritur, vt ſequitur:

$x^2 - Ax + B = 0$ . . . . $A^2 > 4B$
$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ . . . . . . $A^2 > \frac{6}{2}B$
$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ . . . . $A^2 > \frac{8}{3}B$
$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$ . . $A^2 > \frac{10}{4}B$

Hinc ſi terminus ſecundus deſit, tertiique coefficiens B ſit affirmatiuus, vt aequatio ſit huiusmodi:

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0,$$

haec omnes radices reales habere nequit, ſed ad minimum duae erunt imaginariae.

319. Huiusmodi vero criteria pro coefficientibus sequentium terminorum erui possunt, si perpendamus aequationem hanc:

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$$

totidem habere radices tam reales quam imaginarias, quot ipsa aequatio proposita contineat. Hacc enim aequatio ex illa oritur, si ponatur $x = \frac{1}{y}$, ita vt ex radicibus huius aequationis simul radices illius habeantur. Quare si aequatio proposita omnes radices habeat reales, tum quoque reciprocae istius differentialis, scilicet huius $-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - \&c. = 0$ radices omnes erunt reales. Substituatur in hac iterum x pro $\frac{1}{y}$, atque emerget ista aequatio:

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \&c. = 0,$$

cuius radices propterea omnes erunt reales, si radices aequationis propositae fuerint tales. Hinc iam patet, si fuerit $n = 3$, necesse esse vt sit $BB > 3AC$.

320. Differentietur autem ista aequatio vlterius, atque prodibunt:

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} - \&c. = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} - \&c. = 0$$

&c.

Gene-

Generaliter ergo, si m sit numerus minor quam n, erit:

$$Ax^m - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2} - \&c. = 0.$$

Si iam ponatur $m = 2$, habebitur ista aequatio:

$$Ax^2 - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)}C = 0,$$

cuius radices vt sint reales, oportet esse $\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$. Quare si aequatio proposita omnes habeat radices reales erit $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$. Atque si fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, hoc certum est signum, aequationem propositam ad minimum duas habere radices imaginarias. Si igitur sit $n = 3$, criterium erit $BB > 3AC$; si sit $n = 4$; erit $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}AC$; si $n = 5$, erit $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}AC$, & ita porro.

321. Vt haec criteria ad sequentes coefficientes transferamus, resumamus aequationem differentialem in y inuentam:

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \&c. = 0$$

hancque denuo differentiemus, vt habeamus:

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \&c. = 0$$

quae restituto $\frac{1}{x}$ loco y dabit:

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

ex cuius vlterioris differentiatione sequuntur hae aequationes:

Bx^{n-3}

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2}Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)}Dx^{n-5} - \&c. = 0$$

& generaliter

$$Bx^{m} - \frac{3m}{n-2}Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)}Dx^{m-2} - \&c. = 0$$

Quodſi igitur ponamus $m = 2$ prodibit aequatio quadrata:

$$Bx^{2} - \frac{2.\,3}{n-2}Cx + \frac{6.\quad 2}{(n-2)(n-3)}D = 0$$

cuius radices erunt reales, ſi fuerit $\frac{9\,CC}{(n-2)^2} > \frac{6.\,2\,BD}{(n-2)(n-3)}$ ſeu $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$. Quare ſi aequatio propoſita omnes radices habeat reales, erit $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$, atque ſi haec conditio deficiat, aequatio certo duas ad minimum habebit radices imaginarias.

322. Si aequationem ſuperiorem $2B - 6Cy + 12Dy^2 - \&c. = 0$ denuo differentiemus, prodibit:

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \&c. = 0, \text{ ſiue}$$
$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \&c. = 0,$$

quae reſtituto x loco $\frac{1}{y}$ abibit in hanc:

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

ex cuius vlteriori differentiatione ſequuntur:

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{(n-3)}Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \&c. = 0$$

Cx^{n-5}

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)Dx^{n-6}}{n-3} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-7} - \&c.$$

& generaliter

$$Cx^{m} - \frac{4mD}{n-3}x^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{m-2} - \&c. = 0.$$

Ponamus $m = 2$, eritque $Cx^2 - \frac{2.\,4}{n-3}Dx + \frac{2.\,10}{(n-3)(n-4)}E = 0$ ex qua si eius radices sint reales sequitur fore:

$$\frac{4.\,4}{(n-3)^2}DD > \frac{2.\,10}{(n-3)(n-4)}CE \quad \text{seu} \quad DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE.$$

323. Ex his iam satis perspicitur relatio omnium coefficientium. Generatim ergo si aequatio haec:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$$

omnes radices habeat reales; erit

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DF$$

&c.

Tttt Quarum

Quarum conditionum si vna desit, aequatio ad minimum duas habebit radices imaginarias. Atque si ista criteria a se inuicem non pendeant, facile perspicitur, quotquot eorum non conueniant, totidem dari paria radicum imaginariarum. Quamuis autem hae conditiones omnes in quapiam aequatione locum habeant, tamen inde non sequitur, nullas dari radices imaginarias; quin potius euenire potest, vt hoc non obstante omnes radices sint imaginariae. Cauendum ergo est, ne his criteriis plus tribuatur, quam ipsis vi principiorum, vnde sunt deducta, tribui potest.

324. Facile autem apparet non singula criteria, quae deficiunt, binas radices imaginarias indicare posse; in aequatione enim n dimensionum, quia habentur $n+1$ termini, atque ex singulis praeter primum & vltimum criterium desumi potest, omnino criteria habebuntur $n-1$; neque tamen si singula deficiant, aequatio $2n-2$ radices imaginarias habere poterit, propterea quod omnino tantum n habeat radices. Vnum autem criterium semper duas radices imaginarias patefacit, & quia fieri potest, vt duo criteria huiusmodi radicum non plures ostendant, videndum est vtrum haec duo criteria sint contigua nec ne: priori casu numerus radicum imaginariarum non augebitur, posteriori vero, quia criteria litteras prorsus diuersas inuoluunt, vnum quodque binas radices imaginarias monstrabit. Ita etiamsi fuerit

$AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ & $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AB$, tamen

men hinc non necessario quatuor radices imaginariae indicantur, sed vtrumque fortasse easdem binas indicat. Quodsi vero fuerit $AA < \frac{2n}{1(n-1)}B$ & $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$ existente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, quatuor radices imaginariae indicabuntur.

325. Ex criteriis ergo radicum imaginariarum se immediate insequentibus plus non sequitur, quam ex vno; sin autem ea ordine interrupto procedant, vt inter bina quaeque criterium vnum vel plura contraria interiaceant, tum ex vnoquoque binae radices imaginariae concludi poterunt. Quae consideratio sequentem regulam suppeditat. Aequationis propositae singulis terminis, praeter primum & vltimum, inscribantur coefficientes criteriorum ante inuenti, hoc modo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \frac{2n}{1(n-1)} & & \frac{3(n-1)}{2(n-2)} & & \frac{4(n-2)}{3(n-3)} & & \frac{5(n-3)}{4(n-4)} & & \&c. & \\ x^n & - & Ax^{n-1} & + & Bx^{n-2} & - & Cx^{n-3} & + & Dx^{n-4} & - & \&c. & =0 \\ + & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot & & \&c. & \end{array}$$

Tum examinetur quadratum cuiusque coefficientis, vtrum sit maius an minus, quam fractio inscripta per productum adiacentium coefficientium multiplicata, priori casu termino subscribatur signum +, posteriori signum −; primo vero termino & vltimo perpetuo signum + subscribatur. Quo facto, quot signorum

 horum

horum ſubſcriptorum variationes occurrunt, totidem radices imaginarias aequatio ad minimum habere cenſenda erit.

326. Haec eſt regula a *Neutono* inuenta ad radices imaginarias cuiusque aequationis explorandas; de qua autem probe tenendum eſt, quod iam annotauimus, ſaepenumero fieri poſſe, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam hac methodo deteguntur. Hinc alii operam dederunt, vt ſimiles regulas alias inuenirent, quae numerum radicum imaginariarum exactius praeberent, ita vt verus iſtiusmodi radicum numerus minus ſaepe eum, quem regula oſtendat, excederet. In hoc genere imprimis proſtat regula *Campbelli* Arithmeticae *Neutoni* vniuerſali ſubiuncta, quam propterea hic explicari conueniet, etiamſi non ſit perfecta. Nititur autem hoc lemmate: Si fuerint α, β, γ, δ, ε, &c. quantitates, earumque numerus ſit m, ponatur ſumma harum quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c. = S$, ſumma quadratorum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = V$, erit vtique $V > o$. Sed cum ſit productum ex binis $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \&c. = \frac{SS - V}{2}$; erit $(m-1)V > SS - V$ ſeu $mV > SS$. Nam ſi differentiarum inter binas quantitates quadrata ſumantur, erit eorum ſumma

$$= (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + \&c.$$
$$= (m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\&c.) - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\&c.)$$
$$= (m-1)V - 2\,\frac{(SS-V)}{2} = mV - SS.$$ Cum

igitur

igitur summa quadratorum realium fit semper affirmatiua, erit $mV - SS > 0$ ideoque $mV > SS$.

327. Hoc lemmate praemisso si habeatur haec aequatio:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0,$$

eiusque omnes radices fuerint reales numero n, quae sint a, b, c, d, e, &c. erit vti constat ex natura

aequationum:	numerus termin.
$A = a + b + c + d + \&c.$	n
$B = ab + ac + ad + bc + bd + \&c.$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$D = abcd + abce + abde + \&c.$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
&c.	

Sumantur iam singulorum harum serierum terminorum quadrata, ac ponatur:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.$$
$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \&c.$$
$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \&c.$$
$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \&c.$$

&c.

erit ex natura combinationum:

$$P = A^2 - 2B$$

$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$

$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H \quad \&c.$$

328. Vi igitur lemmatis praemissi habebimus:

$$n \; P > AA$$

$$\frac{n(n-1)}{1.\;2} Q > BB$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} R > CC$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4} S > DD \qquad \&c.$$

Quodsi ergo loco P, Q, R, &c. valores ante inuenti substituantur, obtinebimus sequentes radicum realium proprietates:

$$nAA - 2nB > AA \quad \text{seu} \quad AA > \frac{2n}{n-1} B$$

$$\frac{n(n-1)}{1.\;2} BB - \frac{2n(n-1)}{1.\;2} AC + \frac{2n(n-1)}{1.\;2} D > BB,$$

siue

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1.\;2.}}{\frac{n(n-1)}{1.\;2.} - 1} (AC - D)$$

simi-

ſimilique modo aequationes ſequentes praebent:

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3.}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3.}-1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4.}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4.}-1}(CE - BF + AG - H)$$

Hinc ergo cuiusque coefficientis quadratum non ſolum cum producto proxime adiacentium comparatur, ſed etiam cum rectangulis binorum quorumque vtrinque aeque diſtantium; ita tamen vt horum rectangulorum ſigna alternatim mutentur.

329. Singulis igitur aequationis terminis praeter primum & vltimum inſcribi debent fractiones, quarum numeratores ſint vnciae binomii ad ſimilem dignitatem eleuati duplicatae, denominatores vero eaedem vnciae vnitate minutae. Ita conſiderando aequationes quadratas, cubicas, biquadratas &c. ſi earum radices omnes fuerint reales, erit:

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0 \quad ; \quad A^2 > 4B$$

Pro aequatione cubica:

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

erit $A^2 > 3B$ & $B^2 > 3AC$

Pro

Pro aequatione biquadrata:

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

erit $A^2 > \frac{8}{3}B$; $B^2 > \frac{12}{5}(AC - D)$; $C^2 > \frac{8}{3}BD$

Pro aequatione potestatis quintae:

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

erit $AA > \frac{10}{4}B$; $B^2 > \frac{20}{9}(AC-D)$; $C^2 > \frac{20}{9}(BD-AE)$ & $D^2 > \frac{10}{9}CE$.

Pro aequatione potestatis sextae:

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{5}}{E}x + F = 0$$

erit $A^2 > \frac{12}{5}B$; $B^2 > \frac{30}{14}(AC-D)$; $C^2 > \frac{40}{19}(BD-AE+F)$; $D^2 > \frac{30}{14}(CE-BF)$; $E^2 > \frac{12}{5}DF$. &c.

330. Si igitur quodpiam criterium fallat, id erit indicium duas ad minimum inesse radices imaginarias in aequatione proposita. Cum autem si singula fallant, aequatio ideo non duplo plures habere queat radices imaginarias, simili modo iudicium his casibus erit absolvendum, quem ante pro Neutoniana regula indicauimus. Scilicet si cuiusque termini quadratum maius fuerit quam fractio inscripta per producta terminorum adiacentium & vtrinque aequidistantium multiplicata, tum isti termino subscribatur signum +, contra vero signum —; primo vero & vltimo termino constanter subscribatur signum +. Quo facto inspiciatur ordo signorum

rum horum ſubſcriptorum, & quoties occurrit variatio, toties radix imaginaria indicabitur. Quoties ergo haec regula plures radices imaginarias indicat, quam Neutoniana, toties quoque ad veritatem magis accedit. Interim tamen fieri poteſt, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam per vtramque regulam indicantur.

331. Falleremur ergo, ſi his criteriis tanquam perfectis ſignis radicum realium & imaginarium vti vellemus; propterea quod fieri poteſt, vt aequatio plures habeat radices imaginarias, quam haec criteria indicant: error autem eo maior eſſe poſſet, quo altioris gradus fuerit aequatio propoſita. Nam in aequatione quadrata haec criteria ita veritati ſunt conſentanea, vt ſi nullas radices imaginarias indicent, etiam aequatio nullas ſit habitura. Aequatio autem cubica duas radices imaginarias habere poteſt, etiamſi neutra regula, (ambae autem hoc caſu adhuc conueniunt) eas exhibeat. Hos igitur caſus inueſtigaturi, ſit propoſita haec aequatio cubica generalis:

$$x^3 - \overset{3}{A}x^2 + \overset{3}{B}x - C = 0$$

in qua ſi fuerit $AA > 3B$ & $BB > 3AC$ neutra regula radices imaginarias indicat. Supra autem (306) vidimus ad id, vt nullae radices imaginariae adſint requiri primo vt ſit $B < \frac{1}{3}AA$, quam conditionem quoque ambae regulae requirunt. Sit igitur $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, atque neceſſe eſt vt C contineatur intra hos limites: $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ & $\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$.

Vtraque autem regula tantum poſtulat, vt ſit $C < \frac{BB}{3A}$, hoc eſt $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$. Quae conditio locum habere poteſt, etiamſi C non intra dictos limites contineatur.

332. Sit enim $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$: atque regulae nullas radices imaginarias indicabunt. Interim tamen in erunt duae radices imaginariae, ſi fuerit vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff - \frac{2}{27}f^3$$

vel

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff + \frac{2}{27}f^3.$$

Si igitur fuerit vel $gg > \frac{(ff + Af)^2}{27A}$ vel $gg < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$, aequatio cubica duas habebit radices imaginarias, etiamſi neutra regula eas indicet. Sumimus autem hic eſſe A quantitatem affirmatiuam, ſi enim eſſet negatiua, ponendo $x = -y$ aequatio in eiusmodi formam transmutaretur, in qua A eſſet affirmatiua. Hinc infinitae aequationes cubicae formari poſſunt, quae habeant duas radices imaginarias, etiamſi per regulam non indicentur. Sit enim $gg = \frac{(ff + Af)^2}{27A} + hh$, erit $C = \frac{(ff - AA)^2}{27A} - gg$ $= \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{3}Aff - \frac{2}{27}f^3 - hh$, & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Vel ſit $gg = \frac{(Af - ff)^2}{27A} - hh$ exiſtente $hh < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$; erit

C =

$C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3 + hh$ & $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$. Vtroque casu prodibit aequatio duas habens radices imaginarias, neutra regula indicandas. Ponamus verbi gratia $A = 4$, $f = 1$, erit $B = 5$; & ob $gg = \frac{25}{108} + hh$; erit $C = \frac{225}{108} - \frac{25}{108} - hh = \frac{50}{27} - hh$. Quare si sit $C < \frac{50}{27}$, aequatio $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ semper habebit duas radices imaginarias. At sumto $gg = \frac{1}{12} - hh$ debebit esse $hh < \frac{1}{12}$, fietque $C = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} + hh = 2 + hh$. Sit $hh = \frac{1}{16}$; atque aequatio $x^3 - 4xx + 5x - \frac{33}{16} = 0$ duas habebit radices imaginarias, etiamsi nulla regulis prodatur.

333. Quin etiam eiusmodi aequationes generales formari possunt, in quibus neutra regula radices imaginarias exhibeat, etiamsi tamen saepissime duae pluresue insint. Euenit hoc si perpetuo duo signa similia se mutuo excipiant, vti:

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

vel $x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \&c. = 0$, hic vtraque regula nullam vnquam radicem imaginariam prodit. Quod autem saepissime huiusmodi radices continere queant, vel ex aequatione cubica elucet $x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$, quae posito $ff = AA + 3B$ semper habet duas radices imaginarias, si fuerit vel $-C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff - \frac{2}{27}f^3$ vel $-C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Aff + \frac{2}{27}f^3$. Interim tamen & hos casus ex regulis elicere licet, si aequatio ope substitutionis in aliam formam transformetur. Ponatur $x = y + k$, fietque:

$$\begin{array}{l} y^3 + 3ky^2 + 3kky + k^3 \\ \quad - Ayy - 2Aky - Akk \\ \qquad\quad - By - Bk \\ \qquad\qquad\quad + C \end{array} = 0$$

quae secundum regulas examinata dabit primo quidem sponte $(3k - A)^2 > 3(3kk - 2Ak - B)$; at quo sit $(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - Akk - Bk + C)$, quod est alterum criterium, necesse est vt sit: $BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0$, quicunque valor ipsi k tribuatur. Sumatur ergo k ita, vt haec expressio minimum valorem adipiscatur, quod fiet ponendo $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$, & si ista expressio adhuc fuerit > 0, probabile erit aequationem propositam nullas habere radices imaginarias. Fiet autem

$$BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0 \text{ seu}$$

$BB + 3AC > \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)}$. Cum ergo sit $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$,

erit $4ff(\frac{1}{9}f^4 - \frac{2}{9}AAff + \frac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\frac{1}{3}Aff - \frac{1}{3}A^3 - 9C)^2$ seu

$$4f^6 - A8^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff > A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

vel $4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$

vnde factoribus sumtis esse debebit:

$(2f^3 + A^3 - 3Af + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Af - 27C) > 0$.

Hincque regulae radices imaginarias ostendent, si fuerit vel

$C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$ & $C > -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$ vel

$C < -\frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$ & $C < -\frac{1}{27}A^2 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$.

Quae

Quae ſunt eaedem conditiones, quas ſupra inuenimus. Patet ergo idonea aequationis propoſitae transmutatione regulas hoc capite traditas ita perfici poſſe, vt a veritate non diffideant, etiamſi conuertantur.

334. Ex his principiis quoque regula Harriotti, qua quaelibet aequatio tot radices affirmatiuas habere praedicatur, quot dentur ſignorum variationes, tot vero negatiuas, quot dentur eiusdem ſigni ſucceſſiones, demonſtrari poteſt, quae quidem regula pro radicibus tantum realibus valet. Ponamus ergo aequationem $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \&c. = 0$ omnes radices habere reales atque affirmatiuas, atque eius differentialis $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \&c. = 0$ non ſolum omnes ſuas radices quoque habebit reales & affirmatiuas, ſed etiam huius radices conſtituent limites radicum illius aequationis. Praeterea vero poſito $x = \frac{1}{y}$ haec aequatio $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \&c. = 0$ omnes quoque radices habebit reales affirmatiuas, ſed reciprocas illius, ita vt quae radices in illa aequatione ſint maximae, hae in iſta fiant minimae. His poſitis ſi illa aequatio propoſita continuo differentietur, donec ad aequationem primi ordinis perueniatur, quae erit $x - \frac{1}{n}A = 0$, (317) huius radix adhuc erit affirmatiua, ideoque coefficiens ſecundi termini habebit ſignum — vti aſſumſimus. Sin autem iſte coefficiens haberet ſignum +, tum certo ſequeretur, aequationem

 pro-

propositam non omnes radices habere affirmatiuas, sed vnam ad minimum fore negatiuam, & quidem eam, quae limitibus hucusque perductis respondeat.

335. Si aequatio proposita in sui reciprocam conuertatur & differentietur, tum vero iterum x restituatur, atque differentiationes continuentur, donec perueniatur ad aequationem simplicem, quae ex §. 320. erit huiusmodi $Ax - \frac{2}{n-1} B = 0$, cuius propterea radix quoque debet esse affirmatiua, si quidem proposita omnes suas radices habeat reales affirmatiuas, hincque secundus & tertius terminus diuersa signa habebunt. Quodsi ergo hi duo termini similia habeant signa, ad minimum vna radix negatiua indicabitur, respondens limiti hac aequatione signato, qui diuersus erit a limite praecedente aequatione indicato, propterea quod hic radices semel sunt in suas reciprocas conuersae: vnde concluditur, si tres termini aequationis initiales paria habuerint signa, tum duas radices negatiuas indicari.

336. Simili modo si conuersiones & differentiationes secundum §. 321. instituantur, atque eousque continuentur, donec ad aequationem simplicem $Bx - \frac{3}{n-2} C = 0$ perueniatur, & huius aequationis radix esse debet affirmatiua, si quidem propositae aequationis omnes radices fuerint tales; vnde si termini tertius & quartus paria habeant signa, indicabitur vna radix negatiua. Sicque perpetuo, si duo quicunque termini contigui aequalibus signis

ſignis fuerint affecti, vna radix negatiua proditur; ideoque quotcunque fuerint eiusdem ſigni ſucceſſiones, totidem ad minimum aequatio propoſita habebit radices negatiuas, quoniam haec ſingula criteria ad diuerſos limites referuntur. Quod ſi autem aequatio propoſita omnes radices negatiuas habere ponatur, tum quia radices omnium aequationum differentialium ex ea deductarum debent eſſe pariter negatiuae, omnes termini aequalibus ſignis affecti eſſe debebunt. Quare ſi duo termini contigui diuerſa habeant ſigna, ex iis vna ad minimum radix affirmatiua concludetur. Atque ſimili modo, quotcunque in aequatione occurrant binorum terminorum variationes ſignorum, totidem ad minimum radices affirmatiuae ineſſe dicendae ſunt. Cum igitur aequatio omnis tot habeat radices, quot dantur duorum ſignorum contiguorum combinationes, neque plures, ſequitur quamuis aequationem, cuius omnes radices ſint reales, tot habere radices affirmatiuas, quot fuerint ſignorum contiguorum variationes, tot vero negatiuas, quot fuerint eiusdem ſigni ſucceſſiones.

CAPUT

CAPUT XIV.

DE DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM IN CERTIS TANTUM CASIBUS.

337.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x, atque haec quantitas variabilis x augeatur incremento ω, vt x abeat in $x+\omega$, tum functio y induet hunc valorem:

$$y+\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

ideoque capiet hoc incrementum:

$$\frac{\omega dy}{dx}+\frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}+\&c.$$

vti supra demonstrauimus. Quare si fiat $\omega=dx$, ita vt x suo differentiali dx crescat, tum functio y incrementum accipiet $=dy+\frac{1}{2}ddy+\frac{1}{6}d^3y+\frac{1}{24}d^4y+\&c.$ quod erit verum differentiale ipsius y. Quoniam vero huius seriei quilibet terminus ad sequentes habet rationem infinitam, prae primo omnes euanescunt, ita vt dy more consueto sumtum praebeat verum differentiale ipsius y. Simili modo vera differentialia secunda, tertia, quarta, &c. ipsius y ita se habebunt:

dd.y

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3}d^3y + \frac{7}{3.4}d^4y + \frac{15}{3.4.5}d^5y + \frac{31}{3.4.5.6}d^6y + \&c.$$

$$d^3.y = d^3y + \frac{6}{4}d^4y + \frac{25}{4.5}d^5y + \frac{90}{4.5.6}d^6y + \frac{301}{4.5.6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^4.y = d^4y + \frac{10}{5}d^5y + \frac{65}{5.6}d^6y + \frac{350}{5.6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^5.y = d^5y + \frac{15}{6}d^6y + \frac{140}{6.7}d^7y + \&c.$$

$$d^6.y = d^6y + \frac{21}{7}d^7y + \&c.$$

quae ſequuntur ex §. 56. ſi loco ω ponatur dx. Erunt ergo haec differentialia ipſius y completa, quippe in quibus ne ii quidem termini, qui reſpectu primi euaneſcunt, negliguntur. Inueniuntur autem ſinguli iſti termini, ſi functio y continuo differentietur, ponendo dx conſtans. Sic poſito $y = ax - xx$ ob $dy = adx - 2xdx$ & $ddy = -2dx^2$; erunt ipſius y differentialia completa: $dy = adx - 2xdx - dx^2$; $ddy = -2dx^2$; ſequentia autem ſunt nulla.

338. Quanquam autem generatim in his expresſionibus differentialium ſequentes termini prae primis pro nihilo reputantur; tamen in caſibus ſpecialibus, quibus ipſe terminus primus euaneſcit, haec ratio ceſſat, neque terminus ſecundus amplius negligi poterit. Sic in exemplo praecedente etiamſi formulae $y = ax - xx$ differentiale in genere eſt $= (a - 2x)dx$ reiecto termino $-dx^2$, quippe qui eſt infinities minor quam pri-

 mus

mus $(a-2x)dx$: hic tamen iſta conditio manifeſto ſubintelligitur, niſi primus terminus per ſe euaneſcat. Quocirca ſi ipſius $y = ax - xx$ quaeratur differentiale, caſu quo $x = \frac{1}{2}a$, tum id dicendum erit eſſe $= -dx^2$; ſcilicet ſi variabilis x differentiali dx creſcat, tum functionis y caſu $x = \frac{1}{2}a$ decrementum erit dx^2. Hoc autem ſolo caſu excepto perpetuo functionis y differentiale erit $= (a-2x)dx$; niſi enim ſit $x = \frac{1}{2}a$, terminus ſecundus $-dx^2$ prae primo ſemper recte negligitur. Neque vero neglectio termini dx^2 etiam in caſu $x = \frac{1}{2}a$ in errorem inducere poteſt: comparari enim differentialia prima inter ſe ſolent; vnde quia $dy = -dx^2$ caſu $x = \frac{1}{2}a$, prae differentialibus primis dx euaneſcit, perinde eſt ſiue hoc caſu habeamus $dy = 0$ ſiue $dy = -dx^2$.

339. Denotante y functionem quamcunque ipſius x, ſit differentialibus continuis ſumtis:

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \&c.$$

Hinc ergo differentialia completa, in quibus nihil negligatur, ipſius y erunt:

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \&c.$$
$$d^2.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \tfrac{1}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^3.y = rdx^3 + \tfrac{3}{2}sdx^4 + \tfrac{5}{4}tdx^5 + \&c.$$
$$d^4.y = sdx^4 + 2tdx^5 + \&c.$$
$$d^5.y = tdx^5 + \&c.$$

Niſi ergo primi termini harum expreſſionum euaneſcant, ii ſoli differentialia ipſius y exhibebunt; ſin autem quopiam

piam

piam casu primus terminus fiat $= 0$, tum sequens differentiale quaesitum exprimet. Atque si etiam secundus terminus euanescat, tum tertius terminus valorem differentialis quaesiti praebebit, sin autem & hic euanescat, quartus & ita deinceps. Vnde intelligitur nullius functionis ipsius x differentiale primum vnquam penitus euanescere; etiamsi enim fiat $p = 0$, quo casu vulgo dy euanescere censetur, tum hoc differentiale per altiorem ipsius dx potestatem exprimetur. Vti vel per $\frac{1}{2}qdx^2$, vel si etiam sit $q = 0$, per $\frac{1}{6}rdx^3$, & ita porro.

340. Quanquam autem his casibus differentiale ipsius y respectu aliorum differentialium primorum, quibuscum comparatur, recte negligitur, atque pro nihilo reputatur; tamen saepenumero eius veram expressionem nosse iuuat. Ex completa enim differentialis forma statim perspici potest, quibus casibus data functio fiat maximum vel minimum. Si enim fuerit:

$$dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \&c.$$

quo y nanciscatur maximum minimumue valorem, necesse est vt sit $p = 0$; erit ergo hoc casu $dy = \frac{1}{2}qdx^2$, & functio y, si loco x ponatur $x \pm dx$, abit in $y + \frac{1}{2}qdx^2$, eritque propterea minima, si q habeat valorem affirmatiuum, at maxima si q habeat valorem negatiuum. At si simul fiat $q = 0$, erit $dy = \frac{1}{6}rdx^3$, & functio y ponendo $x \pm dx$ loco x abibit in $y \pm \frac{1}{6}rdx^3$, neque hoc casu maximum neque minimum prodit; sin autem fiat & $r = 0$, tum posito $x \pm dx$ loco x functio y euadet $= y + \frac{1}{24}sdx^4$, quae maximum exhibet, si s fuerit quan-

titas negatiua, minimum vero, si s sit quantitas affirmatiua. Aliae occasiones, quibus differentialium completa expressio vsum habet, infra occurrent.

341. Ponamus p euanescere casu $x = a$, quod euenit si fuerit $p = (x-a)\,P$. Talis autem valor prodit, si fuerit $y = (x-a)^2 P + C$, denotante C quantitatem constantem quamcunque. Cum enim sit $pdx = (x-a)^2 dP + 2(x-a)Pdx$, erit vtique $p = 0$, posito $x = a$. Tum ergo ob $dpdx = qdx^2 = (x-a)^2 ddP + 4(x-a)dPdx + 2Pdx^2$, posito $x = a$, fiet $qdx^2 = 2Pdx^2$, atque differentiale completum hoc casu $x = a$, erit $d.y = Pdx^2$, nisi forte & P euanescat posito $x = a$, quos casus postea contemplabor. Praesens autem casus generalius hoc modo exhiberi potest. Sit $z = (x-a)^2 P + C$, atque y sit functio quaecunque ipsius z, ita vt fiat $dy = Zdz$, denotante Z functionem quamcunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$. Erit ergo $dz = (x-a)^2 dP + 2(x-a)Pdx$, & $pdx = Z(x-a)^2 dP + 2Z(x-a)Pdx$, quod membrum fit $= 0$ si $x = a$; eodemque casu neglectis terminis, qui continent factorem $x-a$, erit $qdx^2 = 2PZdx^2$, ideoque casu $x = a$, fiet $dy = PZdx^2$; postquam in PZ vbique loco x positum fuerit a. Quare si fuerit y functio quaecunque ipsius $z = (x-a)^2 P + C$, ita vt sit $dy = Zdz$, erit casu $x = a$, differentiale $dy = PZdx^2$. Fiet ergo haec functio y maxima casu $x = a$, si eodem casu fiat PZ quantitas negatiua, minima vero, si PZ fiat quantitas affirmatiua.

342.

342. Si fuerit $p = (x-a)^2 P$, casu $x = a$ quoque q euanescit, talis autem expressio pro p oritur, si fuerit $y = (x-a)^3 P + C$. Erit ergo $p\,dx = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 P dx$; $q\,dx^2 = (x-a)^3 ddP + 6(x-a)^2 dP dx + 6(x-a) P dx^2$, quorum vtrumque membrum casu $x = a$ euanescit; at vero sequens erit $r dx^3 = (x-a)^3 d^3 P + 9(x-a)^2 ddP dx + 18(x-a) dP dx^2 + 6 P dx^3 = 6 P dx^3$, posito $x = a$. Quare cum & p & q casu $x = a$ euanescat, fiet $dy = \frac{1}{6} r dx^3 = P dx^3$. Simili modo si ponatur $z = (x-a)^3 P + C$, fueritque y functio quaecunque ipsius z, ita vt sit $dy = Z dx$, ob $dz = (x-a)^3 dP + 3(x-a)^2 P dx$, fiet quoque $p = 0$ & $q = 0$, eritque $r dx^3 = 6 P Z dx^3$; vnde casu $x = a$, erit $dy = P Z dx^3$. Quare ista functio y, etiamsi casu $x = a$, fiat $p = 0$, tamen neque maximum neque minimum valorem recipit.

343. Haec differentialia facilius inueniri possunt ex ipsa differentialium natura. Cum enim differentiale ipsius y oriatur, si y a statu sequenti proximo subtrahatur, qui prodit, si loco x ponatur $x + dx$; ponamus casu primo quo erat, $y = (x-a)^2 P + C$, $x + dx$ loco x, eritque $y^I = (x-a+dx)^2 P^I + C$, vnde fiet $dy = (x-a+dx)^2 P^I - (x-a)^2 P$. Casu igitur quo $x = a$, erit $dy = P^I dx^2$, & cum P^I ad P rationem aequalitatis habeat, erit $dy = P dx$. Simili modo si fuerit $z = (x-a)^2 P + C$, erit $dz = P dx^2$; quare si sit y functio quaecunque ipsius z, ita vt sit $dy = Z dz$, erit $dy = P Z dx^2$ casu, quo ponitur $x = a$. Deinde si sit $z = (x-a)^3 P + C$, erit $z^I = (x-a+dx)^3 P^I + C$, & propterea casu $x = a$, fiet $z^I - z = dz = P dx^3$. Hinc

ſi fuerit y functio quaecunque ipſius z, atque $dy = Z dz$, erit quoque caſu $x = a$, differentiale $dy = PZ dx^3$, ſiquidem in functionibus P & Z loco x vbique ſubſtituatur a. Quoniam vero hoc caſu fit $z = C$, atque Z eſt functio ipſius z, euadet Z quantitas conſtans, talis ſcilicet functio ipſius C, qualis ante erat ipſius z.

344. Si igitur generaliter fuerit $y = (x-a)^n P + C$, quia eſt $y^1 = (x-a+dx)^n P^1 + C$, caſu $x = a$, fiet $dy = P dx^n$; vnde ſi fuerit $n > 1$, hoc differentiale reſpectu aliorum differentialium primorum, quae ipſi dx ſunt homogenea, euaneſcet. Ex praecedentibus ergo manifeſtum eſt, functionem y fieri caſu $x = a$, vel maximam vel minimam, ſi fuerit n numerus par: tum enim ſi poſito $x = a$ fiat P quantitas affirmatiua, fiet y minimum, ſin autem P fit quantitas negatiua, fiet y maximum. Hocque ergo modo ratio maximorum & minimorum multo facilius inuenitur, quam methodo ſupra expoſita, quia non opus eſt ad differentialia altiora progredi. Quod ſi vero ſit $z = (x-a)^n P + C$, atque y fuerit functio quaecunque ipſius z, vt ſit $dy = Z dz$, erit caſu $x = a$ differentiale $dy = PZ dx^n$. Notandum autem eſt, hic n ſumi pro numero affirmatiuo ſeu o maiore, ſi enim n eſſet numerus negatiuus, tum poſito $x = o$, non euaneſceret $(x-a)^n$, vti aſſumſimus, ſed adeo fieret infinite magnum.

345. Iam vidimus hoc pacto differentiale multo expeditius inueniri, quam ope ſeriei, qua ante differentiale

tiale completum expressimus; si enim sit n numerus integer, tot seriei illius termini perlustrari deberent, quot n contineat vnitates. Verum si n sit numertus fractus, tum series ista nequidem verum differentiale vnquam exhibebit. Ponamus enim esse $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, si seriem $dy = p\,dx + \frac{1}{2} q\,dx + \frac{1}{6} r\,dx^3 + \frac{1}{24} s\,dx^4 +$ &c. spectemus, fiet $p = \frac{3}{2}\sqrt{(x - a)}$, $q = \frac{3}{4\sqrt{(x - a)}}$,

$$r = \frac{-3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}}, \quad s = \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}}, \text{ \&c.}$$

Quare si ponatur $x = a$ fiet quidem $p = 0$, at sequentes termini omnes q, r, s, &c. euadent infiniti; vnde valor differentialis dy hoc casu omnino definiri non potest. At vero methodus ex ipsa differentialium natura deducta nullum dubium relinquit. Cum enim sit $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, posito $x + dx$ loco x fiet $y^{\mathrm{I}} = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, eritque, si $x = a$ ponatur, $dy = dx\sqrt{dx}$. Euanescit ergo hoc differentiale prae dx, at vero differentialia secunda cum dx^2 homogenea prae eo euanescent.

346. Euoluamus hos casus, quibus exponens n est numerus fractus aliquanto accuratius, sitque $y = P\sqrt{(x - a)} + C$, ob $y^{\mathrm{I}} = P^{\mathrm{I}}\sqrt{(x - a + dx)} + C$, fiet $dy = P\sqrt{dx}$ casu $x = a$; vnde hoc differentiale ad dx, & ad differentialia cum dx homogenea rationem tenebit infinitam. Hinc etiam patet, quid hoc casu de ratione maximi ac minimi sit tenendum. Cum enim posito $x + dx$ loco x, abeat y in $P\sqrt{(x - a)} + C + P\sqrt{dx}$, ob $\sqrt{dx}$

am-

ambiguum, functio y geminum induet valorem, alterum maiorem quam C, quem recipit posito $x = a$, alterum minorem; vnde casu $x = a$ neque maximum neque minimum fiet. Praeterea si dx capiatur negatiue tum valor ipsius y adeo fiet imaginarius. Idem tenendum est si sit $z = P\sqrt{(x-a)} + C$, & y functio quaecunque ipsius z, vt sit $dy = Z\,dz$, tum enim erit $dy = PZ\sqrt{dx}$ casu $x = a$.

347. Si proposita fuerit ista functio $y = (x-a)^{\frac{m}{n}}P + C$, cuius differentiale quaeritur casu $x = a$, erit vti ex antecedentibus colligitur $dy = P\,dx^{\frac{m}{n}}$. Quocirca si fuerit $m > n$ hoc differentiale prae dx euanescat, sin autem sit $m < n$, ratio $\frac{dy}{dx}$ erit infinite magna. Praeterea vero si n sit numerus par, differentiale dy geminum habebit valorem, alterum affirmatiuum, alterum negatiuum; sicque functio y, quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$ binos habebit valores alterum maiorem quam C alterum vero minorem; sin autem poneretur $x = a - dx$, tum y adeo fieret imaginarium; vnde hoc casu y neque maximum fit neque minimum. Ponamus nunc denominatorem n esse numerum imparem, erit numerator m vel par vel impar. Sit primo m numerus par; quia dy eundem valorem retinet, siue dx sumatur affirmatiue siue negatiue, perspicuum est, functionem y casu $x = a$ fieri siue maximam siue minimam, prout hoc casu fuerit P vel quantitas negatiua vel affirmati-

matiua. Sin autem vterque numerus m & n fuerit impar, differentiale dy in sui negatiuum abibit, posito dx negatiuo; hocque ergo casu functio y neque maximum erit neque minimum, si ponatur $x = a$.

348. Si functio y ex pluribus huiusmodi terminis, quorum singuli sint diuisibiles per $x - a$, constet, ita vt sit $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$, tum eius differentiale casu $x = a$ erit $dy = P dx^m + Q dx^n$; in qua expressione, si fuerit $n > m$, terminus secundus prae primo euanescit, ita vt tantum prodeat $dy = P dx^m$. Sin autem n sit fractio denominatorem habens parem, tum etiamsi $Q dx^n$ prae $P dx^m$ euanescat, tamen omnino negligi non potest. Ex eo enim apparet, si capiatur dx negatiue, valorem ipsius dy fieri imaginarium, quod ex solo termino primo $P dx^m$ non patet. Cum ergo si n sit fractio denominatorem habens parem, dx negatiue accipi nequeat, sin autem affirmatiue capiatur, terminus $Q dx^n$ geminum praebeat valorem: functio $y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$ quae casu $x = a$ fit $= C$, si ponatur $x = a + dx$, erit $y = C + P dx^m \pm Q dx^n$, quorum valorum vterque cum vel maior sit vel minor quam C, prout P fuerit quantitas vel affirmatiua vel negatiua, erit functio y casu $x = a$ vel minimum vel maximum secundae speciei.

349. His igitur casibus differentialia functionum vera non per regulas differentiationis consuetas inueniri possunt; quippe quae tantum valent, quamdiu differen-

tiale functionis eſt homogeneum cum dx. Sin autem caſu quopiam ſingulari differentiale functionis exprimatur per eius poteſtatem dx^n, tum regula praebet pro hoc differentiali o, ſi n fuerit numerus vnitate maior; at vero differentiale exhibet infinite magnum, ſi n ſit exponens vnitate minor. Sic ſi ipſius $y = \sqrt{(a-x)}$ differentiale quaeratur caſu $x = a$, quia eſt $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, facto $x = a$ prodit $dy = -\frac{dx}{0}$. Atque ſi differentialia ſequentia in ſubſidium vocare velimus, omnia pariter ob denominatores $= 0$ in infinitum excreſcunt, ita vt inde nihil concludi poſſit. At vero hoc caſu vidimus eſſe $dy = \sqrt{-dx}$, atque adeo imaginarium. Sin autem loco x ponatur $x - dx$, erit $dy = \sqrt{dx}$, atque adeo erit infinities maius quam dx, ita vt dx prae dy euaneſcat. Quare regula conſueta etiam hoc caſu in errorem non inducit, cum valorem ipſius dy infinitum exhibeat.

350. A regula ergo conſueta differentiationis recedendum eſt, quoties in ſerie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ &c. qua differentiale completum functionis y exprimitur, primus terminus p vel fit $= 0$ vel in infinitum excreſcit, eoque caſu differentiale ex primis principiis deriuari debet. Quoties ergo functionis y differentiale quaeritur dato ipſius x valori reſpondens, quo littera p vel infinite parua euadit vel infinite magna, toties recurrendum eſt ad ipſa prima differentiationis principia. Omnibus vero

vero reliquis casibus, quibus fit neque $p = 0$ neque $p = \infty$, consueta regula veros differentialis valores praebebit. Interim tamen casus ante (348) memoratus non est negligendus, si functio y contineat huiusmodi membrum $(x - a)^n Q$ existente n fractione denominatorem parem habente; etiamsi enim adsint differentialia inferiora quam $Q dx^n$, prae quibus hoc euanescat; tamen quoniam $Q dx^n$ si sit dx negatiuum, fit imaginarium, hoc membrum $Q dx^n$ reliqua omnia, prae quibus euanescit, quoque transmutat in imaginaria: cuius circumstantiae ratio potissimum in lineis erit habenda. Huiusmodi ergo casus particulares, quibus verum differentiale communi regula non indicatur, in adiunctis exemplis explicabo.

EXEMPLUM I.

Quaeratur differentiale functionis

$$y = a + x - V[xx + ax - xV(2ax - xx)]$$

casu quo ponitur $x = a$.

Differentiali istius functionis casu $x = a$ per regulam receptam non reperiri, ex differentiatione patet, fit enim:

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2}adx + \frac{1}{2}dxV(2ax - xx) + (axdx - xxdx) : V(2ax - xx)}{V(xx + ax - xV(2ax - xx))}$$

posito enim $x = a$ erit $dy = dx - \frac{adx}{a} = 0$. Ordiamur ergo a principiis differentiationis, ac primo quidem posito $x + dx$ loco x fiet:

$$y^{\text{I}} = a + x + dx - V[xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx - (x + dx)V(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)]$$

 Posito

Posito autem $x = a$ erit:

$$y^I = 2a + dx - \sqrt{[2aa + 3adx + dx^2 - (a+dx)\sqrt{(aa-dx^2)}]}$$

Jam cum sit $\sqrt{(aa - dx^2)} = a - \frac{dx^2}{2a}$, sequentes enim termini tuto negligi poterunt, quia non omnes, qui sunt infinities maiores, destruentur, vt mox patebit: erit $y^I = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \frac{1}{2}dx^2)}$, porroque radicem extrahendo fiet $y^I = 2a + dx - \left(a + dx + \frac{dx^2}{4a}\right) = a - \frac{dx^2}{4a}$. At casu $x = a$, erit $y = a$; vnde cum sit $y^I = y + dy$ obtinebitur $dy = -\frac{dx^2}{4a}$: ex quo simul perspicitur functionem propositam y fieri maximum, si ponatur $x = a$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis:

$$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$$

casu, quo ponitur $x = a$.

Facta differentiatione more consueto fit $dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, quod posito $x = a$ in infinitum abit, neque ergo hoc modo indicatur. Differentialia vero sequentium ordinum pariter omnia fient infinita, ita vt ex iis nequidem ex serie $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \&c.$ verus valor differentialis inueniri queat. Ponamus ergo $x + dx$ loco x, atque habebimus

$$y^I = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2 + a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2)}$$

&

& posito $x = a$ erit:

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(-2adx - dx^2)}$$

At eodem casu fit $y = aa$; vnde erit $dy = - dx^2 + a\sqrt{-2adx}$, & cum dx^2 prae $\sqrt{-2adx}$ euanescat, erit $dy = a\sqrt{-2adx}$. Quare si differentiale dx affirmatiue capiatur, erit dy imaginarium; sin autem pro x scribatur $x - dx$, erit $dy = a\sqrt{2adx}$, cuius cum duplex sit valor alter affirmatiuus, alter negatiuus, functio y casu $x = a$ neque maxima fiet neque minima.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a-x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

casu quo ponitur $x = a$.

Quoniam haec functio in istam formam transformatur $y = a^3 - (a-x)^3 + (a-x)^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$, posito $x = a + dx$ fit $y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, eodemque casu est $y = a^3$. Erit ergo $dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$, & cum dx^3 euanescat prae $dx^{\frac{7}{3}}$, erit $dy = - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$. casu ergo $x = a$ functio y neque maximum fit neque minimum.

EXEMPLUM. IV.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x}$$

casu $x = 0$.

Quoniam casus $x = 0$ proponitur, eoque fit $y = 0$, loco x

 tantum

tantum dx scribatur, & habebitur $dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}}$, seu $dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$; vnde primum patet dx negatiue accipi non posse. Tum vero etiamsi alias $\sqrt{dx}$ geminum valorem prae se ferat, alterum affirmatiuum alterum negatiuum, tamen hoc casu, quia eius radix $\sqrt[4]{dx}$ occurrit, non nisi affirmatiue accipi potest. At vero $\sqrt[4]{dx}$ vtrumque significatum recipit, eritque $dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$ & $y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, ob $y = 0$. Cum igitur vterqne ipsius y' valor maior sit, quam ipsius y, sequitur casu $x = 0$ fieri y minimum. Quod autem functio $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ non complectatur hanc $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$, vtramque ad rationalitatem perducendo patebit. Prior enim fusa in hanc formam $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, & quadrata dat, $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ seu $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$, quae denuo quadrata praebet $y^4 - 2y^2x - 4xxy + xx - x^3 = 0$. Altera vero $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ dabit $y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$ & porro $y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$ quae ab illa est diversa. At vero alterum membrum $\sqrt[4]{x^3}$ ambiguitatem signi retinet. Quamobrem ista circumstantia probe est notanda, quod etiamsi communiter radices potestatum parium vtrumque signum $+$ & $-$ includant, tamen haec ambiguitas cesset, si in eadem expressione earumdem radicum vlteriores radices potesta-

tum

tum parium occurrant; quippe quae fierent imaginariae, si radices priores negatiue acciperentur. Atque ex hoc fonte maxima & minima secundae speciei sequuntur, quando talia non locum habere videantur.

EXEMPLUM V.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = a + \sqrt{(x-f)} + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

casu quo ponitur $x = f$.

Ponamus $x - f = t$, & cum sit $y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + tt\sqrt[8]{t}$ huius differentiale quaeritur casu $t = 0$, quo fit $y = a$. Posito ergo $t + dt$ seu $0 + dt$ loco t fiet $y' = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$, ideoque habebitur $dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$. Vbi primo patet differentiale dt negatiue accipi non posse, quin dy fiat imaginarium. Tum verum non solum $\sqrt{dt}$, sed nequidem $\sqrt[4]{dt}$ negatiue accipi potest; fieret enim $\sqrt[8]{dt}$ imaginarium: vnde differentiale dy geminum tantum habet valorem, $dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$, quorum cum vterque maior sit nihilo, sequitur functionem y fieri minimum secundae speciei posito $t = 0$ seu $x = f$. Quanquam ergo his casibus termini $dt\sqrt[4]{dt}$ & $dt^2\sqrt[8]{dt}$ prae primo $\sqrt{dt}$ euanescant; tamen eorum ratio est habenda, si multiplicitas valorum spectetur, vt imaginaria euitentur.

EXEM-

EXEMPLUM VI.

Inuenire differentiale functionis:

$$y = ax + bxx + (x-f)^n + (x-f)^{m+\frac{1}{2}n}$$

caſu $x = f$.

Si ponatur $x = f$ fiet $y = af + bff$, & ſi loco x ponatur $x + dx$ ſeu $f + dx$, prodibit valor proximus $y^I = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$, ita vt ſit $dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m \sqrt{dx^n}$. Niſi ergo ſit n numerus par, differentiale dx negatiue ſumi nequit. Vltimus autem terminus $dx^m \sqrt{dx^n}$ ſignum habet ambiguum; vnde valor ipſius y^I erit duplex vterque maior quam ipſius y, ſi quidem $a + 2bf$ fuerit quantitas affirmatiua, atque exponentes n & $m + \frac{1}{2}n$ vnitate fuerint maiores. Fiet ergo valor functionis y caſu $x = f$ minimus: hocque euenit ſiue n ſit numerus integer ſiue fractus, dummodo numerator hoc caſu, & ipſe numerus illo caſu non fuerit par.

351. Imprimis autem haec methodus differentialia ex ipſis principiis deducendi vſum habet in functionibus tranſcendentibus, cum quibusdam caſibus differentiale more conſueto inuentum vel euaneſcit, vel in infinitum excreſcere videtur. Occurrunt autem hic eiusmodi infinitorum & infinite paruorum ſpecies, quae in algebraicis nunquam inueniuntur. Cum enim ſi i denotet numerum infinitum, li ſit quoque infinitus quidem, ſed tamen ad ipſum numerum i, eiusque adeo poteſtatem quamcunque i^n, quamtumuis exiguus ſtatuatur exponens n, ratio-

rationem tenens infinite paruam, erit fractio $\frac{li}{i^n}$ infinite parua, neque ante finita esse poterit, quam exponens n fiat infinite paruus. Erit ergo li homogeneum cum i^n, si exponens n fuerit infinite paruus. Ponamus nunc $i = \frac{1}{\omega}$, existente ω quantitate infinite parua, erit $-l\omega$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, si exponens n sit infinite paruus, ideoque $-\frac{1}{l\omega}$ homogeneum erit cum ω^n; hincque $-\frac{1}{ldx}$, erit infinite paruum comparandum cum dx^n, existente n fractione infinite parua. Ita si fuerit $y = -\frac{1}{lx}$ differentiale ipsius y casu $x = 0$, erit $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$ ideoque dy ad dx atque ad quamcunque ipsius dx potestatem tenebit rationem infinitam: atque prae $-\frac{1}{ldx}$ euanescunt omnes omnino potestates ipsius dx, quantumuis exigui fuerint earum exponentes.

352. Deinde quoque vidimus, si a fuerit numerus vnitate maior, & i infinitus, tum a^i fore infinitum tam excelsi gradus, vt prae eo non solum i, sed etiam quaeuis ipsius i potestas euanescat; neque i^n ante homogeneum cum a^i euadet, quam exponens n in infinitum fuerit auctus. Sit nunc $i = \frac{1}{\omega}$, ita vt ω infinite par-

vum denotet, erit $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogeneum cum $\frac{1}{\omega^n}$, existente n numero infinite magno: ideoque $a^{\frac{-1}{\omega}}$ seu $\frac{1}{a^{1:\omega}}$, erit infinite paruum comparandum cum ω^n. Hinc $\frac{1}{a^{1:dx}}$, erit infinite paruum, quod autem prae omnibus ipsius dx potestatibus euanescit; cum homogeneum sit cum potestate dx^n existente n numero infinite magno. Quare si quaeratur differentiale ipsius $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ casu $x = 0$; quoniam fit $y = 0$, erit $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$, ideoque infinities minus est quam potestas quantumuis alta ipsius dx.

353. Sin autem a sit numerus vnitate minor, tum quia $\frac{1}{a}$ sit vnitate maior, quaestio ad casum praecedentem reducitur. Scilicet si habeatur expressio $a^{\frac{1}{\omega}}$, ea ponendo $a = 1:b$ transmutabitur in $b^{-\frac{1}{\omega}}$, seu $\frac{1}{b^{1:\omega}}$, quae homogenea erit ob $b > 1$ cum ω^n, existente n numero infinite magno. His igitur praemissis sequentia exempla resoluere poterimus.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale functionis: $y = xx - \frac{1}{lx}$, *casu* $x = 0$.

Quoniam posito $x = 0$ fit $y = 0$, si ponamus $x + dx$, seu $0 + dx$ loco x, fiet $y' = dy = dx^2 - \frac{1}{ldx}$. Cum autem $- \frac{1}{ldx}$ homogeneum sit cum dx^n, denotante n numerum infinite paruum, prae eo dx^2 euanescet, eritque $dy = - \frac{1}{ldx} = dx^n$. At vero quia logarithmi numerorum negatiuorum sunt imaginarii, dx negatiue accipi non poterit; eritque adeo casu $x = 0$ functio y minimum, sed neque ad primam neque ad secundam speciem pertinens. Ad primam scilicet speciem non pertinet, quia y nullos habet valores antecedentes proximos, sed tantum minus est valoribus sequentibus, si x nihilo maius statuatur. Ad secundam autem speciem ideo non pertinet, quia valores sequentes, quibuscum comparatur, non sunt gemini: sic itaque prodit tertia species maximorum minimorumue, quae in functionibus logarithmicis & transcendentibus tantum locum habet, in algebraicis autem nunquam occurrit; de qua in sequente parte de lineis curuis fusius agetur.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale functionis: $y = (a-x)^n - x^n(la - lx)^n$ *casu quo* $x = a$.

Differentiale hoc si n sit numerus integer, ex formula generali $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \&c.$ inueniri potest, erit enim:

$$pdx = -n(a-x)^{n-1}dx - nx^{n-1}dx(la-lx)^n + nx^{n-1}(la-lx)^{n-1}dx$$

qui valor posito $x = a$ vtique euanescit: nam etiamsi sit $n = 1$, erit $pdx = -dx + dx = 0$. Si igitur vlterius progrediamur, erit: $\frac{1}{2}qdx^2 =$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n + \frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}$$

Hinc ergo si fuerit $n = 1$, erit $\frac{1}{2}qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$ posito $x = a$

Simili modo si sit $n = 2$, ad terminum tertium $\frac{1}{6}rdx^3$ esset pergendum, & ita porro. Facilius ergo vtemur ipsis differentiationis principiis, & cum posito $x = a$ fiat $y = 0$, si ponamus $x + dx$ seu $a + dx$ loco x, erit $y' = (-dx)^n - (a+dx)^n[la - l(a+dx)]^n = y + dy = dy$ ob $y = 0$. Est vero $l(a+dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \&c.$

vnde fit $dy = (-dx)^n -$

$$-\left(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}dx^2\right)\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3}\right)^n = \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}$$

Casu

Casu igitur $x = a$ erit formulae propositae differentiale quaesitum dy, vt sequitur:

si $n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$ vt ante inuenimus
si $n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
si $n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
si $n = 4$	$dy = -\frac{4dx^5}{2a}$
&c.	&c.

Si ergo n fuerit numerus impar, functio y casu $x = a$ fit minimum, sin autem n sit numerus par, neque maximum neque minimum: quod idem valet, si n fuerit fractio denominatorem habens imparem. Sin autem n fuerit fractio denominatorem habens parem, tum dx negatiue accipi debet, ne in imaginaria incidamus; & ob ambiguitatem significationis functio quoque neque maxima neque minima euadet.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale functionis: $y = x^x$ *casu* $x = \frac{1}{e}$ *denotante* e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$.

Quia fit in genere $dy = x^x dx(lx + 1)$, hoc differentiale casu $x = \frac{1}{e}$ seu $lx = -1$ euanescit. Compa-

retur ergo hoc differentiale cum forma generali $p\,dx + \frac{1}{2}$ $q\,dx^2$ + &c. erit $p = x^x(lx+1)$ & $q = x^x(lx+1)^2 + x^{x-1}$, & posito $lx = -1$ seu $x = \frac{1}{e}$, erit $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Quare differentiale quaesitum erit $dy = \frac{1}{2}\,e^{(e-1):e}\,dx^2$, euaditque ergo functio $y = x^x$ minimum casu $x = \frac{1}{e}$.

EXEMPLUM IV.

Inuenire differentiale functionis huius: $y = x^n + e^{-1:x}$ *casu quo* $x = 0$.

Quia facto $x = 0$ fit $y = 0$, si ponatur $x = 0 + dx$, erit $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Vidimus autem $\frac{1}{e^{1:dx}}$ homogeneum esse cum potestate ipsius dx infinita, seu cum $dx^{(\infty)}$, ideoque prae dx^n euanescet; ita vt sit $dy = dx^n$.

354. Quod in differentialibus primis certis casibus vsu venit, vt consueta differentiationis regula non prodeant, idem quoque in differentialibus secundi ac tertii superiorumque ordinum euenit, iis casibus, quibus in forma differentiali completa:

$$d.y = p\,dx + \tfrac{1}{2}\,q\,dx^2 + \tfrac{1}{6}\,r\,dx^3 + \tfrac{1}{24}\,s\,dx^4 + \&c.$$

quantitatum q, r, s, &c. nonnullae vel euanescunt, vel in infinitum abeunt. Scilicet cum sit:

$$dd.y = q\,dx^2 + r\,dx^3 + \tfrac{7}{12}\,s\,dx^4 + \&c.$$

si

si quo casu fiat $q = 0$, tum erit $ddy = r dx^3$; sin autem eodem casu & r euanescat, tum erit $ddy = \frac{7}{12} s dx^4$, & ita porro. Sin autem vel q vel r vel s &c. fiat infinitum, tum ex ista serie differentiale secundum prorsus inueniri nequit, sed confugiendum erit ad principia differentialium: scilicet ponendo $x + dx$ loco x quaeratur valor y^I, & ponendo $x + 2dx$ loco x valor ipsius y^{II}, quo facto erit verus valor differentialis secundi $ddy = dy^I - dy = y^{II} - 2y^I + y$. Simili modo si de differentiali tertio quaestio proponatur, tum praeterea in y loco x scribatur $x + 3dx$, inuentoque valore y^{III} erit $d^3y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$, sicque deinceps. Quos casus sequentibus exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale secundum functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ *casu quo ponitur* $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Quaerendo differentiale completum ipsius y, ex forma $dy = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 +$ &c. prodibunt pro p, q, r, s, &c. sequentes valores:

$$p = -\frac{4aax}{(aa+xx)^2};\quad q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa+xx)^3};\quad \text{atque}$$

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}.$$

Cum nunc sit $ddy = q dx^2 + r dx^3 + \frac{7}{12} s dx^4 +$ &c.

ob

ob $q = 0$ casu $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eodemque casu fit $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$, fiet differentiale secundum quaesitum $ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$.

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale tertium functionis $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ *casu* $x = a$.

Quaerendo vt ante differentiale completum
$dy = \frac{1}{2}q\,dx^2 + \frac{1}{6}r\,dx^3 + \frac{1}{24}s\,dx^4 + \&c.$
quia est differentiale tertium $d^3y = r\,dx^3 + \frac{1}{4}s\,dx^4$, ob $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa+xx)^4}$, fiet $r = 0$ casu $x = a$; quare ad valorem s est progrediendum, qui erit:

$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa+xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa+xx)^5}$$

facto ergo $x = a$, erit $s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}$; vnde hoc casu erit $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

EXEMPLUM III.

Inuenire differentialia cuiusque gradus functionis $y = ax^m + bx^n$ *casu* $x = 0$.

Ponendo successiue $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; &c. loco x valores sequentes functionis y erunt:

$$y^{I} = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$
$$y^{II} = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$
$$y^{III} = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n \quad \&c.$$

Posito

Posito ergo $x = 0$, erit $y = 0$, eiusque differentialia erunt:

$$dy = a\,dx^m + b\,dx^n$$

$$ddy = (2^m - 2)\,a\,dx^m + (2^n - 2)\,b\,dx^n$$

$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)\,adx^m + (3^n - 3.2^n - 3.2^n + 3)\,bdx^n$$

$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)\,adx^m + (4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4)\,bdx^n$$

&c.

Si igitur exponens n fuerit maior quam m, termini secundi in his expreſſionibus euaneſcunt prae primis. Interim tamen eorum ratio erit habenda, ſi n fuerit numerus fractus, vt caſus, quibus haec differentialia vel fiunt imaginaria, vel ambigua, diiudicari queant. Vlteriorem vero horum caſuum euolutionem in doctrinam de lineis curuis reſeruari conuenit.



CAPUT XV.

DE VALORIBUS FUNCTIONUM, QUI CERTIS CASIBUS VIDENTUR INDETERMINATI.

355.

Si functio ipſius x quaecunque y fuerit fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator poſito loco x certo quodam valore ſimul euaneſcant; tum iſto caſu fractio $\frac{P}{Q}$ valorem functionis y exprimens euadet $= \frac{0}{0}$, quae expreſſio cum cuique quantitati ſiue finitae ſiue infinitae ſiue infinite paruae poſſit eſſe aequalis, ex ea prorſus valor ipſius y hoc caſu colligi nequit, atque ideo videtur indeterminatus. Interim tamen facile perſpicitur, quia praeter hunc caſum functio y perpetuo valorem determinatum recipit, quicquid pro x ſubſtituatur, etiam hoc caſu valorem ipſius y indeterminatum eſſe non poſſe. Manifeſtum hoc fiet vel ex hoc exemplo, ſi fuerit $y = \frac{aa-xx}{a-x}$, quo facto $x = a$ fit vtique $y = \frac{0}{0}$. Cum autem numeratore per denominatorem diuiſo fiat $y = a + x$, euidens eſt ſi ponatur $x = a$ fore $y = 2a$, ita vt hoc caſu fractio illa $\frac{0}{0}$ aequiualeat quantitati $2a$.

356. Quoniam ergo ſupra oſtendimus, inter cyphras rationem quamcunque intercedere poſſe, in huiusmodi exem-

exemplis ratio determinata, quam numerator ad denominatorem teneat, inueſtigari debet. Cum autem in cyphris abſolutis iſta diuerſitas perſpici nequeat, earum loco quantitas infinite paruae introduci debent, quae etſi ratione ſignificationis a cyphra non differunt, tamen ex diuerſis earum functionibus, quae numeratorem & denominatorem conſtituunt, valor fractionis ſponte elucet. Sic ſi habeatur iſta fractio $\frac{adx}{bdx}$, etiamſi reuera numerator & denominator ſit $= 0$, tamen patet valorem huius fractionis eſſe determinatum nempe $= \frac{a}{b}$. Sin autem habeatur haec fractio $\frac{adx^2}{bdx}$, huius valor erit nullus, quemadmodum huius valor $\frac{adx}{bdx^2}$ eſt infinite magnus. Si igitur loco nihilorum, quae ſaepenumero in calculum ingrediuntur, infinite parua introducamus, hunc inde fructum percipiemus, vt rationem, quam illa nihila inter ſe tenent, mox cognoſcamus, nullumque amplius dubium circa ſignificationem huiusmodi expreſſionum ſuperſit.

357. Quo haec planiora reddantur, ponamus fractionis $y = \frac{P}{Q}$ tam numeratorem quam denominatorem euaneſcere, ſi ſtatuatur $x = a$. Ad haec autem nihila, quae inter ſe comparari non poſſunt, euitanda, ponamus $x = a + dx$, quae poſitio reuera in priorem $x = a$ recidit ob $dx = 0$. Cum vero, ſi loco x ponatur $x + dx$, functiones P & Q abeant in $P + dP$ & $Q + dQ$; po-

 ſitio-

fitioni $x = a + dx$ fatisfiet, fi in his valoribus vbique ftatuatur $x = a$, quo quidem cafu P & Q euanefcere affumuntur. Hinc fi loco x ponatur $a + dx$, fractio $\frac{P}{Q}$ transmutabitur in hanc $\frac{dP}{dQ}$, quae propterea valorem functionis $y = \frac{P}{Q}$ exprimit cafu $x = a$. Haecque expreffio indeterminata amplius effe non poterit, fiquidem functionum P & Q differentialia vera fumantur, vti in capite praecedente docuimus. Hoc enim pacto differentialia dP & dQ nunquam in nihilum abfolutum abeunt, fed nifi per differentiale dx ipfum exprimantur, faltem per eius poteftates exhibebuntur. Quodfi igitur reperiatur $dP = R dx^m$ & $dQ = S dx^n$, erit functionis $y = \frac{P}{Q}$ cafu $x = a$ valor $= \frac{R dx^m}{S dx^n}$, qui propterea erit finitus & $= \frac{R}{S}$, fi fuerit $m = n$; fin autem fit $m > n$, tum valor fractionis propofitae reuera erit $= 0$: at fi fit $m < n$, ifte valor in infinitum excrefcit.

358. Quoties ergo huiusmodi fractio occurrit $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator certo cafu puta $x = a$ fimul euanefcant, valor iftius fractionis hoc cafu $x = a$ per fequentem regulam inuenietur:

Quaerantur quantitatum P *&* Q *differentialia cafu* $x = a$, *eaque loco ipfarum* P *&* Q *fubftituantur, quo facto frac-*

fractio $\frac{dP}{dQ}$ *exhibebit valorem fractionis* $\frac{P}{Q}$ *quaesitum.* Si differentialia dP & dQ methodo consueta inuenta neque infinita fiant neque euanescant casu $x = a$, tum ea retineri poterunt; sin autem ambo vel $= 0$ fiant vel $= \infty$, tum modo in praecedente Capite exposito haec differentialia completa casu $x = a$ inuestigari debent. Plerumque etiam calculus mirifice contrahitur, si antea ponatur $x - a = t$ seu $x = a - t$, quo prodeat fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator euanescunt casu $t = 0$; tum enim differentialia dP & dQ habebuntur, si vbique dt loco t substituatur.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor fractionis huius $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ *casu* $t = 0$.

Quoniam hoc casu $t = 0$ & numerator & denominator euanescit, loco t tantum scribatur dt, atque valor quaesitus exprimetur hac fractione $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$. Cum vero sit $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$, ista fractio abit in hanc $\frac{dt^2}{2b\,dt^2} = \frac{1}{2b}$. Hinc fractio proposita $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ casu $t = 0$ recipit hunc valorem $\frac{1}{2b}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{\sqrt{(aa+ax+xx)}-\sqrt{(aa-ax+xx)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}$$

casu $x=0$.

Hic iterum ſtatim dx loco x ſubſtitui poteſt; quo facto cum ſit:

$$\sqrt{(aa+adx+dx^2)}=a+\tfrac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a}$$

$$\sqrt{(aa-adx+dx^2)}=a-\tfrac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a}$$

atque $$\sqrt{(a+dx)}=\sqrt{a}+\frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{(a-dx)}=\sqrt{a}-\frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

fiet numerator $=dx$ & denominator $=\frac{dx}{\sqrt{a}}$, ex quo fractionis propoſitae valor quaeſitus erit $=\sqrt{a}$.

EXEMPLUM III.

Quaeratur valor huius fractionis:

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{(2ax-aa)}}{xx-2ax-aa+2a\sqrt{(2ax-xx)}}$$

casu $x=a$.

Si more conſueto differentialia ſumantur & in loca numeratoris ac denominatoris ſubſtituantur, habebitur: $\frac{3xx-8ax+7a^2-2a^3:\sqrt{(2ax-aa)}}{2x-2a+2a(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}}$, cuius fractionis

nis numerator ac denominator denuo euenescunt, si ponatur $x = a$. Quare ob eandem rationem eorum loco denuo ipsorum differentialia substituantur, prodibitque:

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}};$$ cuius numerator ac denominator iterum casu $x = a$ euanescunt. Pergamus ergo eorum loco ipsorum differentialia substituere:

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a-x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}.$$

Verum & hic posito $x = a$ denuo tam numerator quam denominator euanescunt. Porro igitur differentialibus ipsorum loco substitutis, orietur:

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}.$$

Nunc denique loco x ponatur, a prodibitque haec fractio determinata $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, qui est valor quaesitus fractionis propositae:

Quodsi autem antequam haec inuestigatio suscipiatur, ponatur $x = a + t$, fractio proposita transmutabitur in hanc:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$$

quae cum recipiat formam $\frac{0}{0}$, si ponatur $t = 0$, ponatur dt loco t, & erit:

$2a^3 +$

$$\frac{2a^3 + 2a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2adt)}}{-2aa + dt^2 + 2a\sqrt{(aa - dt^2)}}$$

Conuertantur iam formulae irrationales in feries, quae eousque continuentur, quoad termini a membro rationali non amplius deſtruantur:

$$\sqrt{(aa + 2adt)} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$\sqrt{(aa - dt^2)} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}.$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit fractio haec:

$$\frac{5dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a,$$

qui eſt valor fractionis propoſitae iam ante inuentus.

EXEMPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{a + \sqrt{(2aa - 2ax)} - \sqrt{(2ax - xx)}}{a - x + \sqrt{(aa - xx)}}$$

caſu $x = a$.

Subſtitutis in loca numeratoris & denominatoris eorum differentialibus prodibit haec fractio, quae caſu $x = a$ ipſi propoſitae erit aequalis:

$$\frac{-a : \sqrt{(aa - 2ax)} - (a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}{-1 - x : \sqrt{(aa - xx)}}$$

cuius numerator ac denominator caſu $x = a$ fiunt infiniti. Verum ſi vterque per $-\sqrt{(a - x)}$ multiplicetur, habebitur

a:

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$$

quae posito $x = a$ dabit hunc valorem determinatum, $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$, qui propterea aequalis est fractioni propositae casu $x = a$.

359. Si igitur habeatur fractio $\frac{P}{Q}$, cuius numerator & denominator casu $x = a$ euanescat, eius valor per consuetas differentiandi regulas assignari poterit, neque opus erit ad differentialia, quae capite praecedente tractauimus, recurrere. Sumtis enim differentialibus fractio proposita $\frac{P}{Q}$ casu $x = a$ aequalis erit fractioni $\frac{dP}{dQ}$; cuius si numerator & denominator posito $x = a$ induant valores finitos, cognoscetur valor fractionis propositae; sin autem alter fiat $= 0$, manente altero finito, tum fractio erit vel $= 0$ vel $= \infty$, prout vel numerator euanescat vel denominator. At si alteruter vel vterque fiat $= \infty$, quod euenit, si diuidantur per quantitates casu $x = a$ euanescentes, tum multiplicando vtrumque per hos diuisores, istud incommodum tolletur, vti in exemplo postremo euenit. Quodsi vero tam numerator quam denominator casu $x = a$ denuo euanescat, tum iterum, vti initio factum est, differentialia erunt capienda, ita vt haec fractio $\frac{ddP}{ddQ}$ prodeat, quae casu $x = a$ propositae adhuc erit aequalis; &, si idem rursus in hac fractione

 vsu

vſu veniat, vt fiat $=\frac{0}{0}$, tum in eius locum ſurrogetur haec $\frac{d^3 P}{d^3 Q}$, atque ita porro, donec ad fractionem perveniatur, quae valorem determinatum exhibeat, ſiue finitum ſiue infinite magnum ſiue infinite paruum. Sic in exemplo tertio, oportebat ad fractionem $\frac{d^4 P}{d^4 Q}$ progredi, antequam valorem fractionis propoſitae $\frac{P}{Q}$ aſſignari licuerit.

360. Vſus huius inueſtigationis elucet in definiendis ſummis ſerierum, quas ſupra capite II. §. 22. eruimus, ſi ponatur $x=1$. Ex iis enim, quae ibi tradita ſunt, ſequitur fore:

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$$

$$x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1}=\frac{x-x^{2n+1}}{1-xx}$$

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

$$x+3x^3+5x^5+\ldots+(2n-1)x^{2n-1}=\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

$$x+4x^2+9x^3+\ldots+n^2x^n=\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

&c.

Quod ſi nunc harum ſerierum ſummae deſiderentur caſu

su quo $x = 1$, in expressionibus istis tam numerator quam denominator euanescunt. Valores ergo harum summarum casu $x = 1$ methodo hic exposita definiri poterunt. Quoniam vero eaedem summae aliunde constant, ex consensu veritas huius methodi magis elucebit.

EXEMPLUM I.

Definire valorem huius fractionis $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Quoniam casu $x = 1$ numerator ac denominator euanescit, substituantur differentialia in eorum locum, habebiturque $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$, quae posito $x = 1$ dat n pro summa seriei quaesita.

EXEMPLUM II.

Definire valorem fractionis $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ *casu* $x = 1$, *qui exhibebit summam seriei* $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ *ex* n *terminis constantis, quae propterea erit* $= n$.

Sumtis differentialibus fractio proposita transmutatur in hanc: $\frac{1 - (2n+1)x^{2n}}{-2x}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= n$.

EXEMPLUM III.

Inuenire valorem huius fractionis: $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ *casu* $x=1$, *qui exprimet summam seriei* $1+2+3+\ldots+n$, *quam constat esse* $=\frac{nn+n}{2}$.

Sumtis differentialibus peruenietur ad hanc fractionem $\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$, cuius adhuc tam numerator quam denominator casu $x=1$ euanescit. Hinc denuo differentialia sumantur, vt prodeat haec fractio: $\frac{-n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, quae posito $x=1$ abit in $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$ summam seriei propositae.

EXEXPLUM IV.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

casu $x=1$, *qui exprimet summam seriei* $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ *quam constat esse* $=nn$.

Substitutis differentialibus in loca numeratoris & denominatoris prouenit haec fractio:

$$\frac{1+3xx-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-xx)}$$

quae

quae cum adhuc idem incommodum habeat, vt posito $x = 1$ abeat in $\frac{0}{0}$, denuo differentialia sumantur,

$$\frac{6x - 2n(2n+1)^2 x^{2n-1} + (2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4 + 12xx}$$

quae posito $x = 1$ abit in:

$$\frac{6 - 2n(2n+1)^2 + (2n-1)(2n+2)(2n+2)}{8} = nn.$$

EXEMPLUM. V.

Inuenire valorem huius fractionis:

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

casu $x = 1$, *qui dabit summam seriei* $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$, *quam constat esse* $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Sumtis numeratoris ac denominatoris differentialibus, fiet

$$\frac{1 + 2x - (n+1)^2 x^n + (n+2)(2nn+2n-1)x^{n+1} - nn(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}$$

in qua cum numerator ac denominator posito $x = 1$ denuo euanescat, differentialia secunda sumantur:

$$\frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + (n+1)(n+2)(2nn+3n-1)x^n - n^2(n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}$$

Eodem vero adhuc subsistente incommodo, ad differentialia tertia procedatur, vt prodeat haec fractio:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^2 x^{n-2} + n(n+1)(n+2)(2nn+2n-1)x^{n-1} - n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6}$$

 quae

quae tandem posito $x = 1$ abit in hanc formam determinatam:

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 + n(n+1)(n+2)(nn-n-1)}{-6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$; qui est ille ipse valor, quo seriem memoratam exprimi inuenimus.

EXEMPLM VI.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, *cuius valorem casu* $x = 1$ *assignari oporteat.*

Quoniam haec fractio est productum ex his duabus: $\frac{x^m}{1 + x^p} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^p}$, prioris autem factoris casu $x = 1$ valor est $= \frac{1}{2}$, tantum opus est vt alterius factoris $\frac{1 - x^n}{1 - x^p}$ valor eodem casu quaeratur, qui sumtis differentialibus erit $= \frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$: vnde fractionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= \frac{n}{2p}$. Idem valor prodit, si immediate differentialia in fractione proposita capiantur: fiet enim $\frac{mx^{m-1} - (m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$, cuius valor posito $x = 1$, erit $= \frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, vt ante.

361. Eadem methodo erit vtendum, si in fractione proposita $\frac{P}{Q}$ vel numerator vel denominator vel

vterque

vterque fuerit quantitas transcendens. Quae operationes, quo clarius explicentur, sequentia exempla adiicere visum est.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$, *cuius valor quaeratur casu* $x = a$.

Sumtis differentialibus statim peruenitur ad hanc fractionem $-\frac{nx^{n-1}}{-1:x} = nx^n$, cuius valor posito $x = a$, erit na^n.

EXEMPLUM II.

Sit proposita ista fractio $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$, *cuius valor quaeritur casu* $x = 1$.

Sumtis differentialibus numeratoris & denominatoris prodit $\frac{1:x}{-1:2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$, cuius valor posito $x = 1$, cum sit $= 0$, sequitur fractionem $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ casu $x = 1$ euanescere.

EXEMPLUM III.

Sit proposita ista fractio $\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$, *cuius valor quaeratur posito* $x = a$, *quo casu numerator & denominator euanescunt.*

Differentiatis secundum regulam numeratore ac denominatore

minatore erit $\frac{-1+a:x}{-(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$: vbi etsi numerator ac denominator casu $x=a$ adhuc euanescit, tamen quia vterque diuisibilis est per $a-x$, habebitur ita fractio $-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, cuius valor casu $x=a$ est determinatus atque $=-1$; abitque igitur fractio proposita in -1, si ponatur $x=a$.

EXEMPLUM IV.

Sit proposita ista fractio $\frac{e^x-e^{-x}}{l(1+x)}$, *cuius valor quaeritur posito* $x=0$.

Sumtis differentialibus habebitur ista functio $\frac{e^x+e^{-x}}{1:(1+x)}$, quae posito $x=0$ dat 2 pro valore quaesito.

EXEMPLUM V.

Inuenire valorem huius fractionis $\frac{e^x-1-l(1+x)}{xx}$, *casu quo ponitur* $x=0$.

Si loco numeratoris ac denominatoris eorum differentialia substituantur, orietur haec fractio $\frac{e^x-1:(1+x)}{2x}$, quae cum adhuc abeat in $\frac{0}{0}$, si ponatur $x=0$, denuo differentialia sumantur, vt habeatur $\frac{e^x+1:(1+x)^2}{2}$, quae posito $x=0$ praebet $\frac{1+1}{2}=1$. Quod idem patet si loco

loco x ſtatim $o + dx$ ſubſtituatur: cum enim ſit $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ & $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 + \&c.$ $\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1$.

EXEMPLUM VI.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{lx}$, *caſu quo ponitur* $x = \infty$.

Quo iſta fractio ad formam, quae hoc caſu tranſeat in $\frac{0}{0}$ reducatur, ita repraeſentetur $\frac{1:lx}{1:x^n}$: ſic enim caſu $x = \infty$, tam numerator quam denominator euaneſcet. Ponatur vero porro $x = \frac{1}{y}$, ita vt caſu $x = \infty$, fiat $y = 0$, atque proponetur iſta fractio $-\frac{1:ly}{y^n}$, cuius valor caſu $y = 0$ inueſtigari debet. Sumtis autem differentialibus erit $\frac{1:y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$, quae poſito $y = 0$, cum abeat in $\frac{0}{0}$, ſumantur denuo differentialia, eritque $\frac{-2:(ly)^3}{n^2y^n}$; vbi quia idem incommodum adeſt, ſi porro differentialia ſumantur prodibit $\frac{6:(ly)^4}{n^3y^n}$, ſicque quouſque procedamus, perpetuo idem incommodum occurret. Quamobrem vt hoc non obſtante valorem quaeſitum eruamus, ſit s valor fractionis $= \frac{1:ly}{y^n}$ caſu,quo

 poni-

ponitur $y = 0$, & cum eodem casu sit quoque $s = \frac{1:(ly)^2}{ny^n}$; erit ex illa aequatione $ss = \frac{1:(ly)^2}{y^{2n}}$, quae per istam diuisa dabit $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$, ex qua perspicitur casu $y = 0$ fieri s infinitum. Fit ergo fractionis $-\frac{1:ly}{y^n}$ valor casu $y = 0$ infinitus, ideoque posito $y = dx$, habebit $\frac{1}{ldx}$ ad dx^n rationem infinitam, vti iam supra innuimus.

EXEMPLUM VII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ *casu* $x = 0$, *quo tam numerator quam denominator euanescit.*

Sit hoc casu $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, erit sumtis differentialibus quoque $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:xx} = \frac{nx^{n+1}}{e^{-1:x}}$, & quia hic idem incommodum occurrit, perpetuoque recurrit, quousque differentiationes continuentur, remedio ante adhibito vtamur. Prior aequatio dat $x^n = e^{-1:x}s$, & $x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x}s^{n+1}$ altera aequatio dat $x^{n+1} = e^{-1:x}s:n$, vnde fit $x^{n(n+1)} = e^{-n:x}s^n:n^n$, qui valor illi aequatus dabit $e^{-1:x}sn^n = 1$ ideoque $s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$, si $x = 0$. Quare posito x infinite paruo habebit dx^n ad $e^{-1:dx}$ rationem infinite

finite

finite magnam, quicunque numerus finitus pro n statuatur: vnde sequitur $e^{-1:dx}$ esse infinite paruum homogeneum cum dx^m, si m fuerit numerus infinite magnus.

EXEMPLUM VIII.

Quaeratur valor fractionis $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ *casu, quo ponitur* $x = \frac{\pi}{2}$ *seu arcui 90 graduum.*

Sumtis differentialibus obtinebitur haec fractio $-\frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$, quae posito $x = \frac{\pi}{2}$ ob $\sin x = 1$ & $\cos x = 0$ abit in 1: ita vt vnitas sit valor quaesitus fractionis propositae. Quod idem patet sine differentiatione: cum enim sit $\cos x = V(1 + \sin x)(1 - \sin x)$ fractio proposita abit in hanc $\frac{V(1 - \sin x) + V(1 + \sin x)}{V(1 + \sin x) - V(1 - \sin x)}$, quae sit euidenter $= 1$, si fiat $\sin x = 1$.

EXEMPLUM IX.

Inuenire valorem huius expressionis $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ *casu quo ponitur* $x = 1$.

Loco numeratoris & denominatoris eorum differentialibus substitutis prodibit ista fractio: $\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + 1 : x}$; quae cum etiam nunc fiat $= \frac{0}{0}$ posito $x = 1$, suman-

 tur

tur denuo differentialia, vt prodeat $\frac{x^x(1+lx)^2+x^x:x}{-1:xx}$, quae posito $x=1$ abit in -2, qui est valor fractionis propositae casu $x=1$.

362. Quoniam hic omnes expressiones, quae quibusdam casibus indeterminatos valores recipere videntur, pertractare constituimus, huc non solum pertinent eae fractiones $\frac{P}{Q}$, quarum numerator ac denominator certo casu euanescunt; sed etiam eiusmodi fractiones, quarum numerator ac denominator certo casu fiunt infiniti, huc sunt referendae: propterea quod earum valores aeque indeterminati videntur. Si scilicet P & Q eiusmodi fuerint functiones ipsius x, vt casu quopiam $x=a$, ambae fiant infinitae, fractioque $\frac{P}{Q}$ induat hanc formam $\frac{\infty}{\infty}$; quoniam infinita aeque ac cyphrae inter se rationem quamcunque tenere possunt, hinc valor verus minime cognosci potest. Hic quidem casus ad praecedentem reuocari potest, fractionem $\frac{P}{Q}$ in hanc formam $\frac{1:Q}{1:P}$ transmutando, cuius fractionis nunc numerator ac denominator casu $x=a$ euanescunt; ideoque eius valor modo ante tradito inueniri potest. At vero quoque sine hac transformatione valor inuenietur, si loco x non a, sed $a+dx$ substituatur, quo facto non eiusmodi infinita absoluta ∞ prouenient; sed ita erunt expressa

$\frac{1}{dx}$ vel $\frac{A}{dx^n}$; quae expressiones etsi sunt aeque infinitae ac ∞, tamen comparatione inter dx eiusue potestates instituta, valor quaesitus facile colligetur.

363. Ad eandem classem quoque pertinent producta ex duobus factoribus constantia, quorum alter certo casu $x = a$ euanescit, alter vero in infinitum abit: cum enim quaeuis quantitas per huiusmodi productum $0 . \infty$ repraesentari possit, eius valor indefinitus videtur. Sit PQ huiusmodi productum, in quo, si ponatur $x = a$, fiat $P = 0$ & $Q = \infty$, eius valor per praecepta ante tradita inuenietur, si ponatur $Q = \frac{1}{R}$, tum enim productum PQ transmutabitur in fractionem $\frac{P}{R}$: cuius numerator ac denominator ante casu $x = a$ euanescunt, ideoque eius valor methodo ambo exposita inuestigari poterit. Sic si quaeratur valor huius producti $(1-x)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}$ casu $x = 1$, quo fit $1 - x = 0$ & $\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2} = \infty$, convertatur id in hanc fractionem $\frac{1-x}{\cot\frac{1}{2}\pi x}$, cuius numerator ac denominator casu $x = 1$ euanescunt. Cum igitur sit differentiale numeratoris $(1-x) = -dx$, & differentiale denominatoris $\cot\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi dx : 2}{(\sin\frac{1}{2}\pi x)^2}$, casu $x = 1$

 valor

valor fractionis propositae erit $= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} . \sin \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$, ob $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

364. Imprimis autem huc sunt referendae eiusmodi expressiones, quae dum ipsi x certus quidam valor tribuitur, abeunt in huiusmodi formam $\infty - \infty$: quoniam enim duo infinita quauis quantitate finita inter se discrepare possunt, manifestum est hoc casu valorem expressionis non determinari, nisi differentia inter illa duo infinita assignari possit. Iste ergo casus occurrit, si proponatur huiusmodi functio $P - Q$, in qua posito $x = a$ fiat tam $P = \infty$ quam $Q = \infty$; quo casu ope regulae ante traditae valor quaesitus non tam facile assignari potest. Etsi enim posito hoc casu fieri $P - Q = f$, statuatur $e^{P-Q} = e^f$, ita vt sit $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, vbi casu $x = a$ tam numerator e^{-Q} quam denominator e^{-P} euanescit; tamen si regula ante tradita huc transferatur, fiet $e^f = \frac{e^{-Q} dQ}{e^{-P} dP}$, vnde ob $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, fieret $1 = \frac{dQ}{dP}$, ideoque valor quaesitus ipsius f hinc non innotescit. Quoties quidem P & Q sunt quantitates algebraicae, quoniam hae infinitae fieri nequeunt, nisi sint fractiones, quarum denominatores euanescunt; tum $P - Q$ in vnicam fractionem colligi poterit, cuius denominator pari-

pariter euanefcet. Quo facto fi etiam numerator euanefcat, valor modo fupra explicato definietur: fin autem numerator non euanefcat, tum eius valor reuera erit infinitus. Sic fi huius expreffionis $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ valor defideretur cafu $x = 1$, quia ea abit in $\frac{1-x}{1-xx} = \frac{-1}{1+x}$, patet valorem quaefitum effe $= -\frac{1}{2}$.

365. Verum fi functiones P & Q fuerint transcendentes, tum plerumque haec transformatio ad calculum moleftiffimum perduceret. Expediet ergo his cafibus methodo directa vti, atque loco $x = a$, quo ambae quantitates P & Q in infinitum abeunt, poni $x = a + \omega$, exiftente ω quantitate infinite parua, pro qua dx accipi poterit. Quo facto fi fiat $P = \frac{A}{\omega} + B$ & $Q = \frac{A}{\omega} + C$, manifeftum eft functionem $P - Q$ abituram effe in $B - C$, qui erit valor finitus. Rationem igitur huiusmodi functionum valores inueftigandi fequentibus exemplis illuftrabimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur valor huius expreffionis $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ *cafu, quo ponitur* $x = 1$.

Quoniam tam $\frac{x}{x-1}$ quam $\frac{1}{lx}$ fit infinitum pofito $x = 1$, ftatuatur $x = 1 + \omega$, atque expreffio propofita transformabitur in $\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$. Cum igitur fit

$l(1+\omega)$

$l(1+\omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - \&c. = \omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.)$
habebitur

$$\frac{(1+\omega)(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)-1}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)} = \frac{\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{6}\omega^2 + \&c.}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega + \&c.}{1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \&c.}$$

Posito nunc ω infinite paruo seu $\omega = 0$, manifestum est valorem quaesitum esse $= \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM II.

Denotantibus e *numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est* $= 1$, *&* π *semicircumferentiam circuli, cuius radius est* $= 1$, *inuestigare valorem huius expressionis:*

$$\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)},\ \textit{casu}\ x = 0.$$

Expressio ista proposita exhibet summam huius seriei:

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{4+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{16+xx} + \frac{1}{25+xx} + \&c.$$

vnde si ponatur $x = 0$, prodire debet summa seriei huius $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ quam constat esse $= \frac{\pi\pi}{6}$. Facto autem $x = 0$ expressionis propositae $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ valor maxime videtur indeterminatus, ob omnes terminos infinitos. Ponatur ergo $x = \omega$, existente ω quantitate infinite parua, atque membrum prius $\frac{\pi x - 1}{2xx}$ abit in $-\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega}$. Cum deinde

sit

fit $e^{2\pi\omega} - 1 = 2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \&c.$ alterum membrum $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ abit in

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\&c.)} = \frac{1}{2\omega^2(1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\&c.)}$$

At eſt $\frac{1}{1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\&c.} = 1 - \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^2\omega^2 - \&c.$

vnde poſterius membrum fit $= \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{6}\pi^2 - \&c.$ ad quod ſi prius addatur prodit $\frac{1}{6}\pi^2$, qui eſt valor quaeſitus expreſſionis propoſitae caſu $x = 0$.

Idem quoque per methodum fractionum, quarum numerator ac denominator certo caſu euaneſcunt, praeſtari poteſt: expreſſio enim propoſita in hanc fractionem transmutatur: $\frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} + \pi x + 1}{2xxe^{2\pi x} - 2xx}$, cuius numerator ac denominator caſu $x = 0$ euaneſcunt. Sumtis ergo differentialibus oritur:

$$\frac{\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x} - 2\pi e^{2\pi x} + \pi}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xxe^{2\pi x} - 4x}$$

ſiue haec $\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xxe^{2\pi x} - 4x}$

cuius, ſi ponatur $x = 0$, adhuc numerator ac denominator euaneſcunt. Quare ſumtis denuo differentialibus habebitur:

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi xe^{2\pi x} + 8\pi xe^{2\pi x} + 8\pi^2 xxe^{2\pi x} - 4}$$

 ſeu

seu $$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

seu $$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2\pi^2 - e^{-2\pi x}}$$

cuius numerator ac denominator adhuc euanefcunt cafu $x = 0$. Quocirca iterum differentialia fumantur

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

quae fractio pofito $x = 0$ abit in $\frac{\pi^2}{6}$, vt ante.

EXEMPLUM III.

Retinentibus e *&* π *eosdem valores, quaeratur valor expreffionis huius cafu* x = o

$$\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}.$$

Expreffio haec transmutatur in hanc: $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4x e^{\pi x} + 4x}$ cuius numerator ac denominator cafu $x = 0$ euanefcunt. Ponatur ergo $x = \omega$, & cum fit

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \&c.$$

formula propofita transmutatur in hanc:

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \&c.}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \&c.}$$

quae pofito ω infinite paruo ftatim dat $\frac{1}{8}\pi^2$, qui eft valor quaefitus expreffionis propofitae cafu $x = 0$. At vero expreffio propofita $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$, exhibet fummam

mam huius feriei $\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{25+xx}+\frac{1}{49+xx}+$ &c. cuius fumma pofito $x=0$ vtique fit $=\frac{1}{8}\pi^2$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur valor huius expreffionis $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi}{2x\,tang\,\pi x}$ *cafu* $x=0$.

Formula haec propofita $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi}{2x\,\mathrm{tang}\,\pi x}$ exprimit fummam huius feriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\text{\&c.}$$

Si igitur ponatur $x=0$, prodire debet fumma feriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ &c. quae eft $=\frac{1}{6}\pi\pi$. Quoniam eft tang $\pi x=\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$, expreffio propofita induet hanc formam: $\frac{1}{2xx}-\frac{\pi\cos\pi x}{2x\sin\pi x}=\frac{\sin\pi x-\pi x\cos\pi x}{2xx\sin\pi x}$ cuius numerator ac denominator euanefcit pofito $x=0$. Ponatur ergo $x=\omega$ & cum fit

$$\sin\pi x=\pi\omega-\tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{\&c.}$$
$$\cos\pi x=1-\tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2+\text{\&c.}$$

expreffio propofita fiet:

$$\frac{\pi\omega-\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{\&c.}\ -\pi\omega+\frac{1}{2}\pi^3\omega^3-\text{\&c.}}{2\pi\omega^3-\frac{1}{3}\pi^3\omega^5+\text{\&c.}}=\frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3-\text{\&c.}}{2\pi\omega^3-\text{\&c.}}$$

quae ob ω infinite paruum dat $\frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM V.

Cum ſit ſumma huius ſeriei infinitae

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\&c.=\frac{\pi\,\mathit{ſin}\,\frac{1}{2}\pi x}{4x\,\mathit{cſ}\,\frac{1}{2}\pi x}$$

inuenire eius ſummam, ſi fuerit $x=0$.

Quia eſt ſin $\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{48}\pi^3 x^3 + \&c.$ & coſ $\frac{1}{2}\pi x = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 x^2 + \&c.$ erit expreſſio propoſita

$$=\frac{\frac{1}{2}\pi^2 x - \frac{1}{48}\pi^4 x^3 + \&c.}{4x - \frac{1}{2}\pi^2 x^3 + \&c.} = \frac{\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{48}\pi^4 x^2 + \&c.}{4 - \frac{1}{2}\pi^2 x^2 + \&c.}$$

in qua ſi fiat $x=0$, valor erit manifeſto $=\frac{1}{8}\pi^2$, quam eſſe ſummam ſeriei $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\&c.$ ſupra pluribus modis eſt demonſtratum. Sin autem pro x ſumatur numerus par quicunque, ſumma ſeriei propoſitae ſemper eſt $=0$.

366. In his ſeriebus, quas binis vltimis exemplis tractauimus, aliisque litteram variabilem x continentibus, ipſi x eiusmodi valores tribui poſſunt, vt quidam termini in infinitum excreſcant, quibus quidem caſibus ſumma totius ſeriei fiet infinita. Sic ſeries:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+\&c.$$

ſi pro x ponatur numerus quicunque integer, vnus perpetuo terminus ob denominatorem euaneſcentem fit infinitus; hancque ob cauſam ipſa ſeriei ſumma infinita euadet. Quodſi autem iſte terminus infinitus ex ſerie tolla-

tollatur, tum summa reliqua sine dubio erit finita, exprimeturque summa priori infinita termino isto infinito mulctata, hoc modo $\infty - \infty$: quemnam ergo habitura sit valorem determinatum modo hic exposito inueniri poterit; id quod clarius ex subiunctis exemplis perspicietur.

EXEMPLUM I.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{\&c.}$$

casu $x = 1$, *& demto termino primo, qui hoc casu in infinitum augetur.*

Quia in genere summa est $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang.}\,\pi x}$,

erit summa quaesita $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang.}\,\pi x} - \frac{1}{1-xx}$ posito $x = 1$. Sit $x = 1 + \omega$, & habebitur pro summa quaesita $\frac{1}{2(1+2\omega+\omega\omega)} - \frac{\pi}{2(1+\omega)\,\text{tang}(\pi+\omega\pi)} + \frac{1}{2\omega+\omega\omega}$. At est $\text{tang}(\pi + \omega\pi) = \text{tang}\,\omega\pi = \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^3\omega^3 + \text{\&c.}$ Vnde cum primus terminus $\frac{1}{2xx}$ posito $x = 1$ determinatum habeat valorem $\frac{1}{2}$, duo reliqui tantum termini sunt spectandi, qui erunt

$$\frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{\pi}{2\omega(1+\omega)(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^2)} = \frac{1}{\omega(2+\omega)} - \frac{1}{\omega(2+2\omega)(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2)}$$

si quidem ω sit infinite paruum, quo casu etiam termi-

minus $\frac{1}{3}\pi^2\omega^2$ negligi poterit. Proueniet autem $\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)} = \frac{1}{4}$ posito $\omega = 0$, estque ergo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ summa seriei: $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \&c.$ vti aliunde constat.

EXEMPLUM II.

Inuenire summam seriei

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \&c.$$

casu quo pro x *ponitur numerus quicunque integer* n *& demto ex serie termino illo* $\frac{1}{nn-xx}$, *qui sit infinitus.*

Summa ergo haec, quae quaeritur, ita erit expressa $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang}\,\pi x} - \frac{1}{nn-xx}$, si quidem statuatur $x = n$, quo quidem casu primus terminus $\frac{1}{2xx}$ abit in $\frac{1}{2nn}$, bini vero reliqui ambo fiunt infiniti. Ponatur ergo $x = n + \omega$, & cum sit $\text{tang}(\pi n + \pi\omega) = \text{tang}\,\pi\omega = \pi\omega$, posito ω infinite paruo, habebimus pro summa quaesita:

$$\frac{1}{2nn} - \frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega} + \frac{1}{2n\omega+\omega\omega} \quad \text{seu}$$

$$\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n+2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n+\omega)} = \frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}$$

vnde si fiat $\omega = 0$, prodibit summa quaesita $= \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}$. Quocirca erit $\frac{3}{4nn} =$

1—

$$\frac{1}{1-nn}+\frac{1}{4-nn}+\frac{1}{9-nn}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)^2-nn}$$
$$+\frac{1}{(n+1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\&c.$$
in infinitum, siue erit istius seriei infinitae summa:
$$\frac{1}{(n+1)^2-nn}+\frac{1}{(n+2)^2-nn}+\frac{1}{(n+3)^2-nn}+\&c.$$
$$=\frac{3}{4nn}+\frac{1}{nn-1}+\frac{1}{nn-4}+\frac{1}{nn-9}+\cdots+\frac{1}{nn-(n-1)^2}.$$

EXEMPLUM III.

Inuenire summam huius seriei
$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\&c.$$
si ponatur $x=1$, *atque terminus primus* $\frac{1}{1-xx}$,
qui hoc casu fit infinitus, auferatur.

Cum huius seriei summa sit in genere $=\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}$ erit summa quaesita $=\frac{\pi\sin.\frac{1}{2}\pi x}{4\pi x\cos.\frac{1}{2}\pi x}-\frac{1}{1-xx}$, si ponatur $x=1$. Quia vero vterque terminus fit infinitus, ponatur $x=1-\omega$, & cum sit $\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega)=\cos\frac{1}{2}\pi\omega=1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2$, & $\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega)=\sin\frac{1}{2}\pi\omega=\frac{1}{2}\pi\omega$ ob ω infinite paruum, habebitur ista expressio:
$$\frac{\pi(1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega}-\frac{1}{2\omega-\omega\omega}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{\omega(2-\omega)}$$
quae fit $=\frac{1}{4}$ posito $\omega=0$, estque propterea
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\&c.$$

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Inuenire summam seriei huius:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\&c.$$

si pro x *ponatur numerus quicunque integer impar* $2n-1$ *isque terminus* $\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$, *qui hoc casu sit infinitus, e medio tollatur.*

Erit ergo summa, quae quaeritur, $=\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}$ $-\frac{1}{(2n-1)^2-xx}$ posito $x=2n-1$. Statuamus ergo $x=2n-1-\omega$, existente ω infinite paruo, fietque $\sin\frac{1}{2}\pi x=\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\pm\cos\frac{1}{2}\pi\omega$, vbi signum superius valet, si sit n numerus impar, inferius vero si sit par. Simili modo erit $\cos\frac{1}{2}\pi x=\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\pm\sin\frac{1}{2}\pi\omega$; ideoque siue n sit par siue impar, erit $\frac{\sin\frac{1}{2}\pi x}{\cos\frac{1}{2}\pi x}=\frac{1}{\text{tang.}\frac{1}{2}\pi\omega}=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi\omega}$. Hinc summa quaesita ita exprimetur:

$$\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)}-\frac{1}{\omega[2(2n-1)-\omega]},$$

eritque propterea $=\frac{1}{4(2n-1)^2}$. Sic si sit $n=2$, erit

$$\frac{1}{36}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{40}+\frac{1}{72}+\frac{1}{112}+\&c.$$

cuius summationis veritas aliunde constat.

CAPUT XVI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM INEXPLICABILIUM.

367.

Functiones inexplicabiles hic voco, quae neque expressionibus determinatis, neque per aequationum radices explicari possunt; ita vt non solum non sint algebraicae, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus transcendentium pertineant. Huiusmodi functio inexplicabilis est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots\ldots + \frac{1}{x}$, quae vtique ab x pendet, at nisi x sit numerus integer nullo modo explicari potest. Simili modo haec expressio $1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots x$, erit functio inexplicabilis ipsius x, quoniam si x sit numerus quicunque, eius valor non solum non algebraice, sed ne quidem per vllum certum quantitatum transcendentium genus exprimi potest. Generatim ergo talium functionum inexplicabilium notio ex seriebus deriuari potest. Sit enim proposita series quaecunque

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

cuius summa si formula finita exprimi nequeat, praebebit functionem inexplicabilem ipsius x, nempe

$$S = A + B + C + D + \ldots + X.$$

 Simili-

Similiter continua producta ex terminis ferierum vti

$$P = A\,B\,C\,D \ldots X$$

exhibebunt functiones inexplicabiles ipfius x, quae autem ope logarithmorum ad formam priorem reuocari poffunt, erit enim:

$$lP = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

368. Hoc igitur capite methodum explicare constitui, huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia inueftigandi. Quod argumentum, quamuis ad primam huius operis partem, vbi praecepta calculi differentialis funt tradita, pertinere videatur; tamen quoniam vberiorem doctrinae ferierum cognitionem poftulat, ad quam in hac altera parte peruenire licuit, ordinem naturalem relinquere coacti hoc loco attingamus. Cum autem haec inueftigatio prorfus fit noua, neque a quoquam adhuc tractata, tantum abeft vt hanc calculi differentialis partem abfoluere queamus, vt potius prima tantum eius elementa adumbrare conemur. Praeterea vero nonnullas quaeftiones proponam, quarum enodatio differentiationem huiusmodi functionum inexplicabilium requirat, quo fimul vfus huius tractationis, qui autem in pofterum fine dubio multo amplior erit, clarius perfpiciatur.

369. Ad huiusmodi functiones inexplicabiles differentiandas ante omnia neceffe eft, vt earum valores inveftigemus; quos induunt, fi pro x ponatur $x + \omega$.

Sit

Sit igitur

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque ponatur Σ valor ipsius S, quem recipit, si pro x ponatur $x + \omega$, sitque Z terminus seriei respondens indici $x + \omega$. Iam igitur termini, qui respondent indicibus $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, &c. indicentur per X', X'', X''', X^{IV}, &c. atque is, qui conuenit indici infinito $x + \infty$ per $X^{|\infty|}$. Similique modo termini competentes indicibus $x + \omega + 1$, $x + \omega + 2$, $x + \omega + 3$ &c. indicentur per Z', Z'', Z''', &c. & sit $Z^{|\infty|}$ terminus respondens indici $x + \omega + \infty$. Quibus positis erit

$$S' = S + X'$$
$$S'' = S + X' + X''$$
$$S''' = S + X' + X'' + X'''$$
&c.
$$S^{|\infty|} = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|}$$

Simili modo cum etiam Σ successiue terminis Z', Z'' &c. augeatur, erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.
$$\Sigma^{|\infty|} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\infty|}$$

370. Nunc natura seriei S, S', S'', S''', &c. est perpendenda, qualis futura sit, si in infinitum continue-

tur: quae ſi in infinito cum progreſſione arithmetica confundatur; quod fit ſi termini ſeriei X, X', X'', X''', &c. in infinito ad aequalitatem conuergant, ita vt differentiae ſeriei S, S', S'', &c. tandem fiant aequales: hoc caſu quantitates $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+2|}$, $S^{|\infty+1|}$ &c. erunt in arithmetica progreſſione, & cum ſit $\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$ ob $S^{|\infty+\omega|}$

$$= S^{|\infty|} + \omega\left(S^{|\infty+1|} - S^{|\infty|}\right) = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega) S^{|\infty|}$$

erit $\Sigma^{|\infty|} = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega) S^{|\infty|}$. At eſt $S^{|\infty+1|} = S^{|\infty|} + X^{|\infty+1|}$, vnde fit $\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$, ex quo obtinebitur haec aequatio

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots + Z^{|\infty|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots\ldots + X^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$$

ex qua definitur valor quaeſitus Σ, quem induit functio S, dum in ea $x + \omega$ loco x ſubſtituitur; eritque

$$\Sigma = S + \omega X^{|\infty+1|} + X' + X'' + X''' + \&c. \text{ in infinitum}$$
$$\ldots\ldots - Z' - Z'' - Z''' - \&c. \text{ in infinitum}$$

Quare ſi ſeriei A, B, C, D, &c. termini infiniteſimi euaneſcant, terminus $\omega X^{|\infty+1|}$ euaneſcit, & omitti poteſt.

371. Exprimitur ergo valor ipſius Σ per novam ſeriem infinitam, quae exhiberi poteſt, ſi ſeriei A + B + C + &c. habeatur terminus generalis, ex quo valores terminorum Z', Z'', Z''', &c. definiri queant. Poſito ergo ω infinite paruo, cum ſit $\Sigma - S$ differentiale functionis S, hoc differentiale dS per ſeriem infinitam exprimetur. Atque ſi nequidem altiores poteſtates ipſius

ω negligantur, habebitur differentiale completum functionis huius inexplicabilis S, cuius natura, quo clarius ob oculos ponatur, sequentibus exemplis hoc negotium illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

Quoniam huius seriei terminus generalis X est $= \frac{1}{x}$ ac propterea

$X' = \frac{1}{x+1}$	$Z' = \frac{1}{x+1+\omega}$
$X'' = \frac{1}{x+2}$	$Z'' = \frac{1}{x+2+\omega}$
$X''' = \frac{1}{x+3}$	$Z''' = \frac{1}{x+3+\omega}.$
&c.	&c.

ob $X^{(\omega+1)} = \frac{1}{x+\omega+1} = 0$, si loco x ponatur $x+\omega$ functio S abibit in Σ, vt sit

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{\&c.}$$
$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \text{\&c.}$$

siue binis his terminis in singulos colligendis, erit

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{\&c.}$$

 seu

feu cum fit

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \&c.$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \&c.$$

&c.

erit feriebus fecundum poteftates ipfius ω difpofitis

$$\Sigma = S + \omega\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)$$
$$-\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)$$
$$+\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)$$
$$-\omega^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c.\right)$$

&c.

Pofito ergo dx pro ω obtinebimus functionis propofitae S differentiale completum

$$dS = dx\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \&c.\right)$$
$$- dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \&c.\right)$$
$$+ dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \&c.\right)$$
$$- dx^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \&c.\right)$$

&c.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x-1}.$$

Quia huius feriei terminus generalis eft $X = \frac{1}{2x-1}$; erit:

$X' = \frac{1}{2x+1}$	$Z' = \frac{1}{2x+1+2\omega}$
$X'' = \frac{1}{2x+3}$	$Z'' = \frac{1}{2x+3+2\omega}$
$X''' = \frac{1}{2x+5}$	$Z''' = \frac{1}{2x+5+2\omega}$
&c.	&c.

ob terminos huius feriei infinitefimos euanefcentes & aequales, prodibit valor ipfius S, fi loco x ponatur $x+\omega$:

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c.$$

$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+5+2\omega} - \&c.$$

feu

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)} + \&c.$$

Verum fi finguli termini in feries fecundum dimenfiones ipfius ω refoluantur, erit:

$\Sigma =$

$$\Sigma = S + 2\omega\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$

$$- 4\omega^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$

$$+ 8\omega^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$

$$- 16\omega^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$

&c.

Ponatur nunc dx pro ω, atque prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis S propositae:

$$dS = 2dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c.\right)$$

$$- 4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c.\right)$$

$$+ 8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \&c.\right)$$

$$- 16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \&c.\right)$$

&c.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Inuenire differentiale completum functionis huius inexplicabilis ipsius S:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^n}.$$

Cum huius feriei terminus generalis fit $= \frac{1}{x^n}$, erunt termini infinitefimi euanefcentes & inter fe aequales. Hincque ob

$X' = \frac{1}{(x+1)^n}$	$Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$
$X'' = \frac{1}{(x+2)^n}$	$Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$
$X''' = \frac{1}{(x+3)^n}$	$Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$
&c.	&c.

erit:

$$X' - Z' = \frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \&c.$$

$$X'' - Z'' = \frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \&c.$$

&c.

ex quibus inuenitur:

$$\Sigma - S = n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c.\right)$$

$$- \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{3}{(x+3)^{n+2}} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c.\right)$$

&c.

Quare posito $\omega = dx$ prodibit differentiale completum functionis S quaesitum:

$$dS = + n\,dx \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \&c.\right)$$
$$- \frac{n(n+1)}{1.\ 2} dx^2 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} dx^3 \left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \&c.\right)$$
&c.

372. Ex his quoque summae istarum serierum interpolari, seu valores terminorum summatoriorum exhiberi possunt, quando numerus terminorum non est numerus integer. Si enim ponatur $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque Σ exprimet summam tot terminorum, quot numerus ω continet vnitates, etiamsi iste numerus ω non sit integer. Ita in exemplo primo si ponatur

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{1}{\omega}$$

erit:

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

siue

$$\Sigma = \omega \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.\right)$$
$$- \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ \omega^3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
&c.

In

In exemplo vero tertio erit:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots + \frac{1}{\omega^n}.$$

Valorque ipſius Σ, ſiue ω ſit numerus integer ſiue fractus, per ſeries ſequenti modo exprimetur:

$$\begin{aligned}\Sigma = \quad & n\omega\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} + \&c.\right)\\ & - \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\omega^2\left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \&c.\right)\\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\omega^3\left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \&c.\right)\\ & \&c.\end{aligned}$$

373. Haec eadem quoque ad ſeriem generalem accommodari poſſunt, cum enim ſit

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

atque poſito $x + \omega$ loco x, abeat X in Z, & S in Σ, erit:

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\, dx^3} + \&c.$$

& quia ſimili modo Z', Z'', Z''', &c. per X', X'', X''', &c. exprimuntur, erit:

$$\begin{aligned}\Sigma = S + \omega X^{|\omega+1|} & - \frac{\omega}{dx}\, d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & - \frac{\omega^2}{1.2\, dx^2}\, dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & - \frac{\omega^3}{1.2.3\, dx^3}\, d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]\\ & \&c.\end{aligned}$$

&

& nisi $X^{|\omega+1|}$ sit $=0$, hoc modo exprimi poterit, ut consideratio infiniti tollatur:

$$X^{|\omega+1|} = X' + (X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.$$

eritque ergo:

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega[(X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.]$$
$$-\frac{\omega}{dx}\, d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \&c.]$$
$$-\frac{\omega^2}{2dx^2}\, dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$-\frac{\omega^3}{6dx^3}\, d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
&c.

Si ergo ponatur $\omega = dx$, orietur differentiale completam ipsius $S = A + B + C + \ldots + X$, ita expressum:

$$dS = X'dx + dx[(X''-X') + (X'''-X'') + (X''''-X''') + \&c.]$$
$$-\; d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$-\tfrac{1}{2}\, dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
$$-\tfrac{1}{6}\, d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$
&c.

374. Ponamus esse $x = 0$, fiet $X' = A$, $X'' = B$, &c. ideoque $X' + X'' + X''' + \&c.$ erit series infinita cuius terminus generalis est $= X$. Formentur deinde series ex his terminis generalibus:

$$\frac{dX}{dx};\quad \frac{ddX}{2dx^2};\quad \frac{d^3X}{6dx^3};\quad \frac{d^4X}{24dx^4};\quad \&c.$$

qua-

quarum serierum in infinitum continuatarum summae sint:

$$\int . X = \mathfrak{A}$$

$$\int . \frac{dX}{dx} = \mathfrak{B}$$

$$\int . \frac{ddX}{2\,dx^2} = \mathfrak{C}$$

$$\int . \frac{d^3X}{6\,dx^3} = \mathfrak{D} \quad \&c.$$

& quia posito $x = 0$, fit quoque $S = 0$, & Σ erit summa seriei $A + B + C + D + \ldots + Z$ continentis ω terminos; est enim Z terminus indicis ω, siue ω sit numerus integer siue fractus. Quare habebitur

$$\Sigma = \omega A + \omega[(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.]$$
$$- \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \&c.$$

vbi prima series praetermitti potest, si seriei propositae termini tandem euanescant.

375. Scribamus nunc x loco ω, abibitque Σ in S ita vt sit

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \\ S = A + & B + & C + & D + & \ldots & + X \end{matrix}$$

atque idem ipsius S valor iam per seriem infinitam exprimetur hoc modo:

$$S = Ax + x[(B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.]$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \&c.$$

cuius valor cum aeque distincte exprimatur, siue x sit numerus integer siue fractus, differentialia ipsius S cuiusque ordinis hinc facile exhiberi possunt:

$$\frac{dS}{dx} = A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.$$
$$- \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \&c.$$
$$\frac{ddS}{2dx^2} = - \mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \&c.$$
$$\frac{d^3S}{6dx^3} = - \mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \&c.$$
$$\frac{d^4S}{24dx^4} = - \mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - \&c.$$

Quare cum differentiale completum fit

$$= dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + \&c.$$

erit functionis propofitae S differentiale completum:

$$dS = Adx + (B-A)dx + (C-B)dx + (D-C)dx + \&c.$$
$$- \mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \mathfrak{E}(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \&c.$$

376. Hoc ergo modo functionis cuiusque inexplicabilis S differentiale affignari poteft, fi feriei $A + B + C + D + \&c.$ termini infinitefimi vel euanefcant vel inter fe fint aequales. Quodfi enim huius termini infinitefimi non fuerint $= 0$, tum fumma feriei $\mathfrak{B}$, quae ex termino generali $\frac{dX}{dx}$ formatur, fiet infinita; at vero cum ferie $A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \&c.$ coniuncta fummam finitam conftituet. At fieri poteft, vt termini feriei $A + B + C + D + \&c.$ ita in infinitum augeantur, vt non folum feriei $\mathfrak{B}$, fed etiam feriei $\mathfrak{C}$ fumma fiat infinite magna, quo cafu non fufficit feri-

feriem $A+(B-A)+(C-B)+$&c. adieciffe: fed quoniam hoc cafu valores infinitefimi §. 370. confiderati, nempe $S^{|\omega|}$, $S^{|\omega+1|}$, $S^{|\omega+2|}$, non amplius in arithmetica funt progreffione, vti affumferamus, huius progreffionis ratio erit habenda. Quemadmodum ergo affumfimus, horum terminorum differentias primas effe aequales; ita methodum amplius extendemus, fi horum valorum differentias demum fecundas, vel tertias, vel vlteriores conftantes ftatuamus.

377. Retento ergo eodem ratiocinio, quo §. 369. fumus ufi, ponamus memoratorum valorum differentias demum fecundas effe conftantes:

$$S^{|\omega|},\quad S^{|\omega+1|},\quad S^{|\omega+2|};$$

DIFF. I. $\quad X^{|\omega+1|},\quad X^{|\omega+2|}$

DIFF. II. $\quad X^{|\omega+2|}-X^{|\omega+1|}$

Hinc erit $\Sigma^{|\omega|}=S^{|\omega+\omega|}=S^{|\omega|}+\omega X^{|\omega+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}$ $(X^{|\omega+2|}-X^{|\omega+1|})=S^{|\omega|}-\frac{\omega(\omega-3)}{1.\ 2}X^{|\omega+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X^{|\omega+2|}$.

Quamobrem habebimus hanc aequationem:

$$\Sigma+Z'+Z''+Z'''+\ldots+Z^{|\omega|}=$$
$$S+X'+X''+X'''+\ldots+X^{|\omega|}-$$
$$\frac{\omega(\omega-3)}{1.\ 2}X^{|\omega+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}X^{|\omega+2|},$$

ex

ex qua elicitur:

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \text{ in infinitum}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \text{ in infinitum}$$
$$+ \omega X^{|\omega+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2}\left(X^{|\omega+2|} - X^{|\omega+1|}\right).$$

Termini autem isti infinitesimi ita repraesentari poterunt, vt sit

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c.$$
$$+ \omega X' + \omega \begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X'''' + X''''' + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X'''' - \&c. \end{Bmatrix}$$
$$\begin{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X'' \\ - \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} X' \end{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\,2} \begin{Bmatrix} + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c. \\ + X' + X'' + X''' + \&c. \end{Bmatrix}$$

vnde simul lex patet, qua haec expressio erit comparata, si differentiae demum tertiae vel quartae vel vlteriores fuerint constantes.

378. Cum igitur sit, vt supra demonstrauimus:

$$Z = X + \frac{\omega dX}{1\,dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\,dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\,dx^3} + \&c.$$

si loco Z', Z'', Z''', &c. valores hinc oriundos substituamus, erit valor ipsius S, si loco x scribatur $x + \omega$, sequens:

$\Sigma = S$

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega \begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2} X'' \\ - \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2} X' \end{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2} \begin{Bmatrix} + X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^{V} - \&c. \\ + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{\omega}{dx} d. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^2}{2\,dx^2} d^2. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

$$- \frac{\omega^3}{6\,dx^3} d^3. [X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.]$$

&c.

Si ergo loco ω ponatur dx, prodibit differentiale completum functionis inexplicabilis propositae S; scilicet

$$dS = X'dx + dx \begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} - X'' \frac{dx(1-dx)}{1.\ 2} \\ + X' \frac{dx(1-dx)}{1.\ 2} \end{matrix} - \frac{dx(1-dx)}{1.\ 2} \begin{bmatrix} + X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - 2X^{V} - \&c. \\ + X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c. \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} + X''' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3} \\ - 2X'' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3} \\ + X' \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3} \end{matrix} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1.\ 2.\ 3} \begin{bmatrix} + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ -3X''' - 3X^{IV} - \&c. \\ + 3X'' + 3X''' + \&c. \\ - X' - X'' - \&c. \end{bmatrix}$$

&c.

$$- d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c.]$$
&c.

quae expressio latissime patet, & quotaecunque demum differentiae fuerint constantes, differentiale quaesitum exhibet. Accommodata enim est haec formula ad differentias constantes, & simul lex patet, si forte vlterius progredi necesse sit.

379. Quod si series $A + B + C + D + \&c.$ ex qua formatur functio inexplicabilis

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

ita fuerit comparata, vt eius termini infinitesimi euanescant, tum vti iam notauimus erit:

$$dS = - d. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{2} dd. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{6} d^3. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{24} d^4. [X' + X'' + X''' + X^{IV} + \&c.]$$
&c.

Sin autem illius seriei termini infinitesimi non sint $= 0$, sed tamen differentias habeant euanescentes, tum ad istam expressionem insuper addi debet

$$dx \left\{ X' \begin{matrix} + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - X' - X'' - X''' - X^{IV} - \&c. \end{matrix} \right]$$

Ve-

Verum si terminorum infinitesimorum huius seriei $A + B + C + D +$ &c. differentiae demum secundae euanescant, tum praeterea adiici oportet:

$$\frac{dx(dx-1)}{1.\ 2.}\left\{\begin{array}{l} +X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \&c. \\ - 2X'' - 2X''' - 2X^{IV} - \&c. \\ -X' + X' + X'' + X''' + \&c. \end{array}\right.$$

Atque si memoratorum terminorum infinitesimorum differentiae demum tertiae fuerint euanescentes, tum praeter has iam exhibitas expressiones insuper addi debet.

$$\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{array}{l} X''' + X^{IV} + X^{V} + X^{VI} + \&c. \\ -3X'' - 3X''' - 3X^{IV} - 3X^{V} - \&c. \\ +3X' + 3X'' + 3X''' + 3X^{IV} + \&c. \\ -X' - X' - X'' - X''' - \&c. \end{array}\right.$$

Sicque porro expressiones insuper addendae erunt comparatae, si vlteriores demum differentiae terminorum infinitesimorum seriei $A + B + C + D +$ &c. euanescant. Hincque adeo quaecunque series assumatur, dummodo eius termini infinitesimi tandem ad differentias euanescentes perducantur, functionis inexplicabilis ex ea formatae differentiale definiri poterit.

380. Si ponatur $x = o$, fiet $X' = A, X'' = B, X''' = C$ &c. Quare vti $A + B + C + D +$ &c. est series, cuius terminus generalis est X, si ex terminis generalibus $\frac{dX}{dx}$; $\frac{ddX}{2dx^2}$; $\frac{d^3X}{6dx^3}$; $\frac{d^4X}{24dx^4}$; &c. simili modo formentur series infinitae, earumque summae denotentur per litteras: $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{E}$; &c. respectiue. Summa

 ω

ω terminorum feriei A + B + C + D + &c. ita exprimetur, vt perinde fit, fiue ω fit numerus integer fiue fecus. Scribamus ergo x pro ω, vt fit,

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

atque fi huius feriei termini infinitefimi euanefcant, erit

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

At fi termini infinitefimi differentias faltem primas habeant conftantes, tum ad hunc valorem infuper addi debet hic:

$$x\left\{\begin{matrix} A & +B & +C & +D & +E & +\&c. \\ & -A & -B & -C & -D & -\&c. \end{matrix}\right]$$

fin autem illorum terminorum infinitefimorum differentiae demum fecundae euanefcant, tum praeterea addi debet:

$$\frac{x(x-1)}{1.\ 2}\left\{\begin{matrix} +B & +C & +D & +E & +F & +\&c. \\ -A & -2B & -2C & -2D & -2E & -\&c. \\ & +A & +B & +C & +D & +\&c. \end{matrix}\right]$$

Si differentiae demum tertiae fuerint euanefcentes, tum infuper adiici debet haec feries infinita:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}\left\{\begin{matrix} +C & +D & +E & +F & +G & +\&c. \\ -2B & -3C & -3D & -3E & -3F & -\&c. \\ +A & +3B & +3C & +3D & +3E & +\&c. \\ & -A & -B & -C & -D & -\&c. \end{matrix}\right]$$

&c.

381. Accommodemus haec quoque ad alterum functionum inexplicabilium genus, quae constant continuo producto terminorum aliquot seriei propositae $A + B + C + D +$ &c. sitque

$$S = \overset{1}{A}\ \overset{2}{B}\ \overset{3}{C}\ \overset{4}{D} \ldots \overset{x}{X}$$

& quaeratur primo valor Σ, in quem S transmutatur, si loco x scribatur $x + \omega$; ponamus autem vt ante esse Z terminum seriei $A + B + C + D +$ &c. cuius index sit $= x + \omega$, vti X respondet indici x. Quo ergo hunc casum ad praecedentem reducamus sumamus logarithmos, eritque

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

Quod si iam huius seriei termini infinitesimi euanescant, erit eandem methodum, qua ante vsi sumus, adhibendo

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

hincque ad numeros regrediendo erit

$$\Sigma = S.\frac{X'}{Z'}\cdot\frac{X''}{Z''}\cdot\frac{X'''}{Z'''}\cdot\frac{X''''}{Z''''}, \&c.$$

quae ergo expressio valet, si seriei A, B, C, D, &c. termini infinitesimi vnitati aequentur. Sin autem logarithmi terminorum infinitesimorum huius seriei non euanescant, at tamen differentias habeant euanescentes; tum ad illam seriem, quam pro $l\Sigma$ inuenimus, insuper addi debet haec series

$$\omega\, lX' + \omega\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \&c.\right)$$

 sicque

ſicque numeris ſumendis habebitur

$$\Sigma = S X^{I\omega} . \frac{X^{II\omega} . X^{I(1-\omega)}}{Z'} . \frac{X^{III\omega} . X^{II(1-\omega)}}{Z''} . \frac{X^{IV\omega} . X^{III(1-\omega)}}{Z'''} . \ \&c.$$

382. Quodſi ergo ponamus $x = 0$, quo caſu fit $S = 1$ & $X' = A$, $X'' = B$; $X''' = C$; &c. Σ denotabit productum ω terminorum huius ſeriei A, B, C, D &c. Si igitur pro ω ſcribamus x, vt Σ obtineat valorem, quem ante ipſi S tribueramus, ita vt ſit

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}.\ \dots\dots\ \overset{x}{X}$$

quia nunc Z', Z'', Z''', &c. abeunt in X', X'', X''' &c. ſi logarithmi terminorum infiniteſimorum iſtius ſeriei A, B, C, D, E, &c. euaneſcant, exprimetur S hoc modo

$$S = \frac{A}{X'} . \frac{B}{X''} . \frac{C}{X'''} . \frac{D}{X^{IV}} . \frac{E}{X^{V}}, \ \&c.$$

Sin autem differentiae demum logarithmorum terminorum infiniteſimorum ſeriei A, B, C, D, &c. euaneſcant, tum iſta functio S ſequenti modo exprimetur, vt ſit:

$$S = A^x . \frac{B^x A^{1-x}}{X'} . \frac{C^x B^{1-x}}{X''} . \frac{D^x C^{1-x}}{X'''} . \frac{E^x D^{1-x}}{X^{IV}} . \ \&c.$$

ſi illorum logarithmorum differentiae ſecundae demum ſint euaneſcentes, ex praecedentibus facile colligitur, cuiusmodi factores inſuper addi debeant; quem caſum, cum vix occurrere ſoleat, hic praetermittamus. Ceterum

rum vsum harum expressionum in interpolationis negotio capite sequente ostendam.

383. Hic igitur cum differentiatio huiusmodi functionum inexplicabilium potissimum sit proposita: inuestigemus differentiale huius functionis

$$S = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D \,.\, \ldots \,.\, X$$

Ad hoc resumamus aequationem ante inuentam

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \&c.$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c.$$

& cum lZ oriatur ex lX, si loco x ponatur $x + \omega$, erit

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx} d.\, lX + \frac{\omega^2}{2dx^2} dd.\, lX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.\, lX + \&c.$$

quibus valoribus pro lZ', lZ'', lZ''', &c. substitutis habebitur

$$l\Sigma = lS - \frac{\omega}{dx} d \;[lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd \;[lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^2} d^3.\, [lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$\&c.$$

Ponatur nunc $\omega = dx$, fietque $l\Sigma = lS + d.\, lS$, ideoque erit

$$\frac{dS}{S} = - \;d.\; [lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{2}\, dd.\; [lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$- \tfrac{1}{6}\, d^3.\; [lX' + lX'' + lX''' + lX^{IV} + \&c.]$$
$$\&c.$$

quae

quae formula valet, si logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. euanescant; sin autem ipsi non euanescant, attamen differentias habeant euanescentes, tum ad praecedentem differentialis completi expressionem insuper addi debet haec series:

$$dx\,lX' + dx\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \&c.\right)$$

vt obtineatur differentiale completum.

384. Idem adhuc alio modo praestari potest. Ponatur $x = 0$, quo casu abit lS in 0. Tum formentur series, quarum termini generales sint:

$$lX;\quad \frac{d.lX}{dx};\quad \frac{dd.lX}{2dx^2};\quad \frac{d^3.lX}{6dx^3};\quad \&c.$$

harumque serierum infinitarum summae sint respectiue: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. Scribatur x pro ω, vt sit $\Sigma = S$, eritque

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

si quidem logarithmi terminorum infinitesimorum seriei A, B, C, D, &c. cuius terminus generalis est X, euanescant: at si horum logarithmorum differentiae demum euanescant, erit:

$$lS = x\,lA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \&c.$$

Hincque adeo differentiale ipsius lS erit:

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}x\,dx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \&c.$$

At

At si differentiale completum desideretur, erit id:

$$\frac{dS}{S} = dx\,l\,A + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right)$$

$$-\mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2x\,dx + dx^2) - \mathfrak{D}(3xx\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3)$$

$$-\ \&c.$$

Ad quarum formularum vſum oſtendendum ſequentia exempla adiicimus, quae vtroque modo reſoluemus.

EXEMPLUM I.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ \ldots\ \frac{2X-1}{2X}.$$

Hic ante omnia notandum eſt, terminos infiniteſimos horum factorum abire in vnitates, ideoque eorum logarithmos euaneſcere. Cum igitur ſit $X = \frac{2x-1}{2x}$, erit

$X' = \frac{2x+1}{2x+2}$; $X'' = \frac{2x+3}{2x+4}$; $X''' = \frac{2x+5}{2x+6}$; &c.

& generaliter $X^{(n)} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n}$;

 vnde

vnde erit:

$$lX^{|n|} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n)$$

$$d.\,lX^{|n|} = \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n}$$

$$dd.\,lX^{|n|} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3.\,lX^{|n|} = +\frac{2.2.\,4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.\,4dx^3}{(2x+2n)^3}$$

$$d^4.\,lX^{|n|} = -\frac{2.2.4.\,6dx^4}{(2+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.\,6dx^4}{(2x+2n)^4}$$

&c.

vnde erit differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \&c. \\ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \&c. \end{array} \right.$$

$$+\tfrac{4}{2}dx^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \&c. \end{array} \right.$$

$$-\tfrac{8}{3}dx^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \&c. \\ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \&c. \end{array} \right.$$

&c.

Quod

Quod si autem tantum differentiale primum quaeratur, erit id:

$$\frac{dS}{S} = -2dx \text{ in}$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \&c.\right)$$

quod idem altera methodo §. 394. tradita ita inuestigatur. Cum sit $lX = l\frac{2x-1}{2x}$, erit $\frac{d.lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$;

$$\frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)} + \frac{1}{2xx}; \quad \frac{d^3.lX}{6dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3} \&c.$$

ideoque fiet

$$\mathfrak{A} = l\frac{1}{2} + l\frac{3}{4} + l\frac{5}{6} + l\frac{7}{8} + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{matrix} +\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \&c. \\ -\frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \&c. \end{matrix}\right\} = 2l2$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. \\ -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \&c. \end{matrix}\right.$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8}{3}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. \\ -\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \&c. \end{matrix}\right.$$

&c.

 siue

siue erit:

$$\mathfrak{B} = +\frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{D} = +\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Quibus valoribus inuentis substitutis erit:

$$\frac{dS}{S} = -2\,dx\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$

$$+ 4x\,dx\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \&c.\right)$$

$$- 8x^2dx\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.\right)$$

$$+ 16x^3dx\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \&c.\right)$$

&c.

Si igitur sit $x = 0$, quo casu sit $lS = 0$ & $S = 1$, erit $dS = -2\,dx\; l2.$

EXEM-

EXEMPLUM II.

Inuenire differentiale huius functionis inexplicabilis:

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot x$$

Huius feriei 1, 2, 3, 4, &c. termini in infinitum ita crescunt, vt logarithmorum differentiae euanescant: est enim $l(\infty+1) - l\infty = l\left(1+\frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} == 0$. Cum igitur sit $X = x$ erit $X' = x+1$; $X'' = x+2$; $X''' = x+3$; &c. porro autem ob $lX = lx$ fiet $d.lX = \frac{dx}{x}$; $dd.lX = -\frac{dx^2}{x^2}$; $d^3.lX = \frac{2\,dx^3}{x^3}$; $d^4.lX = -\frac{2\cdot 3\,dx^4}{x^4}$; &c. vnde si logarithmi vltimi euanescerent, foret

$$\frac{dS}{S} = -dx\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\&c.\right)$$
$$+\frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\&c.\right)$$
$$-\frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+\&c.\right)$$
&c.

At cum differentiae demum logarithmorum euanescant, insuper addi debet haec expressio:

$$dx\, l(x+1) + dx\left(l\frac{x+2}{x+1} + l\frac{x+3}{x+2} + l\frac{x+4}{x+3} + l\frac{x+5}{x+4} + \&c.\right)$$

 Quia

Quia vero est:

$$l\frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \&c.$$

$$l\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \&c.$$

&c.

erit verum differentiale completum:

$$\frac{dS}{S} = dx\, l(x+1)$$

$$-\tfrac{1}{2}(dx - dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}(dx - dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \&c.\right)$$

$$-\tfrac{1}{4}(dx - dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{5}(dx - dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \&c.\right)$$

&c.

Sin autem altero modo differentiale hoc exprimere velimus, quia est

$$lX = lx;\quad \frac{d.lX}{dx} = \frac{1}{x};\quad \frac{dd.lX}{2\,dx^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

$$\frac{d^3.lX}{6\,dx^3} = \frac{1}{3x^3};\quad \frac{d^4.lX}{24\,dx^4} = -\frac{1}{4x^4};\quad \&c.$$

habe-

habebuntur sequentes series:

$$\mathfrak{A} = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \&c.$$

$$\mathfrak{B} = 1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$

&c.

Hinc ob $lA = l1 = 0$; fiet ex §. 384:

$$lS = x\left(l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \&c.\right)$$

$$- x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$

$$- \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$

&c.

Binae

Binae autem primae series, per quas x est multiplicatum, etiamsi vtraque habeat summam infinitam, tamen ambae simul summam habent finitam. Si enim vtriusque n termini capiantur, prodibit:

$$l(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}.$$

At supra §. 142. inuenimus esse

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \text{Const.} + ln$$

$$+ \frac{1}{2n} - \frac{\mathfrak{A}}{2n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4n^4} - \text{\&c.}$$

haecque constans prodit $= 0,5772156649015325$. Quodsi ergo ponatur $n = \infty$, erit:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = \text{Const.} + l\infty,$$

vnde binarum illarum serierum in infinitum continuatarum valor erit $= l(\infty+1) - \text{Const.} - l\infty = -\text{Const.}$ Ex quo erit:

$$lS = -x.\,0,5772156649015325$$

$$+ \tfrac{1}{2}xx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{\&c.}\right)$$

$$- \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{\&c.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{\&c.}\right)$$

&c.

vnde differentialia cuiusque ordinis facile reperiuntur.

Erit

Erit enim:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ x dx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right)$$
$$- x^2 dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right)$$
$$+ x^3 dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right)$$
&c.

At si hae series in vnam colligantur erit:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$
$$+ \frac{x dx}{1(1+x)} + \frac{x dx}{2(2+x)} + \frac{x dx}{3(3+x)} + \frac{x dx}{4(4+x)} + \&c.$$

Quare si sit $x = 0$, fiet:

$$\frac{dS}{S} = -dx.\ 0,5772156649015325$$

Ex priori vero expressione hoc casu erit:

$$\frac{dS}{S} = -\tfrac{1}{2} dx \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3} dx \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right)$$
$$- \tfrac{1}{4} dx \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c.\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5} dx \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \&c.\right)$$
&c.

385. Hinc ergo etiam huiusmodi functionum inexplicabilium differentialia quouis casu speciali exhiberi possunt, propterea quod hic differentialia completa eruimus. Quamobrem si tales functiones ingrediantur in expressiones, quae indeterminatae videntur, cuiusmodi capite praecedente tractauimus; valores eadem methodo definiri poterunt, vti ex adiunctis exemplis intelligetur.

EXEMPLUM I.

Determinare valorem huius expressionis:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{1}{x}}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$$

eo casu, quando ponitur $x=1$.

Ponamus $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{1}{x}=S$, erit ex §. 372:

$$\begin{aligned} S = {} & x\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.\right) \\ & -x^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\&c.\right) \\ & +x^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\&c.\right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

seu cum sit quoque

$$\begin{aligned} S = {} & +1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c. \\ & -\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\frac{1}{5+x}-\&c. \end{aligned}$$

si

si quiuis terminus superioris seriei cum praecedente inferioris combinetur, prodibit:

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \&c.$$

quae expressio, quoniam poni debet $x = 1$ est commodior. Sit ergo $x = 1 + \omega$, fietque

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \&c.$$

siue

$$S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c.\right) = 1 + \mathfrak{B}\omega$$

$$- \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.\right) \quad - \mathfrak{C}\omega^2$$

$$+ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c.\right) \quad + \mathfrak{D}\omega^3$$

&c. &c.

Tota ergo expressio posito $x = 1 + \omega$ abibit in hanc:

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \&c.}{\omega(1+\omega)} - \frac{1}{\omega(1+2\omega)} \quad \text{seu}$$

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \&c.}{(1+\omega)(1+2\omega)}$$

Ponatur nunc $\omega = 0$, atque expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit:

$$= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c.$$

quae series cum sit $= \frac{1}{6}\pi^2$, sequitur valorem quaesitum esse $= \frac{1}{6}\pi^2$.

EXEMPLUM II.

Inuenire valorem huius expreſſionis:

$$\frac{2x-xx}{(x-1)^2}+\frac{\pi\pi x}{6(x-1)}-\frac{(2x-1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$

caſu quo ponitur $x=1$.

Ponatur $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ .\ .\ .\ .+\frac{1}{x}=S$, ſtatuaturque $x=1+\omega$, fiet vt in exemplo praecedente inuenimus:

$S=1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-$&c. exiſtente

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{\&c.}=\tfrac{1}{6}\pi\pi-1$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{\&c.}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{\&c.}$$

&c.

Poſito ergo $x=1+\omega$ expreſſio propoſita induet hanc formam:

$$\frac{1-\omega\omega}{\omega\omega}+\frac{(1+\mathfrak{B})(1+\omega)}{\omega}-\frac{(1+2\omega)(1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-\text{\&c.})}{(1+\omega)\omega^2}$$

quae ad eandem denominationem $\omega^2(1+\omega)$ perducta fit:

$$\frac{\begin{array}{l}1+\omega-\omega^2-\omega^3+\omega+2\omega^2+\omega^3+\mathfrak{B}\omega(1+2\omega+\omega\omega)\\ -1-\mathfrak{B}\omega+\mathfrak{C}\omega^2-\mathfrak{D}\omega^3-2\omega-2\mathfrak{B}\omega^2+2\mathfrak{C}\omega^3\ \text{\&c.}\end{array}}{\omega^2(1+\omega)}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{\omega^3+\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{B}\omega^3+2\mathfrak{C}\omega^3-\mathfrak{D}\omega^3\ \text{\&c.}}{\omega^2(1+\omega)}$$

Fiat

Fiat nunc $\omega = 0$, atque prodibit $1 + \mathfrak{C}$. Quocirca expressionis propositae valor casu $x = 1$, erit $= 1 + \mathfrak{C}$, ideoque per hanc seriem exprimetur:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c.$$

cuius summa cum neque per logarithmos, neque per peripheriam circuli π exhiberi possit, valor quaesitus etiamnum alio modo finite assignari non potest. Ex his ergo duobus exemplis vsus, quem differentiatio functionum inexplicabilium in doctrina serierum habere potest, satis luculenter perspicitur.

386. In methodo hic tradita functiones inexplicabiles differentiandi assumsimus seriei A, B, C, D, E, &c. terminos infinitesimos vel esse $= 0$, vel differentias tandem euanescentes habere; quorum si neutrum contingat, ista methodo vti non licebit. Hancobrem aliam exponam methodum huic conditioni non adstrictam, quam summatio generalis serierum ex termino generali petita & supra fusius explicata suppeditat. Denotent igitur litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, &c. numeros Bernullianos §. 122. exhibitos, sitque functio inexplicabilis proposita haec:

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

& quia supra (130.) ostendimus fore:

$$S = \int X dx + \tfrac{1}{2} X + \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B}\, d^3X}{1.2.3.4\, dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\, d^5X}{1.2.3.4.5.6\, dx^5} - \&c.$$

 hinc

hinc facile erit istius functionis S differentiale exhibere erit enim:

$$dS = X dx + \tfrac{1}{2} dX + \frac{\mathfrak{A} ddX}{1.2\, dx} - \frac{\mathfrak{B} d^4X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^6X}{1.2.3.4.5.6 dx^5} - \&c.$$

387. Sin autem progressio proposita coniuncta sit cum geometrica, quo casu termini eius infinitesimi nunquam ad differentias constantes reducuntur, ac propterea methodus prior locum inuenit nullum; tum methodus §. 174. tradita medelam afferet. Si enim proposita sit haec functio:

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x,$$

quaerantur valores litterarum α, β, γ, δ, &c. vt sit

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \&c.$$

quibus inuentis, vti eos §. 170. exhibuimus, erit:

$$S = \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} - \&c. \right)$$

$\pm$ Constante, quae summam reddat $= 0$, si ponatur $x = 0$, seu quae cuiquam alii casui satisfaciat. Sumto ergo differentiali haec constans ex computo abibit, eritque:

$$dS = \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx\, lp \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \&c. \right)$$

$$+ \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(dX - \frac{\alpha ddX}{dx} + \frac{\beta d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^3} + \&c. \right)$$

siue

$$dS = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(X dx\, lp - (\alpha lp - 1) dX + (\beta lp - \alpha) \frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \beta) \frac{d^3X}{dx^2} + \&c. \right)$$

quod est differentiale quaesitum functionis propositae S.

388.

388. Sin autem functio inexplicabilis propofita ex factoribus conftet, eorumque logarithmi infinitefimi differentias habeant conftantes fiue minus; tum hac quoque methodo differentiale functionis perpetuo exhiberi poterit. Sit enim

$$S = \overset{1}{A}.\ \overset{2}{B}.\ \overset{3}{C}.\ \overset{4}{D}.\ \ldots\ldots\ \overset{x}{X}.$$

Quia hinc fit

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

methodo fuperiori, numeros Bernoullianos in fubfidium vocando erit:

$$lS = \int dx\,lX + \tfrac{1}{2}\,lX + \frac{\mathfrak{A}\,d.\,lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3.\,lX}{1.2.3.4\,dx^3} + \&c.$$

qua expreffione differentiata fit:

$$\frac{dS}{S} = dx\,lX + \tfrac{1}{2}\,d.\,lX + \frac{\mathfrak{A}\,dd.\,lX}{1.2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^4.\,lX}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^6.\,lX}{1.2.3.4.5.6.\,dx^5} - \frac{\mathfrak{D}\,d^8.\,lX}{1.2.3\ldots 8\,dx^7} + \&c.$$

Hinc fi fuerit $X = x$, vt fit:

$$S = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ x$$

fiet applicatione facta

$$\frac{dS}{S} = dx\,lx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}\,dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B}\,dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}\,dx}{6x^6} + \&c.$$

quae forma, fi x fit numerus valde magnus, commodius vfurpatur, quam eae, quas ante inuenimus.

CAPUT



CAPUT XVII.

DE INTERPOLATIONE SERIERUM.

389.

Series interpolari dicitur, dum eius termini assignantur, qui respondent indicibus fractis vel etiam surdis. Si igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum quicunque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio praebeat terminum respondentem. Verum si series ita fuerit comparata, vt eius terminus generalis nullo modo exhiberi queat; tum interpolatio huiusmodi serierum plerumque est maxime difficilis, neque maximam partem termini indicibus non integris respondentes aliter nisi per series infinitas definiri possunt. Quoniam ergo in Capite praecedente huiusmodi expressionum, quae more consueto finite exprimi non possunt, valores quibuscunque indicibus respondentes determinauimus; ea tractatio maximam afferet vtilitatem ad interpolationes perficiendas. Quam ob causam vsum, qui ex superiori Capite in hoc negotium redundat, hic diligentius prosequemur.

390. Sit ergo proposita series quaecunque

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \quad \ldots \quad \overset{x}{X}$$

cuius terminus generalis X sit cognitus, summatorius autem S lateat. Hinc formetur alia series, cuius terminus gene-

generalis aequetur illius feriei termino fummatorio, eritque ifta noua feries:

$$\overset{1}{A}; (\overset{2}{A+B}); (\overset{3}{A+B+C}); (\overset{4}{A+B+C+D}); (\overset{5}{A+B+C+D+E}); \&c.$$

eiusque terminus generalis feu indici indefinito x refpondens erit $= A + B + C + D + \ldots + X = S$, qui cum explicite non fit cognitus, interpolatio huius nouae feriei iisdem difficultatibus erit obnoxia, quas ante meminimus. Ad hanc ergo feriem interpolandam inueftigari oportet valores ipfius S, quos recipit, fi loco x numeri quicunque non integri fubftituantur. Si enim x effet numerus integer, tum conueniens ipfius S valor fine difficultate reperiretur, additione fcilicet tot terminorum feriei $A + B + C + D + \&c.$ quot x contineat vnitates.

391. Quo igitur ea, quae in Capite praecedente funt tradita, in vfum vocari poffint, ponamus x effe numerum integrum, ita vt valor ei refpondens $S = A + B + C + \ldots + X$ fit cognitus, & quaeramus valorem Σ, in quem S transmutetur, fi loco x fcribatur $x + \omega$, exiftente ω fractione quacunque; eritque Σ terminus feriei propofitae interpolandae, qui refpondet indici $x + \omega$; quo ergo inuento, interpolatio huius feriei erit in promtu. Sit Z terminus feriei A, B, C, D, E, &c. qui refpondet indici $x + \omega$, fintque Z', Z'', Z''', &c. termini eius confecutiui indices habentes $x + \omega + 1$; $x + \omega + 2$; $x + \omega + 3$; &c.

Ac primo quidem ponamus feriei A, B, C, D, &c. terminos infinitefimos euanefcere. His ergo pofitis feries

$$\overset{1}{A}\ ;\ (A+\overset{2}{B})\ ;\ (A+B+\overset{3}{C})\ ;\ (A+B+C+\overset{4}{D})\ ;\ \&c.$$

cuius terminus indici x refpondens eft

$$S = A + B + C + \ldots\ldots + X$$

interpolabitur quaerendo eius terminum Σ, qui indici fracto $x+\omega$ refpondeat, erit autem vti inuenimus:

$$\Sigma = S \begin{array}{l} + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \end{array}$$

ficque habebitur feries infinita ifti termino quaefito Σ aequalis, quae ob

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2\, dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3\, dx^3} + \&c.$$

in hanc formam transmutatur, vt fit:

$$\begin{aligned} \Sigma = S &- \frac{\omega}{dx} d.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ &- \frac{\omega^2}{2\, dx^2} dd.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ &- \frac{\omega^3}{6\, dx^3} d^3.\,[X' + X'' + X''' + X'''' + \&c.] \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

quarum formularum ea, quae quouis cafu commodior videatur, adhiberi poterit.

392. Sumamus pro A, B, C, D, &c. feriem harmonicam quamcunque $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \&c.$ cuius

cuius terminus generalis ſeu indici x reſpondens eſt $= \frac{1}{a+(x-1)b} = X$. Hinc formata ſit iſta ſeries:

$$\overset{1}{\frac{1}{a}};\ \overset{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)};\ \overset{3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right)};\ \overset{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}\right)}\ \&c.$$

cuius propterea terminus indici x reſpondens erit:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \dots + \frac{1}{a+(x-1)b}.$$

Si iam Σ denotet terminum iſtius ſeriei indici $x+\omega$ reſpondentem, ob $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$, erit

$$X' = \frac{1}{a+bx};\quad Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$$

$$X'' = \frac{1}{a+b+bx};\quad Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$

$$X''' = \frac{1}{a+2b+bx};\quad Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$

&c. &c.

hincque orietur;

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx} + \&c.$$
$$- \frac{1}{a+bx+b\omega} - \frac{1}{a+b+bx+b\omega} - \frac{1}{a+2b+bx+b\omega} - \&c.$$

 alte-

altera expreſſio autem erit huiusmodi:

$$\Sigma = S + b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{(a+b+bx)^2}+\frac{1}{(a+2b+bx)^2}+\&c.\right)$$
$$-b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3}+\frac{1}{(a+b+bx)^3}+\frac{1}{(a+2b+bx)^3}+\&c.\right)$$
$$+b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4}+\frac{1}{(a+b+bx)^4}+\frac{1}{(a+2b+bx)^4}+\&c.\right)$$
$$\&c.$$

EXEMPLUM I.

Propoſita ſit iſta ſeries:

$$\overset{1}{1}\ ;\ \overset{2}{(1+\tfrac{1}{2})}\ ;\ \overset{3}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})}\ ;\ \overset{4}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})}\ ;\ \&c.$$

cuius terminos, qui indicibus fractis reſpondent, inueniri oporteat.

Erit ergo $a = 1$ & $b = 1$; vnde ſi terminus indici integro x reſpondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x},$$

terminusque indici fracto $x+\omega$ reſpondens vocetur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} + \&c.$$
$$-\frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \frac{1}{5+x+\omega} - \&c.$$

Notandum autem eſt, ſi inuentus fuerit terminus reſpondens indici fracto ω, quem ponamus $= T$, ex eo termi-

minum indicis $x+\omega$ facile inueniri posse; erit enim, si T', T'', T''', &c. denotent terminos indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes:

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$T''' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega} \text{ \&c.}$$

vnde sufficit eos tantum terminos, qui respondent indicibus ω vnitate minoribus, inuestigasse. Quem in finem ponamus $x = 0$, erit quoque $S = 0$, atque terminus seriei T indici fracto ω respondens ita exprimetur:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{\&c.}$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \text{\&c.}$$

vel his fractionibus in series infinitas conuersis prodibit altera expressio:

$$T = +\omega\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{\&c.}\right)$$
$$- \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{\&c.}\right)$$
$$+ \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{\&c.}\right)$$
$$- \omega^4\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{\&c.}\right)$$
&c

quae ad valorem ipsius T proxime inueniendum per-quam est apta.

Quaeratur ergo propositae seriei terminus respondens indici, $\frac{1}{2}$ qui si ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9} + \&c.$$

seu $T = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \&c.\right)$

cuius series valor est $= 2 - 2l2$, sicque terminus indicis $= \frac{1}{2}$ finite exprimi potest. Erunt ergo termini sequentes, quorum indices sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ita expressi:

Ind.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	
Term.	$2-2l2$;	$2+\frac{2}{3}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-2l2$;	&c.

EXEMPLUM II.

Proposita sit ista series:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{\left(1+\tfrac{1}{3}\right)};\ \overset{3}{\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)};\ \overset{4}{\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}\right)};\ \&c.$$

cuius terminos indicibus fractis respondentes exprimere oporteat.

Erit ergo $a = 1$, $b = 2$, vnde si terminus indici integro x respondens ponatur

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2x-1}$$

terminusque indici fracto $x + \omega$ vocetur $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5+2x} + \frac{1}{7+2x} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+2(x+\omega)} - \frac{1}{3+2(x+\omega)} - \frac{1}{5+2(x+\omega)} - \frac{1}{7+2(x+\omega)} - \&c.$$

Cum

Cum igitur sufficiat terminos indicibus vnitate minoribus assignasse, fit $x = 0$, & $S = 0$: quocirca si terminus indici ω conueniens ponatur $= T$, erit:

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c.$$
$$- \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{3+2\omega} - \frac{1}{5+2\omega} - \frac{1}{7+2\omega} - \frac{1}{9+2\omega} - \&c.$$

& si ω numerum quemcunque denotare ponatur, quoniam T est terminus indici ω respondens, erit T terminus generalis seriei propositae, qui etiam hoc modo exprimetur:

$$T = \frac{2\omega}{1(1+2\omega)} + \frac{2\omega}{3(3+2\omega)} + \frac{2\omega}{5(5+2\omega)} + \frac{2\omega}{7(7+2\omega)} + \&c.$$

vel ita:

$$T = 2\omega\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.\right)$$
$$- 4\omega^2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \&c.\right)$$
$$+ 8\omega^3\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.\right)$$
$$- 16\omega^4\left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \&c.\right)$$
&c.

Pona-

Ponamus esse $\omega = \frac{1}{2}$, erit terminus huic indici respondens $T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. = l2$,

eruntque

Ind.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Term.	$l2$;	$\frac{1}{2} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + l2$;

&c.

Si sit $\omega = \frac{1}{4}$; erit

$$T = +1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c. \quad \text{siue}$$
$$- \frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{11} - \frac{2}{15} - \&c.$$
$$T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. - \frac{1}{2} l2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l2.$$

393. Quod si ergo huius seriei generalis:

$$\frac{1}{a}\ ; \ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right)\ ; \ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right)\ ; \ \&c.$$

quaeratur terminus respondens indici $= \frac{1}{2}$, ponatur in expressionibus §. praeced. $x = 0$, & $\omega = \frac{1}{2}$; fietque $S = 0$, & terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens quaesitus erit

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \&c.$$

siue terminis ad maiorem vniformitatem perductis erit

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \&c.$$

in qua serie cum signa + & — alternentur, sumendis continuis differentiis per methodum supra expositam valor ipsius $\frac{1}{2}\Sigma$ per seriem magis conuergentem exprimetur.

Erunt

Erunt autem differentiarum series:

$$\frac{b}{2a(2a+b)};\quad \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)};\quad \&c.$$

$$\frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{2bb}{(2a+b)(a+2b)(2a+3b)};\quad \&c.$$

$$\frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\quad \&c.$$

$$\&c.$$

Ex quibus concluditur fore:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4a} + \frac{1b}{8a(2a+b)} + \frac{1.\ 2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)}$$

$$+ \frac{1.\ 2.\ 3\ b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

Hincque ergo habebitur:

$$\Sigma = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}\cdot b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\,bb}{2a(2a+b)(2a+2b)}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\,b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \&c.$$

quae series maxime conuergit, atque valorem termini Σ facili labore proxime exhibet.

394. Quod si autem in genere seriei A, B, C, D, E, &c. termini infinitesimi euanescant, terminusque indici ω respondens fuerit $= Z$, eiusque sequentes, qui indicibus $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, &c. respondeant, sint Z', Z'', Z''', Z^{iv}, &c. Si in superioribus (391) ponatur

 $x = 0$,

$x = 0$, vt fit $S = 0$ & $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, &c. fequetur, fi formetur huiusmodi feries:

$$\overset{1}{A},\ (\overset{2}{A+B}),\ (\overset{3}{A+B+C}),\ (\overset{4}{A+B+C+D}),\ \&c.$$

eiusque terminus indici ω refpondens ponatur $= \Sigma$, fore

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z^{IV}) + \&c.$$

ex qua expreffione termini quicunque intermedii definiri poterunt. Sufficiet autem ad interpolationem perficiendam eos terminos inueftigaffe, qui refpondeant indicibus ω vnitate minoribus. Si enim terminus Σ indici huiusmodi cuicunque ω refpondens fuerit repertus, iique qui conueniant indicibus $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, &c. ponantur Σ', Σ'', Σ''', Σ^{IV}, &c. erit

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
&c.

EXEMPLUM I.

Interpolare hanc feriem:

$$\overset{1}{1};\ (\overset{2}{1+\tfrac{1}{4}});\ (\overset{3}{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}});\ (\overset{4}{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}});$$
&c.

Sit Σ huius feriei terminus refpondens indici ω, & cum haec feries formata fit ex fummatione huius:

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \&c.$$

cuius terminus indici ω refpondens eft $= \frac{1}{\omega^2}$ erit

Z =

$$Z = +\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \&c.$$

Quod si ergo seriei propositae quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, poni debit $\omega = \frac{1}{2}$, fietque:

$\Sigma = 1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{4} - \frac{4}{25} + \frac{1}{9} - \frac{4}{49} + \&c.$ siue
$\Sigma = 4(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \&c.)$
Cum igitur sit $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \&c. = \frac{\pi^2}{12}$, erit $\Sigma = 4\left(1 - \frac{\pi\pi}{12}\right) = 4 - \frac{1}{3}\pi^2$, qui est terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens. Hinc ergo respondebunt

Indicibus	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$ &c.
Termini	$4 - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} - \frac{1}{3}\pi^2$; &c.

EXEMPLUM II.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{(1+\tfrac{1}{9})};\ \overset{3}{(1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25})};\ \overset{4}{(1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{49})}$$
&c.

Sit Σ terminus respondens indici cuicunque ω, & cum haec series formata sit ex summatione huius:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \&c.$$

ex qua sit terminus indici ω respondens $Z = \frac{1}{(2\omega-1)^2}$ erit $Z' = \frac{1}{(2\omega+1)^2}$; $Z'' = \frac{1}{(2\omega+3)^2}$; $Z''' = \frac{1}{(2\omega+5)^2}$ &c.

 Quam-

Quamobrem habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+2\omega)^2} - \frac{1}{(3+2\omega)^2} - \frac{1}{(5+2\omega)^2} - \frac{1}{(7+2\omega)^2} - \&c.$$

Ponamus $\omega = \frac{1}{2}$, vt inueniamus terminum ſeriei propoſitae reſpondentem indici $= \frac{1}{2}$, qui erit:

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \&c. = \frac{\pi\pi}{12},$$

ex quo termini, qui medium interiacent inter binos quosvis datos, ſequenti modo exprimentur. Reſpondebunt

Ind. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; &c.

Term. $\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{\pi\pi}{12}$; &c.

EXEMPLUM III.

Interpolare hanc ſeriem:

1	2	3	4	
1;	$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$;	$\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$;	$\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right)$;	&c.

Sit vt ante Σ terminus indici ω reſpondens, erit

$Z = \frac{1}{\omega^n}$; & $Z' = \frac{1}{(1+\omega)^n}$; $Z'' = \frac{1}{(2+\omega)^n}$; $Z''' = \frac{1}{(3+\omega)^n}$ &c. hincque habebitur:

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \&c.$$

Si

Si igitur desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, erit

$$\text{is} = 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \&c.$$

$$\text{seu} = 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \&c.\right)$$

Quare si ponatur:

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$$

erit seriei propositae terminus qui indici $\frac{1}{2}$ respondet $= 2^n(1 - \mathfrak{N})$; hincque respondebunt

Indic. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$

Term. $2^n - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n\mathfrak{N}$; &c.

EXEMPLUM IV.

Interpolare hanc seriem:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1 + \frac{1}{3^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}\right); \;\&c. \end{array}$$

Sit Σ terminus qui indici cuicunque ω respondeat, & cum sit $Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^n}$, erit:

$$Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^n};\; Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^n};\; Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^n};\; \&c.$$

atque

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$
$$- \frac{1}{(1 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(3 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(5 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(7 + 2\omega)^n} - \&c.$$

 Po-

Ponatur $\omega = \frac{1}{2}$, & prodibit terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c. = \mathfrak{N},$$

ex quo porro erunt reliqui termini inter binos datos medii

Indices:	$\frac{1}{2}$;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{5}{2}$;	&c.
Termini:	$\mathfrak{N}$;	$\frac{1}{2^n} + \mathfrak{N}$;	$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{N}$;	&c.

395. Ponamus nunc seriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius summatione series interpolanda formatur, terminos infinitesimos non euanescere, sed ita esse comparatos, vt eorum differentiae euanescant; sitque X huius seriei terminus respondens indici x, & Z terminus respondens exponenti $x+\omega$; tum vero sint X', X'', X''', X'''', &c. termini ipsum X sequentes, & Z', Z'', Z''', &c. termini ipsum Z sequentes. Quibus positis proponatur haec series interpolanda:

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \&c.$$

cuius terminus indici x respondens sit $= S$, at terminus indici $x+\omega$ respondens sit $= \Sigma$; eritque ex iis, quae Capite praecedente sunt tradita:

$$\begin{aligned} \Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + \&c. \\ &- Z' - Z'' - Z''' - \&c. \\ &+ \omega X' + \omega \begin{Bmatrix} X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ -X' - X'' - X''' - \&c. \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Quia

Quia autem vt ante ſufficit terminos indicibus vnitate minoribus reſpondentes inueſtigaſſe, ponamus $x = 0$, vt ſit $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, &c. eritque terminus indici ω reſpondens:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') \ \&c.$$
$$+ \omega A + \omega[(B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \&c.]$$

Vel ſi differentias has more ſupra recepto exprimere velimus quo eſt $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$; &c. habebitur:

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''') + \&c.$$
$$+ \omega(A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.)$$

395. Sin autem feriei A, B, C, D, E, &c. ex cuius ſummatione ſeries interpolanda formatur, termini infiniteſimi neque ipſi euaneſcant, neque differentias primas habeant euaneſcentes; tum plures ſeries ad valorem ipſius Σ exprimendum adiici debebunt, quoad ſcilicet ad differentias terminorum infiniteſimorum euaneſcentes perueniatur. Sit enim vt ante feriei A, B, C, D, E, &c. terminus indici x reſpondens $= X$, eumque ſequentes X', X'', X''', &c. indici autem $x + \omega$ reſpondeat terminus Z, quem ſequantur Z', Z'', &c. atque proponatur haec ſeries:

$$\overset{1}{A}; \ (A + \overset{2}{B}); \ (A + \overset{3}{B} + C); \ (A + B + \overset{4}{C} + D); \ \&c.$$

cuius terminus indici x reſpondens ſit

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

in-

indici vero $x+\omega$ respondeat terminus Σ; ita vt

indicibus	respondeant termini
$x+\omega+1$	$\Sigma' = \Sigma + Z'$
$x+\omega+2$	$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$
$x+\omega+3$	$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$
&c.	&c.

Si iam differentiae terminorum ita exprimantur, vt sit

$$\Delta X' = X'' - X';\ \Delta X'' = X''' - X'';\ \Delta X''' = X'''' - X''';\ \&c.$$
$$\Delta^2 X' = \Delta X'' - \Delta X';\ \Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X'';\ \Delta^2 X''' = \Delta X'''' - \Delta X''';\ \&c.$$
$$\Delta^3 X' = \Delta^2 X'' - \Delta^2 X';\ \Delta^3 X'' = \Delta^2 X''' - \Delta^2 X'';\ \&c.$$

ex §. 377. terminus Σ sequenti modo exprimetur:

$$\begin{aligned}\Sigma = S\ & + X' + X'' + X''' + X'''' + \&c. \\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\ & + \omega[X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \Delta X'''' + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}[\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \Delta^2 X'''' + \&c.] \\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}[\Delta^2 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \Delta^3 X'''' + \&c.] \\ & \&c.\end{aligned}$$

397. Sufficit, vti iam notauimus, tot huiusmodi series adiecisse, donec ad terminorum infinitesimorum differentias euanescentes perueniatur: si enim has ipsas series quoque in infinitum continuare velimus, vel eo vsque saltem, donec terminorum finitorum differentiae euanescant; tum ob

$Z' =$

$$Z' = X' + \omega\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 X' + \&c.$$

tota expressio inuenta contrahetur in hanc:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 X' + \&c.$$

quae terminum summatorium seriei A+B+C+D+&c. inuoluit; qui autem si esset cognitus, interpolatio nullam haberet difficultatem. Interim tamen & hac formula vti licebit, quippe quae, quoties abrumpitur, quemvis terminum interpolandum finite & algebraicae expressum exhibet: sin autem in infinitum progrediatur, plerumque praestat priorem formulam adhibere, in qua ratio terminorum infinitesimorum habetur. Haec vero, si ponatur $x = 0$, vt Σ denotet terminum indici ω respondentem, ob $S = 0$ hanc formam induet:

$$\begin{aligned}
\Sigma = \quad & + A + B + C + D + \&c. \\
& - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \&c. \\
& + \omega[A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \&c.] \\
& + \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2}[\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \&c.] \\
& + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3}[\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \&c.] \\
& \&c.
\end{aligned}$$

Vel si ponatur breuitatis gratia:

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega-1)}{1.\ 2} = \beta; \quad \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.\ 2.\ 3} = \gamma; \quad \&c.$$

erit:

$$\begin{aligned}
\Sigma = \; & \alpha A + \beta \Delta A + \gamma \Delta^2 A + \delta \Delta^3 A + \&c. \\
& + A + \alpha \Delta A + \beta \Delta^2 A + \gamma \Delta^3 A + \&c. - Z' \\
& + B + \alpha \Delta B + \beta \Delta^2 B + \gamma \Delta^3 B + \&c. - Z'' \\
& + C + \alpha \Delta C + \beta \Delta^2 C + \gamma \Delta^3 C + \&c. - Z''' \\
& \&c.
\end{aligned}$$

quarum serierum horizontalium numerus in infinitum quidem progreditur, at quaelibet finito terminorum numero constat.

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{\tfrac{1}{2}}; \quad \overset{2}{\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}}; \quad \overset{3}{\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4}}; \quad \overset{4}{\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5}}; \quad \&c.$$

Sit huius seriei terminus indici ω respondens $= \Sigma$, & cum ea oriatur ex summatione huius seriei:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5} \ \&c. \quad \text{erit} \quad Z = \frac{\omega}{\omega+1};$$

& quia termini infinitesimi differentias suas primas iam habent euanescentes, differentiae tantum primae sunt accipiendae, quae erunt:

$$\text{ob} \quad A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{2}{3}; \quad C = \frac{3}{4}; \quad D = \frac{4}{5}; \quad \&c.$$

$$\Delta A = \frac{1}{2.3}; \quad \Delta B = \frac{1}{3.4}; \quad \Delta C = \frac{1}{4.5}; \quad \&c.$$

Hinc

Hinc ergo habebitur:

$$\Sigma = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c.$$
$$+ \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \frac{\omega}{5.6} + \&c.$$
$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c.$$

seu ob $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2.3} + \frac{\omega}{3.4} + \frac{\omega}{4.5} + \&c. = \omega$; erit

$$\Sigma = \omega + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \&c.$$
$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \&c.$$

Si ergo quaeratur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, erit is

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \&c.$$

seu $\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.9} - \frac{1}{5.11} - \frac{1}{6.13} - \&c.$

ideoque $\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \frac{1}{8.9} - \frac{1}{10.11} - \frac{1}{12.13} - \&c.$

seu $\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{13} - \&c.$

$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \&c.$$

 Qua-

Quare cum sit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c. = l2$

erit $\frac{1}{2}\Sigma = l2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \&c. = l2 - \frac{7}{12}$,

ideoque $\Sigma = 2\,l\,2 - \frac{7}{6}$.

398. Pergamus nunc ad series interpolandas, quarum termini ex factoribus sunt conflati, sitque proposita haec series generalissima:

$$\overset{1}{A}\,;\ \overset{2}{AB}\,;\ \overset{3}{ABC}\,;\ \overset{4}{ABCD}\,;\ \overset{5}{ABCDE}\,;\ \&c.$$

cuius terminus indici ω respondens sit $= \Sigma$. Erit ergo $l\Sigma$ terminus respondens indici ω in hac serie:

$$\overset{1}{lA}\,;\ \overset{2}{(lA + lB)}\,;\ \overset{3}{(lA + lB + lC)}\,;\ \overset{4}{(lA + lB + lC + lD)}$$
&c.

Quodsi ergo ponamus huius seriei terminos infinitesimos euanescere; atque seriei A, B, C, D, E, &c. terminum indici ω respondentem esse Z, eiusque sequentes indicibus $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, &c. respondentes esse Z', Z'', Z''', Z'''', &c. erit ex supra demonstratis:

$$l\Sigma = \begin{array}{l} + lA + lB + lC + lD + \&c. \\ - lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c. \end{array}$$

Hinc igitur ad numeros progrediendo habebitur:

$$\Sigma = \frac{A}{Z'} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \&c.$$

399.

399. Quodſi autem terminorum infiniteſimorum feriei A, B, C, D, &c. logarithmi non euaneſcant, ſed habeant differentias euaneſcentes, erit vti vidimus:

$$l\Sigma = + \; lA + lB + lC + \&c. \\ - lZ' - lZ'' - lZ''' - \&c. \\ + \omega lA + \omega\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \&c.\right)$$

hincque ad numeros a logarithmis procedendo fiet

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} \cdot \&c.$$

At ſi illorum logarithmorum infiniteſimorum differentiae demum ſecundae euaneſcant, erit:

$$l\Sigma = lA + lB + lC + lD + \&c. \\ + lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \&c. \\ + \omega\left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \&c.\right) \\ + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DE}{E^2} + \&c.\right)$$

Ex his itaque obtinebitur:

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{2}} \cdot B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}} \cdot$$

$$\frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z''} \; \&c.$$

 quae

quae si $\omega < 1$ commodius ita exprimetur:

$$\Sigma = \frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1.2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}}} \cdot \frac{A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)}}{C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z''} . \&c.$$

400. Accommodemus hanc interpolationem ad istam seriem:

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}};\ \&c.$$

cuius factores desumti sunt ex hac serie:

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}};\ \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}};\ \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}};\ \&c.$$

cuius terminorum infinitesimorum logarithmi sunt $= 0$.

Erit ergo $Z = \frac{a-c+c\omega}{b-c+c\omega}$; $Z' = \frac{a+c\omega}{b+c\omega}$; &c.

Hinc si illius seriei terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit ex §. 398:

$$\Sigma = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)} \cdot \frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)} \cdot \frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)} . \&c.$$

Quare si desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = \frac{a(2b+c)}{b(2a+c)} \cdot \frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)} \cdot \frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)} . \&c.$$

EXEM-

EXEMPLUM.

Interpolare hanc seriem:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.3}{2.4}};\ \overset{3}{\frac{1.3.5}{2.4.6}};\ \overset{4}{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}};\ \overset{5}{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}};\ \&c.$$

Cum hic sit $a = 1$, $b = 2$, & $c = 2$; si terminus indici cuicunque ω respondens $= \Sigma$, erit

$$\Sigma = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)} \cdot \frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)} \cdot \frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)} \cdot \frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)} \cdot \&c.$$

Hinc si termini, qui indicibus $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, &c. respondent, ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c. erit:

$$\Sigma' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \Sigma$$

$$\Sigma''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega} \cdot \Sigma$$

&c.

Si itaque desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \&c.$$

Verum posito $\pi =$ semicircumferentiae circuli, cuius radius est $= 1$, supra ostendimus esse:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \&c.$$

Hanc-

Hancobrem termini intermedii indicibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. per peripheriam circuli exprimi poterunt, hoc modo:

Indices: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Termini: $\frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi}$; $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{2}{\pi}$; $\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{2}{\pi}$ &c.

Quam eandem interpolationem *Wallisius* in arithmetica infinitorum inuenit.

401. Consideremus nunc istam seriem:

1 2 3 4

a; $a(a+b)$; $a(a+b)(a+2b)$; $a(a+b)(a+2b)(a+3b)$; &c.

cuius factores hanc progressionem arithmeticam constituunt: a, $(a+b)$, $(a+2b)$, $(a+3b)$, $(a+4b)$, &c. huiusque termini infinitesimi ita sunt comparati, vt eorum logarithmorum differentiae euanescant. Cum igitur sit $Z = a - b + b\omega$, & $Z' = a + b\omega$; $Z'' = a + b + b\omega$; $Z''' = a + 2b + b\omega$; &c. si Σ denotet terminum seriei propositae, cuius index est $= \omega$, erit:

$$\Sigma = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega} \cdot \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega} \cdot \text{\&c.}$$

Hocque valore inuento, si ω denotet numerum quemvis fractum vnitate minorem, termini sequentes indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ita determinabuntur, vt sit

$\Sigma' =$

$$\Sigma' = (a + b\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)(a + 2b + b\omega)\,\Sigma$$
&c.

Quare ſi deſideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a + \frac{5}{2}b} \cdot \&c.$$

ideoque ſumtis quadratis:

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)} \cdot \&c.$$

402. Ponatur in ſerie quam ſupra tractauimus:

$$\overset{1}{\frac{f}{g}};\ \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}};\ \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}};\ \overset{4}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}};\ \&c.$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens $= \Theta$, erit:

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}h)}{g(f+\frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g+\frac{3}{2}h)}{(g+h)(f+\frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g+\frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f+\frac{5}{2}h)} \cdot \&c.$$

ſtatuatur nunc: $f = a$; $g = a + \frac{1}{2}b$; & $h = b$; erit:

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \&c.$$

ideoque fiet $\Sigma^2 = a\Theta$, & $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Quocirca ſi huius ſeriei:

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)};\ \&c.$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ refpondens ftatuatur $= \Sigma$; atque huius feriei:

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}};$$
&c.

terminus indici $\frac{1}{2}$ refpondens ponatur $= \Theta$; erit $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$.

Cum igitur hic feriei folorum numeratorum terminus indici $\frac{1}{2}$ refpondens fit $= \Sigma$, fi in ferie denominatorum terminus indici $\frac{1}{2}$ refpondens ponatur $= \Lambda$; erit $\Theta = \frac{\Sigma}{\Lambda}$; at eft $\Theta = \frac{\Sigma^2}{a}$, vnde fiet $\Sigma = \frac{a}{\Lambda}$, feu $\Sigma\Lambda = a$, quibus theorematibus interpolatio huiusmodi ferierum non mediocriter illuftratur.

EXEMPLUM I.

Sit propofita haec feries interpolanda:

$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,$ &c.

Quia hic eft $a = 1$, & $b = 1$, fi terminus indici ω refpondens ponatur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega}\cdot 2^{\omega}}{1+\omega}\cdot\frac{2^{1-\omega}\cdot 3^{\omega}}{2+\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}\cdot 4^{\omega}}{3+\omega}\cdot\frac{4^{1-\omega}\cdot 5^{\omega}}{4+\omega}\ \&c.$$

Hic pro ω femper fractio vnitate minor accipi poteft nihilominus enim interpolatio per totam feriem extendetur. Nam fi termini indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. refpondentes ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c.

erit:

erit:

$$\Sigma' = (1+\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1+\omega)(2+\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\,\Sigma$$

&c.

Seriei ergo propoſitae terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens erit:

$$\Sigma = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}\,;\; \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}}\,;\; \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}}\,;\; \&c. \qquad \text{ſiue}$$

$$\Sigma^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \&c.$$

Vnde cum ſit $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \&c.$

erit $\Sigma^2 = \frac{\pi}{4}$ & $\Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: hincque reſpondebunt

Indicibus: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Termini: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; &c.

EXEMPLUM II.

Sit propoſita haec ſeries interpolanda:

$$\overset{1}{1}\,;\; \overset{2}{1 \cdot 3}\,;\; \overset{3}{1 \cdot 3 \cdot 5}\,;\; \overset{4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\,;\; \&c.$$

Quia hic eſt $a = 1$; $b = 2$; ſi terminus indici ω reſpondens ponatur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{1+2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{3+2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} \cdot 7^{\omega}}{5+2\omega} \cdot \&c.$$

Nnnnn 2 ter-

terminique ordine sequentes ita erunt comparati:

$$\Sigma' = (1 + 2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)\,5 + 2\omega)\,\Sigma$$

&c.

Si igitur seriei propositae desideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, isque vocetur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{1.3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3.5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5.7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{7.9}}{8} \cdot \&c. \quad \text{ergo}$$

$$\Sigma^2 = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \&c. = \frac{2}{\pi},$$

ideoque habebitur $\Sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. At respondebunt

Indicibus:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	&c.
Termini:	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	$2.4.6\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;	&c.

Quodsi ergo prior series & haec inuicem multiplicentur vt habeatur haec series:

$$\overset{1}{1^2};\ \overset{2}{1^2.2.3};\ \overset{3}{1^2.2.3^2.5};\ \overset{4}{1^2.2.3^2.4.5.7};\ \overset{5}{1^2.2.3^2.4.5^2.7.9};$$

&c.

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; quod facile perspicitur, si isti seriei haec forma tribuatur:

$$\overset{1}{\frac{1.2}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.2.3.4}{2^2}};\ \overset{3}{\frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}};\ \overset{4}{\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4}};\ \&c.$$

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens manifesto est $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXEMPLUM III.

Sit ista series proposita interpolanda :

$$\overset{1}{\frac{n}{1}}\;;\;\overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\,2}}\;;\;\overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}}\;;\;\overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}}\;;\;\&c.$$

Considerentur huius seriei numeratores ac denominatores seorsim, & cum numeratores sint:

$$\overset{1}{n}\;;\;\overset{2}{n(n-1)}\;;\;\overset{3}{n(n-1)(n-2)}\;;\;\overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\;;\;\&c.$$

fiet applicatione facta, $a = n$, & $b = -1$, vnde huius seriei terminus indici ω respondens erit $=$

$$n^{\omega}\cdot\frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega}\cdot\frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega}\cdot\frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega}\cdot\&c.$$

quae autem expressio ob factores in negatiuos abeuntes nihil certi monstrat. Transformetur ergo series proposita, ponendo breuitatis gratia $1.\,2.\,3\;.\;.\;.\;n = N$, in hanc:

$$N\left(\overset{1}{\frac{1}{1.1.2.3\ldots(n-1)}}\;;\;\overset{2}{\frac{1}{1.2.\,1.2.3\ldots(n-2)}}\;;\;\overset{3}{\frac{1}{1.2.3.1.2.3\ldots(n-3)}}\;;\;\&c.\right)$$

cuius denominatores cum constent duobus factoribus, alteri constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1.\,2.\,3\ldots.(n-1)}\;;\;\overset{2}{1.\,2.\,3\ldots.(n-2)}\;;\;\overset{3}{1.\,2.\,3\ldots.(n-3)}\;;\;\&c.$$

cuius terminus indici ω respondens, conuenit cum termino huius seriei:

N n n n n 3 1 ;

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 1; & 1.2; & 1.2.3; & 1.2.3.4; & 1.2.3.4.5; & \&c. \end{array}$$

indici $n-\omega$ respondente: qui est

$$\frac{1^{1-n+\omega}\,.\,2^{n-\omega}}{1+n-\omega}\cdot\frac{2^{1-n+\omega}\,.\,3^{n-\omega}}{2+n-\omega}\cdot\frac{3^{1-n+\omega}\,.\,4^{n-\omega}}{3+n-\omega}\cdot\&c.$$

Sit autem huius seriei terminus indici $1-\omega$ respondens $=\Theta$; erit:

$$\Theta=\frac{1^{\omega}\,.\,2^{1-\omega}}{2-\omega}\cdot\frac{2^{\omega}\,.\,3^{1-\omega}}{3-\omega}\cdot\frac{3^{\omega}\,.\,4^{1-\omega}}{4-\omega}\cdot\&c.$$

atque cum respondeant:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Indicibus:} & 1-\omega; & 2-\omega; & 3-\omega & \\ \text{Termini:} & \Theta; & (2-\omega)\Theta; & (2-\omega)(3-\omega)\Theta; & \&c. \end{array}$$

indici $n-\omega$ respondebit hic terminus:

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\;\ldots\;(n-\omega)\Theta.$$

Deinde illorum denominatorum alteri factores constituent hanc seriem:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 1; & 1.2; & 1.2.3; & 1.2.3.4; & 1.2.3.4.5; & \&c. \end{array}$$

si terminus indici ω respondens ponatur $=\Lambda$, erit:

$$\Lambda=\frac{1^{1-\omega}\,.\,2^{\omega}}{1+\omega}\cdot\frac{2^{1-\omega}\,.\,3^{\omega}}{2+\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}\,.\,4^{\omega}}{3+\omega}\cdot\&c.$$

Quibus inuentis si ipsius seriei propositae:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \frac{n}{1}; & \frac{n(n-1)}{1.\,2}; & \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}; & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}; & \&c. \end{array}$$

ter-

terminus indici ω respondens ponatur Σ, erit:

$$\Sigma = \frac{N}{\Lambda.(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\;\ldots\;(n-\omega)\Theta}.$$

At vero est:

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\;\ldots\;(n-\omega)} =$$

$$\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\;\ldots\;\cdot\frac{n}{n-\omega},$$

atque

$$\Lambda\Theta = \frac{1.2}{(1+\omega)(2-\omega)}\cdot\frac{2.3}{(2+\omega)(3-\omega)}\cdot\frac{3.4}{(3+\omega)(4-\omega)}.\;\&c.$$

Ex quibus terminus indici ω respondens quaesitus erit:

$$\Sigma = \frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\frac{5}{5-\omega}\cdot\;\ldots\;\cdot\frac{n}{n-\omega}\cdot$$

$$\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\;2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\;3}\cdot\frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3.\;4}.\;\&c.\text{ in infinitum.}$$

Indici ergo $\frac{1}{2}$ respondebit iste terminus:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\;\ldots\;\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot$$

$$\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{7.7}{6.8}\cdot\frac{9.9}{8.10}.\;\&c.$$

qui reducitur ad $\frac{4.6.8.10\;\ldots\;2n}{3.5.7.9\;\ldots\;(2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}$, seu

erit $= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8.10\;\ldots\;2n}{1.3.5.7.9\;\ldots\;(2n-1)}.$

Si

Si fuerit $n = 2$, prodibit iſta feries interpolanda:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \&c. \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \&c. \end{array}$$

cuius propterea terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens eſt $= \frac{16}{3\pi}$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur terminus reſpondens indici $= \frac{1}{2}$ *in hac ſerie:*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \&c.$$

Oritur haec feries ex praecedente ſi ponatur $n = \frac{1}{2}$, eritque propterea terminus quaeſitus, qui ſit $= \Sigma$:

$$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.4.6.8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2n}{1.3.5.7 \quad . \quad . \quad . \quad (2n-1)} \text{ poſito } n = \frac{1}{2}.$$

Ponatur $\frac{2.4.6.8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2n}{1.3.5.7 \quad . \quad . \quad . \quad (2n-1)} = \Theta$ ſi ſit $n = \frac{1}{2}$,

eritque Θ terminus reſpondens indici $\frac{1}{2}$ in hac ferie:

$$\frac{2}{1}; \quad \frac{2.4}{1.3}; \quad \frac{2.4.6}{1.3.5}; \quad \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}; \quad \&c.$$

qui ex ſuperioribus prodit $= \frac{\pi}{2}$. Quocirca feriei propoſitae terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, qui quaeritur, erit $= 1$. Quoniam autem in iſta ferie, ſi terminus indici cuicunque ω reſpondens ponatur $= \Sigma$, ſequens eum erit

$\Sigma' =$

$\Xi' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Xi$; series proposita ita mediis terminis interiiciendis interpolabitur:

Indices: $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$

Termini: $1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{-1.1}{2.4};\ 0;\ \frac{1.1.3}{2.4.6};\ 0;$ &c.

EXEMPLUM. V.

Si n *fuerit numerus quicunque fractus, inuenire terminum indici* ω *respondentem in serie:*

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{\frac{n}{1}};\ \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\ 2}};\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}};\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2).(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}}$$

&c.

Si expressionem $\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\ \ldots\ldots\ \frac{n}{n-\omega}$ cum §. 400. comparemus, fiat $a=1$, $c=1$, $b=1-\omega$, ibique loco ω posito n, erit:

$$\frac{1}{1-\omega}\cdot\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n}{n-\omega}=\frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)}\cdot\frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)}\cdot\&c.$$

vnde terminus quaesitus indici ω respondens si ponatur $=\Xi$, erit:

$$\Xi=\frac{(1-\omega+n).2}{(1+n)(2-\omega)}\cdot\frac{(2-\omega+n)3}{(2+n)(3-\omega)}\cdot\&c.\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ 3}\cdot\&c.$$

ideoque

$$\Xi=\frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1\ (1+n)}\cdot\frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2\ (2+n)}\cdot\frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3\ (3+n)}\cdot\&c.$$

 quo-

Hancobrem termini intermedii indicibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. per peripheriam circuli exprimi poterunt, hoc modo:

Indices: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Termini: $\frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi}$; $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{2}{\pi}$; $\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{2}{\pi}$ &c.

Quam eandem interpolationem *Wallisius* in arithmetica infinitorum inuenit.

401. Consideremus nunc istam seriem:

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)};\ \&c.$$

cuius factores hanc progressionem arithmeticam constituunt: a, $(a+b)$, $(a+2b)$, $(a+3b)$, $(a+4b)$, &c. huiusque termini infinitesimi ita sunt comparati, vt eorum logarithmorum differentiae euanescant. Cum igitur sit $Z = a - b + b\,\omega$, & $Z' = a + b\omega$; $Z'' = a+b+b\omega$; $Z''' = a+2b+b\omega$; &c. si Σ denotet terminum seriei propositae, cuius index est $= \omega$, erit:

$$\Sigma = a^{\omega}\cdot\frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega}\cdot\frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}\cdot\frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega}\cdot \&c.$$

Hocque valore inuento, si ω denotet numerum quemvis fractum vnitate minorem, termini sequentes indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ita determinabuntur, vt sit

$\Sigma' =$

$$\Sigma' = (a + b\omega)\, \Sigma$$
$$\Sigma'' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)\, \Sigma$$
$$\Sigma''' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)(a + 2b + b\omega)\, \Sigma$$
&c.

Quare ſi deſideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, facto $\omega = \frac{1}{2}$, erit:

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{5}{2}b} . \&c.$$

ideoque ſumtis quadratis:

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)} . \&c.$$

402. Ponatur in ſerie quam ſupra tractauimus:

$$\overset{1}{\frac{f}{g}};\ \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}};\ \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}};\ \overset{4}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}};\ \&c.$$

terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens $= \Theta$, erit:

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}h)}{g(f+\frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g+\frac{3}{2}h)}{(g+h)(f+\frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g+\frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f+\frac{5}{2}h)} . \&c.$$

ſtatuatur nunc: $f = a$; $g = a + \frac{1}{2}b$; & $h = b$; erit:

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} . \&c.$$

ideoque fiet $\Sigma^2 = a\Theta$, & $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Quocirca ſi huius ſeriei:

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)};\ \&c.$$

 ter-

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens statuatur $= \Sigma$; atque huius seriei:

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}};$$
&c.

terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Theta$; erit $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$.

Cum igitur hic seriei solorum numeratorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens sit $= \Sigma$, si in serie denominatorum terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens ponatur $= \Lambda$; erit $\Theta = \frac{\Sigma}{\Lambda}$; at est $\Theta = \frac{\Sigma^2}{a}$, vnde fiet $\Sigma = \frac{a}{\Lambda}$, seu $\Sigma\Lambda = a$, quibus theorematibus interpolatio huiusmodi serierum non mediocriter illustratur.

EXEMPLUM I.

Sit proposita haec series interpolanda:

1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, &c.

Quia hic est $a = 1$, & $b = 1$, si terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega}.2^{\omega}}{1+\omega}.\frac{2^{1-\omega}.3^{\omega}}{2+\omega}.\frac{3^{1-\omega}.4^{\omega}}{3+\omega}.\frac{4^{1-\omega}.5^{\omega}}{4+\omega}\ \&c.$$

Hic pro ω semper fractio vnitate minor accipi potest nihilominus enim interpolatio per totam seriem extendetur. Nam si termini indicibus $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, &c. respondentes ponantur Σ', Σ'', Σ''', &c.

erit:

erit:

$$\Sigma' = (1+\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1+\omega)(2+\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\,\Sigma$$
&c.

Seriei ergo propositae terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens erit:

$$\Sigma = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}; \quad \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}}; \quad \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}}; \quad \&c. \qquad \text{siue}$$

$$\Sigma^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \&c.$$

Vnde cum sit $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \&c.$

erit $\Sigma^2 = \frac{\pi}{4}$ & $\Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: hincque respondebunt

Indicibus:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Termini:	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;	$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;	$\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;	$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; &c.

EXEMPLUM II.

Sit proposita haec series interpolanda:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{1 \cdot 3};\ \overset{3}{1 \cdot 3 \cdot 5};\ \overset{4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7};\ \&c.$$

Quia hic est $a = 1$; $b = 2$; si terminus indici ω respondens ponatur $= \Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{1 + 2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{3 + 2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} \cdot 7^{\omega}}{5 + 2\omega} \cdot \&c.$$

terminique ordine ſequentes ita erunt comparati:

$$\Sigma' = (1+2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1+2\omega)(3+2\omega)\,\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1+2\omega)(3+2\omega)\,5+2\omega)\,\Sigma$$
&c.

Si igitur ſeriei propoſitae deſideretur terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, isque vocetur $=\Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{1.3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3.5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5.7}}{6}\cdot\frac{\sqrt{7.9}}{8}.\ \&c. \quad \text{ergo}$$

$$\Sigma^2 = \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{3.5}{4.4}\cdot\frac{5.7}{6.6}\cdot\frac{7.9}{8.8}.\ \&c. \quad = \frac{2}{\pi},$$

ideoque habebitur $\Sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. At reſpondebunt

Indicibus: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$ &c.

Termini: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4.6\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; &c.

Quodſi ergo prior ſeries & haec inuicem multiplicentur vt habeatur haec ſeries:

$$\overset{1}{1^2};\ \overset{2}{1^2.2.3};\ \overset{3}{1^2.2.3^2.5};\ \overset{4}{1^2.2.3^2.4.5.7};\ \overset{5}{1^2.2.3^2.4.5^2.7.9};$$
&c.

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens erit $=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; quod facile perſpicitur, ſi iſti ſeriei haec forma tribuatur:

$$\overset{1}{\frac{1.2}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.2.3.4}{2^2}};\ \overset{3}{\frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}};\ \overset{4}{\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4}};\ \&c.$$

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens manifeſto eſt $=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

EXEM-

EXEMPLUM III.

Sit ista series proposita interpolanda:

$$\overset{1}{\frac{n}{1}};\ \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\,2}};\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}};\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}};\ \&c.$$

Considerentur huius seriei numeratores ac denominatores seorsim, & cum numeratores sint:

$$\overset{1}{n};\ \overset{2}{n(n-1)};\ \overset{3}{n(n-1)(n-2)};\ \overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)};\ \&c.$$

fiet applicatione facta, $a=n$, & $b=-1$, vnde huius seriei terminus indici ω respondens erit $=$

$$n^{\omega}\cdot\frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega}\cdot\frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega}\cdot\frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega}.\ \&c.$$

quae autem expressio ob factores in negatiuos abeuntes nihil certi monstrat. Transformetur ergo series proposita, ponendo breuitatis gratia $1.\,2.\,3\ \ldots\ n=N$, in hanc:

$$N\left(\overset{1}{\frac{1}{1.1.2.3\ldots(n-1)}};\ \overset{2}{\frac{1}{1.2.\ 1.2.3\ldots(n-2)}};\ \overset{3}{\frac{1}{1.2.3.1.2.3\ldots(n-3)}};\ \&c.\right)$$

cuius denominatores cum constent duobus factoribus, alteri constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1.2.3\ldots(n-1)};\ \overset{2}{1.2.3\ldots(n-2)};\ \overset{3}{1.2.3\ldots(n-3)};\ \&c.$$

cuius terminus indici ω respondens, conuenit cum termino huius seriei:

$$\overset{1}{1}\;;\;\overset{2}{1.2}\;;\;\overset{3}{1.2.3}\;;\;\overset{4}{1.2.3.4}\;;\;\overset{5}{1.2.3.4.5}\;;\;\&c.$$

indici $n-\omega$ respondente: qui est

$$\frac{1^{1-n+\omega}.2^{n-\omega}}{1+n-\omega}.\frac{2^{1-n+\omega}.3^{n-\omega}}{2+n-\omega}.\frac{3^{1-n+\omega}.4^{n-\omega}}{3+n-\omega}.\&c.$$

Sit autem huius seriei terminus indici $1-\omega$ respondens $=\Theta$; erit:

$$\Theta=\frac{1^{\omega}.2^{1-\omega}}{2-\omega}.\frac{2^{\omega}.3^{1-\omega}}{3-\omega}.\frac{3^{\omega}.4^{1-\omega}}{4-\omega}.\&c.$$

atque cum respondeant:

Indicibus: $1-\omega$; $2-\omega$; $3-\omega$
Termini: Θ ; $(2-\omega)\Theta$; $(2-\omega)(3-\omega)\Theta$; &c.

indici $n-\omega$ respondebit hic terminus:

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\;\ldots\;(n-\omega)\Theta.$$

Deinde illorum denominatorum alteri factores constituent hanc seriem:

$$\overset{1}{1}\;;\;\overset{2}{1.2}\;;\;\overset{3}{1.2.3}\;;\;\overset{4}{1.2.3.4}\;;\;\overset{5}{1.2.3.4.5}\;;\;\&c.$$

si terminus indici ω respondens ponatur $=\Lambda$, erit:

$$\Lambda=\frac{1^{1-\omega}.2^{\omega}}{1+\omega}.\frac{2^{1-\omega}.3^{\omega}}{2+\omega}.\frac{3^{1-\omega}.4^{\omega}}{3+\omega}.\&c.$$

Quibus inuentis si ipsius seriei propositae:

$$\overset{1}{\frac{n}{1}}\;;\;\overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\,2}}\;;\;\overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}}\;;\;\overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}}\;;\;\&c.$$

ter-

terminus indici ω respondens ponatur Σ, erit:

$$\Sigma = \frac{N}{\Lambda.(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ldots\ (n-\omega)\Theta}.$$

At vero est:

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ldots\ (n-\omega)} =$$

$$\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{n}{n-\omega},$$

atque

$$\Lambda\Theta = \frac{1.2}{(1+\omega)(2-\omega)}\cdot\frac{2.3}{(2+\omega)(3-\omega)}\cdot\frac{3.4}{(3+\omega)(4-\omega)}\cdot \&c.$$

Ex quibus terminus indici ω respondens quaesitus erit:

$$\Sigma = \frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\frac{5}{5-\omega}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{n}{n-\omega}\cdot$$

$$\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ 3}\cdot\frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3.\ 4}\cdot \&c. \text{ in infinitum.}$$

Indici ergo $\frac{1}{2}$ respondebit iste terminus:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot$$

$$\frac{3.3}{2.4}\cdot\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{7.7}{6.8}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot \&c.$$

qui reducitur ad $\frac{4.6.8.10\ \ldots\ldots\ 2n}{3.5.7.9\ \ldots\ (2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi}$, seu

$$\text{erit} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.8.10\ \ldots\ldots\ 2n}{1.3.5.7.9\ \ldots\ (2n-1)}.$$

Si

Si fuerit $n = 2$, prodibit iſta ſeries interpolanda:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \&c. \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \&c. \end{array}$$

cuius propterea terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens eſt $= \frac{16}{3\pi}$.

EXEMPLUM IV.

Quaeratur terminus reſpondens indici $= \frac{1}{2}$ in hac ſerie:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \&c.$$

Oritur haec ſeries ex praecedente ſi ponatur $n = \frac{1}{2}$, eritque propterea terminus quaeſitus, qui ſit $= \Sigma$:

$$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2.4.6.8 \ldots\ldots 2n}{1.3.5.7 \ldots\ldots (2n-1)} \text{ poſito } n = \tfrac{1}{2}.$$

Ponatur $\frac{2.4.6.8 \ldots\ldots 2n}{1.3.5.7 \ldots\ldots (2n-1)} = \Theta$ ſi ſit $n = \frac{1}{2}$, eritque Θ terminus reſpondens indici $\frac{1}{2}$ in hac ſerie:

$$\frac{2}{1}; \quad \frac{2.4}{1.3}; \quad \frac{2.4.6}{1.3.5}; \quad \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}; \quad \&c.$$

qui ex ſuperioribus prodit $= \frac{\pi}{2}$. Quocirca ſeriei propoſitae terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens, qui quaeritur, erit $= 1$. Quoniam autem in iſta ſerie, ſi terminus indici cuicunque ω reſpondens ponatur $= \Sigma$, ſequens eum erit $\Sigma' =$

$\Sigma' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Sigma$; series proposita ita mediis terminis interiiciendis interpolabitur:

Indices: $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$

Termini: $1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{-1.1}{2.4};\ 0;\ \frac{1.1.3}{2.4.6};\ 0;$ &c.

EXEMPLUM. V.

Si n fuerit numerus quicunque fractus, inuenire terminum indici ω respondentem in serie:

$$\overset{0}{1};\ \overset{1}{\frac{n}{1}};\ \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.\ 2}};\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}};\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2).(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}}$$

&c.

Si expressionem $\frac{2}{2-\omega}.\frac{3}{3-\omega}.\frac{4}{4-\omega}.\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{n}{n-\omega}$ cum §. 400. comparemus, fiat $a=1$, $c=1$, $b=1-\omega$, ibique loco ω posito n, erit:

$$\frac{1}{1-\omega}.\frac{2}{2-\omega}.\frac{3}{3-\omega}.\ .\ .\ .\ .\frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)}.\frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)}.\text{\&c.}$$

vnde terminus quaesitus indici ω respondens si ponatur $=\Sigma$, erit:

$$\Sigma = \frac{(1-\omega+n).2}{(1+n)(2-\omega)}.\frac{(2-\omega+n)3}{(2+n)(3-\omega)}.\text{\&c.}\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1.\ \ 2}.\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2.\ \ 3}.\text{\&c.}$$

ideoque

$$\Sigma = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1\ (1+n)}.\frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2\ (2+n)}.\frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3\ (3+n)}.\text{\&c.}$$

 quo-

quoties ergo $n - \omega$ fuerit numerus integer valor ipſius Σ rationaliter exprimi poteſt.

Sic ſi ſit $n = \omega$ erit $\Sigma = 1$

ſi $n = 1 + \omega$ erit $\Sigma = n$

ſi $n = 2 + \omega$ erit $\Sigma = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

ſi $n = 3 + \omega$ erit $\Sigma = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

&c.

At ſi fuerit $\omega - n$ numerus integer affirmatiuus, erit ſemper $\Sigma = 0$.

CAPUT

CAPUT XVIII.

DE VSU CALCULI DIFFERENTIALIS IN RESOLUTIONE FRACTIONUM.

403.

Methodus fractionem quamuis propositam in fractiones simplices resoluendi, quam in Introductione exposuimus etsi, per se satis est facilis; tamen ope calculi differentialis ita perfici potest, vt saepenumero multo minori negotio in vsum vocari possit. Praecipue vero si denominator fractionis resoluendae fuerit indefiniti gradus, methodus ante exposita plerumque non mediocriter impeditur, dum loco quantitatis incognitae substitutio valoris, quem ex quopiam factore induit, fieri debet. Imprimis autem his casibus diuisio denominatoris per factorem iam inuentum nimis fit molesta. Quae operatio, si calculus differentialis in subsidium vocetur, euitari poterit, ita vt non opus sit alterum denominatoris factorem, qui oritur si denominator per factorem iam cognitum diuidatur, nosse. Hunc autem vsum praestat methodus determinandi valorem fractionis, cuius numerator ac denominator certo casu ambo euanescunt, cuius beneficio, quemadmodum resolutio fractionum iam supra tradita commodior & tractabilior reddi queat, hoc Capite doceamus, simulque finem huic libro, in quo vsum calculi differentialis in Analysi exposuimus, imponamus.

404. Si igitur proposita fuerit fractio quaecunque $\frac{P}{Q}$, cuius numerator ac denominator sint functiones variabilis quantitatis x, rationales & integrae; primum videndum est, vtrum x in numeratore P tot pluresue dimensiones habeat, quam in denominatore Q. Quodsi eueniat, complectetur fractio $\frac{P}{Q}$ in se partem integram huius formae $A + Bx + Cx^2 +$ &c. quae diuisionis ope inde erui poterit: pars reliqua erit fractio eundem denominatorem Q habens, sed cuius numerator erit functio puta R pauciores ipsius x dimensiones continens, quam denominator Q, ita vt vlterior resolutio instituenda sit in fractione $\frac{R}{Q}$. Interim tamen non opus est nosse hunc nouum numeratorem R, sed eaedem fractiones simplices, quas fractio $\frac{R}{Q}$ suppeditatura esset, elici possunt immediate ex fractione proposita $\frac{P}{Q}$; prouti iam supra notauimus.

405. Praeter partem integram igitur, si quam continet fractio $\frac{P}{Q}$, erui debent fractiones simplices, quarum denominatores sint vel binomiales huius formae $f + gx$, vel trinomiales huiusmodi $f + 2x \cos\phi . \sqrt{fg} + gxx$, vel eiusmodi formularum quadrata, cubiue seu altiores potestates. Hique denominatores omnes erunt factores denominatoris Q, ita vt quilibet denominatoris ipsius Q factor praebeat fractionem simplicem. Scilicet si denomi-

mi-

minator Q factorem habeat $f+gx$, ex eo nascetur fractio simplex huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$; sin autem factor fuerit $(f+gx)^2$, binae fractiones $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Atque ex denominatoris Q factore cubico $(f+gx)^3$ orientur tres fractiones simplices huius formae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$; & ita porro. Quodsi autem denominator Q factorem habuerit trinomialem huiusmodi $ff-2fgx\cos\phi+ggxx$, ex eo orietur fractio simplex talis formae $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}x}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$; &, si duo huiusmodi factores fuerint aequales vti $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2$, hinc prodibunt duae fractiones $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}x}{(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^2}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}x}{ff-2fgx\cos\phi+ggxx}$. Huiusmodi autem factor cubicus $(ff-2fgx\cos\phi+ggxx)^3$ dabit tres fractiones simplices, biquadratus quatuor, & ita porro.

406. Resolutio ergo fractionis cuiuscunque $\frac{P}{Q}$ ita instituatur. Quaerantur primo omnes factores tam simplices seu binomiales, quam trinomiales denominatoris Q, &, si qui fuerint inter se aequales, ii probe notentur, & instar vnius habeantur. Tum ex singulis his denominatoris factoribus eliciantur fractiones simplices, vel modo iam supra ostenso, vel eo, quem hic sumus

tradituri, & qui pro lubitu in locum prioris subſtitui poterit. Quo facto aggregatum omnium iſtarum fractionum ſimplicium vna cum parte integra, ſi quam continet fractio propoſita $\frac{P}{Q}$, huius valorem exhaurient. Inventionem quidem factorum denominatoris Q hic tanquam cognitam aſſumimus, cum pendeat a reſolutione aequationis $Q = 0$; methodumque hic trademus per calculum differentialem pro dato quouis denominatoris factore fractionem ſimplicem inde ortam definiendi. Quod, cum iſtarum fractionum ſimplicium denominatores iam habeantur, praeſtabitur, ſi numeratorem cuiusque fractionis inueſtigare doceamus.

407. Ponamus ergo fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere $f + gx$, ita vt ſit $Q = (f + gx) S$ neque vero hic alter factor S inſuper eundem factorem $f + gx$ contineat. Sit fractio ſimplex ex iſto factore orta $= \frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$; & complementum huiusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ita vt ſit $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$. Erit ergo $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} = \frac{P - \mathfrak{A}S}{(f + gx) S}$; ideoque $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$. Cum igitur V ſit functio integra ipſius x, neceſſe eſt vt $P - \mathfrak{A}S$ ſit diuiſibile per $f + gx$; ac propterea ſi ponatur $f + gx = 0$ ſeu $x = \frac{-f}{g}$, expreſ-

ſio

ſio $P - \mathfrak{A}S$ euaneſcet. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, & cum ſit $P - \mathfrak{A}S = 0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, vti iam ſupra inuenimus. Cum autem ſit $S = \frac{Q}{f+gx}$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)P}{Q}$, ſi vbique ponatur $f+gx=0$, ſeu $x = \frac{-f}{g}$. Quoniam vero hoc caſu tam numerator $(f+gx)P$, quam denominator Q euaneſcit; per ea, quae de valore huiusmodi fractionum inueſtigando expoſuimus, erit $\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)dP + Pg\,dx}{dQ}$, ſi quidem ponatur $x = \frac{-f}{g}$. Hoc autem caſu ob $(f+gx)dP = 0$, erit $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$; ſicque per differentiationem valor numeratoris $\mathfrak{A}$ expedite reperitur.

408. Si igitur fractionis propoſitae $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat ſimplicem $f+gx$, ex eo orietur fractio ſimplex $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, exiſtente $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$, poſtquam hic vbique loco x valor $\frac{-f}{g}$ ex aequatione $f+gx=0$ oriundus fuerit ſubſtitutus. Hoc ergo modo non neceſſe eſt, vt ante quaeratur alter denominatoris Q factor S, qui oritur, ſi Q per $f+gx$ diuidatur. Hinc ſi Q non in factoribus exprimatur, hanc diuiſionem ſaepe non parum moleſtam, praecipue ſi x in deno-

nominatore Q habeat exponentes indefinitos, omittere poterimus, cum valor ipsius $\mathfrak{A}$ ex formula $\frac{gP\,dx}{dQ}$ obtineatur. Sin autem denominator Q iam in factoribus fuerit expressus, ita vt inde valor ipsius S sponte pateat, tum praeferenda erit altera expressio, qua inuenimus $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, ponendo pariter vbique $x = \frac{-f}{g}$. Sicque pro inueniendo valore ipsius $\mathfrak{A}$ quouis casu ea formula adhiberi poterit, quae commodior & expeditior videatur. Vsum autem nouae formulae aliquot exemplis illustrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit proposita ista fractio $\frac{x^9}{1+x^{17}}$, *cuius fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1+x$ *oriundam definiri oporteat.*

Quoniam hic est $Q = 1 + x^{17}$, cuius etsi factor $1+x$ constat, tamen si, vti prima methodus postulat per eum diuidere velimus, prodiret
$S = 1 - x + xx - x^3 + \ldots + x^{16}$.
Commodius igitur vtemur noua formula $\mathfrak{A} = \frac{gP\,dx}{dQ}$; quia itaque est $f=1, g=1$, & $P = x^9$, ob $dQ = 17x^{16}dx$, fiet $\mathfrak{A} = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}$, posito $x = -1$, vnde fit $\mathfrak{A} = -\frac{1}{17}$, & fractio simplex ex denominatoris factore $1+x$ oriunda erit $\frac{-1}{17(1+x)}$.

EX-

EXEMPLUM II.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-x^{2n}}$, *fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam inuestigare.*

Ob factorem propositum $1-x$, erit $f=1$, & $g=-1$. Tum vero denominator $Q=1-x^{2n}$ dat $dQ=-2nx^{2n-1}dx$; vnde propter $P=x^m$ obtinebitur $\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Positoque ex aequatione $1-x=0$, $x=1$, fiet $\mathfrak{A}=\frac{1}{2n}$; ita vt fractio simplex futura sit haec $\frac{1}{2n(1-x)}$.

EXEMPLUM III.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^k+3x^n}$, *eius fractionem simplicem ex denominatoris factore* $1-x$ *oriundam determinare.*

Hic ergo fit $f=1$; $g=-1$; $P=x^m$; $Q=1-4x^k+3x^n$ & $\frac{dQ}{dx}=-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}$; vnde fit $\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}}$ & posito $x=1$, erit $\mathfrak{A}=\frac{1}{4k-3n}$. Fractio ergo simplex ex isto denominatoris factore simplici $1-x$ oriunda erit $=\frac{1}{(4k-3n)(1-x)}$.

409. Ponamus nunc fractionis $\frac{P}{Q}$ denominatorem Q factorem habere quadratum $(f+gx)^2$, & fractiones simplices hinc oriundas esse $= \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Sit $Q = (f+gx)^2 S$ & complementum $= \frac{V}{S}$; ita vt sit $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} - \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$; & $V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}(f+gx)S}{(f+gx)^2}$. Quia. nunc V est functio integra, necesse est vt sit $P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f+gx)$ diuisibile per $(f+gx)^2$; & cum S factorem $f+gx$ amplius non contineat, quoque haec expressio $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx)$ diuisibilis erit per $(f+gx)^2$; ideoque facto $f+gx = 0$, seu $x = \frac{-f}{g}$ non solum ipsa, sed etiam eius differentiale $d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}g\,dx$ euanescet. Fiat ergo $x = \frac{-f}{g}$, eritque ex priori aequatione $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$; ex posteriori vero erit $\mathfrak{B} = \frac{1}{g\,dx} d.\frac{P}{S}$; quibus valoribus inuentis habebuntur fractiones quaesitae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$.

EXEM-

EXEMPLUM.

Proposita fractione $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$, *cuius denominator factorem habet* $(1-x)^2$, *inuenire fractiones simplices hinc oriundas.*

Cum hic sit $f=1$, $g=-1$, $P=x^m$ & $Q=1-4x^3+3x^4$, erit $S=1+2x+3xx$; $\frac{P}{S}=\frac{x^m}{1+2x+3xx}$, &

$$d.\frac{P}{S}=\frac{mx^{m-1}dx+2(m-1)x^m dx+3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}.$$

Hinc posito $x=1$, erit:

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{6} \;\&\; \mathfrak{B}=-1.\frac{6m-8}{36}=\frac{4-3m}{18};$$

vnde fractiones quaesitae erunt: $\frac{1}{6(1-x)^2}+\frac{4-3m}{18(1-x)}$.

410. Habeat fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q tres factores simplices aequales, seu sit $Q=(f+gx)^3$, sintque fractiones simplices ex hoc factore cubico $(f+gx)^3$ oriundae hae: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$; complementum vero harum fractionum ad fractionem propositam $\frac{P}{Q}$ constituendam sit $\frac{V}{S}$, eritque $V=\frac{P-\mathfrak{A}S-\mathfrak{B}S(f+gx)-\mathfrak{C}S(f+gx)^2}{(f+gx)^3}$. Quare haec expressio $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2$

 diui-

diuisibilis erit per $(f+gx)^3$; vnde posito $f+gx=0$ seu $x=\frac{-f}{g}$, non solum ipsa haec expressio, sed etiam eius differentiale primum & secundum euadet $=0$. Erit scilicet ponendo $x=\frac{-f}{g}$:

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2=0$$

$$d.\frac{P}{S}-\mathfrak{B}g\,dx-2\mathfrak{C}g\,dx(f+gx)=0$$

$$dd.\frac{P}{S}-\mathfrak{C}g^2dx^2=0.$$

Ex prima aequatione ergo erit $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$

Ex secunda vero erit $\mathfrak{B}=\frac{1}{g\,dx}\,d.\frac{P}{S}$

Ex tertia denique definitur $\mathfrak{C}=\frac{1}{2g^2dx^2}\,dd.\frac{P}{S}$.

411. Generaliter ergo si fractionis $\frac{P}{S}$ denominator Q factorem habeat $(f+gx)^n$, ita vt sit $Q=(f+gx)^n S$; positis fractionibus simplicibus ex hoc factore $(f+gx)^n$ oriundis his:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}}+\frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}}+\frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}}+\frac{\mathfrak{E}}{(f+gx)^{n-4}}+\&c.$$

quoad ad vltimam, cuius denominator est $f+gx$, perveniatur, si ratiocinium vt ante instituatur, reperietur haec expressio:

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2-\mathfrak{D}(f+gx)^3-\mathfrak{E}(f+gx)^4-\&c.$$

diui-

diuisibilis esse debere per $(f+gx)^n$, hinc tam ipsa, quam singula eius differentialia vsque ad gradum $n-1$, casu $x=\frac{-f}{g}$ euanescere debebunt. Ex quibus aequationibus concludetur fore ponendo vbique $x=\frac{-f}{g}$:

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{1gdx}d.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{1.2g^2dx^2}dd.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{1.2.3g^3dx^3}d^3.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{1.2.3.4g^4dx^4}d^4.\frac{P}{S} \quad \&c.$$

Vbi quidem notandum est, differentialia ista ipsius $\frac{P}{S}$ ante capi oportere, quam loco x ponatur $\frac{-f}{g}$, alias enim variabilitas ipsius x tolleretur.

412. Facilius ergo hoc modo isti numeratores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. exprimuntur, quam eo modo, qui in Introductione est traditus, & saepenumero quoque hac noua ratione eorum valores expeditius reperiuntur. Quae comparatio quo facilius institui queat, valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, &c. priori modo definiamus:

Posito $x = \frac{-f}{g}$	Statuatur relicto x variabili.
$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$	$\frac{P - \mathfrak{A}S}{f+gx} = \mathfrak{P}$ erit
$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{S}$	$\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}S}{f+gx} = \mathfrak{Q}$ erit
$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}}{S}$	$\frac{\mathfrak{Q} - \mathfrak{C}S}{f+gx} = \mathfrak{R}$ erit
$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}}{S}$	$\frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{D}S}{f+gx} = \mathfrak{S}$ erit
$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{S}}{S}$	& ita porro.

413. Quodſi autem fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q non omnes factores ſimplices habeat reales, tum bini imaginariorum iunctim ſumantur, quorum productum erit reale. Sit ergo denominatoris Q factor $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$, qui poſitus $= 0$ dat hunc duplicem valorem imaginarium:

$$x = \frac{f}{g}\cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi; \quad \text{ex quo erit}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin.n\phi.$$

Ponamus eſſe $Q = (ff - 2fgx\cos\phi + ggxx)\,S$, atque S praeterea per $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$ non eſſe diuiſibile. Sit fractio ex iſto factore denominatoris oriunda:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$$

&

& complementum ad propofitam $\frac{P}{Q}$ fit $= \frac{V}{S}$, erit $V = \frac{P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$; vnde $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$ ac propterea quoque $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ diuifibile erit per $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$. Euanefcet ergo $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ fi ponatur $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx = 0$, hoc eft fi ponatur

vel $x = \frac{f}{g}\cos\phi + \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$

vel $x = \frac{f}{g}\cos\phi - \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$.

414. Quoniam P & S funt functiones integrae ipfius x, fiat in vtroque feorfim vtraque fubftitutio; & quia pro quauis poteftate ipfius x, puta x^n binomium hoc $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin . n\phi$ fubftitui debet. Ponamus primo vbique $\frac{f^n}{g^n}\cos\phi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & S in $\mathfrak{S}$. Deinde ponatur vbique $\frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$ pro x^n, hocque facto abeat P in $\mathfrak{p}$ & S in $\mathfrak{s}$; vbi notandum eft ante has fubftitutiones vtramque functionem P & S penitus debere euolui, ita vt, fi forte factoribus fint implicatae, ii per actualem multiplicationem tollantur. His valoribus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$, inuentis, manifeftum erit, fi ponatur:

$$x = \frac{f}{g}\cos\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\phi$$

func-

functionem P abituram esse in $\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}$, & functionem S abituram esse in $\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$. Hinc cum $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{a}x$ seu $P - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x)S$ vtroque casu euanescere debeat, erit:

$$\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}} = \left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\operatorname{cos}\phi \pm \frac{\mathfrak{a}f}{g\sqrt{-1}}\operatorname{sin}\phi\right)\left(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right)$$

vnde ob signa ambigua hae duae aequationes orientur:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\operatorname{cos}\phi - \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\operatorname{sin}\phi.$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\operatorname{cos}\phi + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\operatorname{sin}\phi$$

ex quibus eliminando $\mathfrak{A}$ eruitur:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{a}f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\operatorname{sin}\phi; \quad \text{ideoque erit}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\operatorname{sin}\phi}.$$

Deinde eliminando $\operatorname{sin}\phi$ erit:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\operatorname{cos}\phi\right). \quad \text{Ergo}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\operatorname{cos}\phi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\operatorname{sin}\phi}.$$

415. Cum iam sit $S = \frac{Q}{ff - 2fgx\operatorname{cos}\phi + ggxx}$; quia posito $ff - 2fgx\operatorname{cos}\phi + ggxx = 0$ tam numerator quam denominator euanescent, erit hoc casu:

$$S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg\operatorname{cos}\phi}.$$

Po-

Ponamus nunc, ſi vbique ſubſtituatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \operatorname{cof} n \phi$, functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q}$; ſin autem ſtatuatur $x^n = \frac{f^n}{g^n} \operatorname{fin} n \phi$, eam abire in $\mathfrak{q}$; atque manifeſtum eſt ſi ponatur $x = \frac{f}{g} \operatorname{cof} \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \operatorname{fin} \phi$ functionem $\frac{dQ}{dx}$ abire in $\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}}$. Ex quo functio S abibit in $\frac{\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{q} : \sqrt{-1}}{\pm 2 f g \operatorname{fin} \phi : \sqrt{-1}}$. Cum ergo ſit $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$ eodem valore pro x poſito, habebitur:

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}} \operatorname{fin} \phi - 2fg\,\mathfrak{s} \operatorname{fin} \phi.$$

Erit ergo $\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg \operatorname{fin} \phi}$ & $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{q}}{2fg \operatorname{fin} \phi}$.
Hisque valoribus ſubſtitutis, fiet $\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$

$$\& \quad \mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}) \operatorname{fin} \phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \operatorname{cof} \phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

416. Hinc ergo idonea obtinetur ratio ex quouis factore ſecundae poteſtatis fractionem ſimplicem formandi, hicque cum ipſe fractionis propoſitae denominator in computo retineatur, diuiſionem, qua valor litterae S definiri deberet, & quae ſaepe non parum eſt moleſta,

euitamus. Si igitur fractionis $\frac{P}{Q}$ denominator Q factorem habeat talem $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$, sequenti modo fractio simplex ex hoc factore oriunda, quam fingamus $= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{ff - 2fgx\cos\phi + ggxx}$, definietur. Ponatur $x = \frac{f}{g}\cos\phi$, & pro quauis ipsius x potestate x^n scribatur $\frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$; quo facto abeat P in $\mathfrak{P}$, & functio $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$. Deinde ibidem ponatur $x = \frac{f}{g}\sin\phi$, & potestas eius quaeuis $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$; abeatque P in $\mathfrak{p}$, & $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{q}$. Inuentisque hoc modo valoribus litterarum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{p}$ & $\mathfrak{q}$ quantitates $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{a}$ ita definientur, vt sit

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cos\phi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

Fractio ergo ex denominatoris Q factore $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$ oriunda erit:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\phi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx - f\cos\phi)}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)(ff - 2fgx\cos\phi + ggxx)}.$$

EXEMPLUM I.

Si propofita fuerit haec fractio $\frac{x^m}{a+bx^n}$, *cuius denominator* $a+bx^n$ *factorem habeat hunc:* $ff-2fgx\,cof\,\Phi+ggxx$ *inuenire fractionem fimplicem huic factori conuenientem.*

Quoniam hic eft $P=x^m$ & $Q=a+bx^n$, erit $\frac{dQ}{dx}=nbx^{n-1}$, vnde fiet:

$$\mathfrak{P}=\frac{f^m}{g^m}\,cof\,m\,\Phi \quad ; \quad \mathfrak{p}=\frac{f^m}{g^m}\,fin\,m\,\Phi$$

$$\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\,cof(n-1)\Phi \quad ; \quad \mathfrak{q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\,fin(n-1)\Phi.$$

Ex his erit: $\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}$;

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\,fin(n-m-1)\Phi;$$

atque $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\,cof(n-m-1)\Phi.$

Quamobrem erit fractio fimplex quaefita:

$$\frac{2g^{n-m}[f\,fin\Phi.fin(n\,m-1)\Phi+gx\,cof(n-m-1)\Phi-f\,cof\Phi.cf(n-m-1)\Phi]}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\,cof\Phi+ggxx)}$$

feu

$$\frac{2g^{n-m}[gx\,cof(n-m-1)\Phi-f\,cof(n-m)\Phi]}{nbf^{n-m-1}(ff-2fgx\,cof\Phi+ggxx)}.$$

EXEMPLUM II.

Sit propofita haec fractio $\frac{1}{x^m (a+bx^n)}$, *cuius denominator factorem habeat* $ff - 2fgx\cos\Phi + ggxx$, *inuenire fractionem fimplicem inde oriundam.*

Cum fit $P = 1$, & $Q = ax^m + bx^{m+n}$, erit $\frac{dQ}{dx} = max^{m-1} + (m+n)bx^{m+n-1}$, ideoque pofito $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\Phi$ ob $P = x^0$ & $\mathfrak{P} = 1$.

$$\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\Phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\Phi$$

& $\mathfrak{p} = 0$; atque

$$\mathfrak{q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\Phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\Phi$$

Ergo

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} + \frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos n\Phi + \frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Quodfi vero eft $ff - 2fgx\cos\Phi + ggxx$ diuifor ipfius $a + bx^n$, erit $a + \frac{bf^n}{g^n}\cos n\Phi = 0$ & $\frac{bf^n}{g^n}\sin n\Phi = 0$, vnde $aa = \frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}$.

Erit

Erit ergo:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{(m+n)^2 bbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}} - \frac{m(2n+m)aaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}$$

$$= \frac{nnaaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} = \frac{nnbbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Deinde vero erit:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\operatorname{cf}(m+n-1)\phi$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[(m+n)\sin(m+n-1)\phi - m\cos n\phi . \sin(m-1)\phi]$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[n\cos n\phi\sin(m-1)\phi + (m+n)\sin n\phi\cos(m-1)\phi]$$

$$\& \quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} ==$$

$$= \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}[(m+n)\cos(m+n-1)\phi - m\cos n\phi . \cos(m-1)\phi]$$

Vel cum $ff - 2fg\cos\phi + ggxx$ sit quoque diuisor ipsius $ax^{m-1} + bx^{m+n-1}$, erit:

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\phi = 0$$

$$\& \quad \frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\phi = 0,$$

vnde erit:

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\operatorname{cf}(m+n-1)\phi \quad \& \quad \mathfrak{q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\phi$$

seu

$$\mathfrak{Q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\phi \quad \& \quad \mathfrak{q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\phi.$$

Ex quibus refultabit fractio quaefita:

$$+\frac{2g^m\left[f\operatorname{cof} m\phi - gx\operatorname{cof}(m-1)\phi\right]}{naf^{m-1}(ff - 2fgx\operatorname{cof}\phi + ggxx)}.$$

Quae formula ex priori exemplo fequitur, fi ponatur m negatiuum, vnde non opus fuiffet hunc cafum peculiarem conftituiffe.

EXEMPLUM III.

Si huius fractionis $\frac{x^m}{a+bx^n+cx^{2n}}$ *denominator habuerit factorem* $ff - 2fgx\,cof\,\phi + ggxx$, *fractionem fimplicem inueftigare ex hoc factore oriundam.*

Si $ff - 2fgx\operatorname{cof}\phi + ggxx$ eft factor denominatoris $a + bx^n + cx^{2n}$, erit vt fupra oftendimus:

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\operatorname{cof} n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\operatorname{cof} 2n\phi = 0$$

$$\& \quad \frac{bf^n}{g^n}\operatorname{fin} n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\operatorname{fin} 2n\phi = 0.$$

Cum igitur fit $P = x^m$ & $Q = a + bx^n + cx^n$, erit $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}$; vnde efficitur:

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\operatorname{cof} m\phi \quad \& \quad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\operatorname{fin} m\phi:$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\operatorname{cof}(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\operatorname{cof}(2n-1)\phi$$

$$\mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\operatorname{fin}(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\operatorname{fin}(2n-1)\phi.$$

Quam-

Quamobrem habebimus:

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(bb+\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}}\right).$$

At ex duabus prioribus aequationibus est:

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(bb+\frac{2bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)=aa;$$

ideoque

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi=\frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}}-2bb-\frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

quo valore ibi substituto erit:

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2aag^{2n}}{f^{2n}}-bb+\frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

seu

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2(2aag^{4n}-bbf^{2n}g^{2n}+2ccf^{4n})}{ff\,g^{4n-2}}.$$

Deinde erit: $\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(n-m-1)\varphi+\frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin(2n-m-1)\varphi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=$$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(n-m-1)\varphi+\frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin(2n-m-1)\varphi.$$

Quibus valoribus inuentis erit fractio simplex quaesita:

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi+2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx-f\cos\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2)(ff-2fgx\cos\varphi+ggxx)}.$$

417.

417. Hae autem fractiones facilius exprimentur, si ipsos denominatorum factores determinemus. Sit igitur denominator fractionis propositae:

$$a + b x^n$$

cuius factor trinomialis si ponatur:

$$ff - 2fgx \cos\phi + ggxx$$

erit vti in Introductione ostendimus:

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\cos n\phi = 0 \quad \& \quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\phi = 0,$$

cum igitur sit $\sin n\phi = 0$, erit vel $n\phi = (2k-1)\pi$, vel $n\phi = 2k\pi$, priori casu erit $\cos n\phi = -1$, posteriori $\cos n\phi = +1$. Si ergo a & b sint quantitates affirmatiuae, prior casus solus locum habebit, quo fit $a = \frac{bf^n}{g^n}$; ac propterea:

$$f = a^{\frac{1}{n}} \quad \& \quad g = b^{\frac{1}{n}}$$

retineamus autem loco harum quantitatum irrationalium litteras f & g, seu ponamus potius $a = f^n$ & $b = g^n$, ita vt factores inuestigari debeant huius functionis:

$$f^n + g^n x^n$$

Cum igitur sit $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, vbi k numerum quemcunque affirmatiuum integrum designare potest; at vero maiores numeri pro k non sunt sumendi, quam qui reddant $\frac{2k-1}{n}$ vnitate minorem; hinc fractionis propopositae $f^n + g^n x^n$ factores erunt sequentes:

ff —

$$ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx$$

&c.

vbi notandum eſt ſi n ſit numerus impar, vnum factorem haberi binomium hunc:

$$f + gx$$

ſin autem n ſit numerus par, nullus factor aderit binomius.

EXEMPLUM I.

Reſoluere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ *in ſuas fractiones ſimplices.*

Cum denominatoris vnusquisque factor trinomialis contineatur in hac forma:

$$ff - 2fgx\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$$

erit in §. praecedente Exempl. I. $a = f^n$, $b = g^n$, & $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, vnde erit:

$\sin(n-m-1)\phi = \sin(m+1)\phi = \sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$ &

$\cos(n-m-1)\phi = -\cos(m+1)\phi = -\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$.

 Hinc

Hinc ex isto factore oritur fractio simplex haec:

$$\frac{2f\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{(2k-1)}{n}\pi\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\cos\frac{(2k-1)}{n}\pi + ggxx\right)}.$$

Quamobrem fractio proposita resoluetur in has simplices:

$$\frac{2f\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} - ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin\frac{3\pi}{n}.\sin\frac{3(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{3(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin\frac{5\pi}{n}.\sin\frac{5(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{5(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Si ergo n fuerit numerus par, hoc modo omnes oriuntur fractiones simplices; sin autem m sit numerus impar, ob factorem binomium $f+gx$, ad fractiones hoc modo resultantes insuper addi debet haec:

$$\frac{\pm 1}{ng^{n-m-1}g^{m}(f+gx)}$$

vbi signum $+$ valet, si m fuerit numerus par, contra signum $-$. Si m fuerit numerus maior quam n, tum ad

has fractiones accedent insuper partes integrae huiusmodi

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \&c.$$

quamdiu exponentes manent affirmatiui, eritque:

$$Ag^n = 1 \; ; \quad \text{Ergo} \quad A = \frac{1}{g^n}$$

$$Af^n + Bg^n = 0 \quad . \quad . \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n + Cg^n = 0 \quad . \quad . \quad C = +\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n + Dg^n = 0 \quad . \quad . \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c. &c.

EXEMPLUM II.

Resoluere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n + g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices.*

Quod ad factores ipsius $f^n + g^n x^n$ attinet, ex iis oriuntur eaedem fractiones, quas exemplo praecedente eruimus, dummodo ibi sumatur m negatiue: super est igitur tantum, vt fractiones simplices ex denominatoris altero factore x^m definiamus, quod hoc modo commodissime fit: statuatur fractio proposita $= \frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{N}x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}$, eritque

$$\mathfrak{A}f^n = 1 \; ; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{N} = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{N} = -\frac{g^n}{f^n}.$$

 Si

Si $n-m$ adhuc fuerit numerus negatiuus, fimili modo erit operandum, ita vt, fi m fuerit numerus quantumuis magnus, refultent huiusmodi fractiones fimplices

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{\&c.}$$

cuius feriei tot termini funt fumendi, quot habentur ipfius x exponentes affirmatiui in denominatore. Eritque

$$\mathfrak{A}f^n = 1 \;; \qquad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{C} = +\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0 \quad . \quad . \quad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

&c. &c.

Fractio ergo propofita omnino in has fractiones fimplices refoluetur:

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \text{\&c.}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{3\pi}{n}.\sin\frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin\frac{5\pi}{n}.\sin\frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \operatorname{cof}\frac{5(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\operatorname{cof}\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\operatorname{cof}\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

Quibus formulis fi n fuerit numerus impar, ob $f+gx$ factorem denominatoris, infuper adiici debet:

$$\frac{\pm g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

vbi fignorum ambiguorum $\pm$ fuperius valet, fi m fuerit numerus par, inferius vero fi m impar.

418. Confideremus nunc quoque formulam $a+bx^n$, fi b fit numerus negatiuus, fitque propofita haec functio:

$$f^n - g^n x^n$$

cuius primo femper erit factor $f-gx$; atque fi n fit numerus par, quoque $f+gx$ eius erit factor. Reliqui vero erunt trinomiales, quorum forma generalis fi ponatur

$$ff - 2fgx\operatorname{cof}\phi + ggxx$$

erit $f^n - f^n\operatorname{cof}n\phi = 0$ & $f^n\sin n\phi = 0$ fiue $\sin n\phi = 0$ & $\operatorname{cof}n\phi = 1$. Quibus vt fatisfiat, oportet effe $n\phi = 2k\pi$ exiftente k numero quocunque integro, atque propterea erit $\phi = \frac{2k\pi}{n}$. Factor ergo generalis erit:

$$ff - 2fgx\operatorname{cof}\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

fumendo ergo pro $2k$ omnes numeros pares exponente n minores, prodibunt factores trinomiales omnes:

$$ff - 2fgx \cos \frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx \cos \frac{6\pi}{n} + ggxx$$

&c.

EXEMPLUM I.

Resoluere hanc fractionem $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ *in suas fractiones simplices.*

Quoniam denominatoris factor est $f-gx$, inde orietur fractio huiusmodi $\frac{\mathfrak{A}}{f-gx}$, ad cuius numeratorem inueniendum, ponatur $x^m = P$ & $f^n - g^n x^n = Q$, erit $dQ = -ng^n x^{n-1}$, fietque $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1} x^{n-1}}$, posito $x = \frac{f}{g}$. Ergo erit $\mathfrak{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1} g^m}$, hincque fractio simplex ex factore $f - gx$ orta erit:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1} g^m (f - gx)}$$

Si n sit numerus par, quia tum denominatoris factor quoque est $f + gx$, ponatur fractio simplex inde oriunda $= \frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, erit $\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{ng^n x^{n-1}} = \frac{-x^m}{ng^{n-1} x^{n-1}}$, posito

fito $x = \frac{-f}{g}$. Fiet ergo ob $n-1$ numerum imparem $g^{n-1}x^{n-1} = -f^{n-1}$: at erit $x^m = \frac{\pm f^m}{g^m}$, vbi fignum fuperius valet, fi m fuerit numerus par, inferius fi m fit numerus impar. Quare cum fit $\mathfrak{A} = \frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m}$, erit fractio fimplex ex factore $f+gx$ oriunda haec:

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}.$$

Deinde cum factorum trinomialium forma generalis fit:

$$ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx,$$

fi comparatio cum Exemplo 1. §. 416. inftituatur, erit $a = f^n$, $b = -g^n$ & $\phi = \frac{2k\pi}{n}$; vnde $\sin\phi = 0$ & $\cos n\phi = 1$; atque $\sin(n-m-1)\phi = -\sin(m+1)\phi = -\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}$, & $\cos(n-m-1)\phi = \cos(m+1)\phi = \cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}$.

Ex quibus erit fractio fimplex hinc oriunda:

$$\frac{2f\sin\frac{2k\pi}{n}.\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n} + ggxx\right)}$$

Hancobrem fractiones fimplices quaefitae erunt:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}$$

+

$$+\frac{2f\sin\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi}{n}+ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{4\pi}{n}.\sin\frac{4(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi}{n}+ggxx\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{6\pi}{n}.\sin\frac{6(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff-2fgx\cos\frac{6\pi}{n}+ggxx\right)}\ \&c.$$

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio: $\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^{m}(f+gx)}$ cuius signum superius $-$ est sumendum, si m fuerit numerus par, inferius si impar. Praeterea vero si m sit numerus non minor quam n, adiiciendae sunt partes integrae:

$$Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+\&c.$$

quamdiu exponentes non fuerint negatiui, eritque:

$$-Ag^{n}=1 \quad \text{seu} \quad A=-\frac{1}{g^{n}}$$

$$Af^{n}-Bg^{n}=0 \quad .\ .\quad B=-\frac{f^{n}}{g^{2n}}$$

$$Bf^{n}-Cg^{n}=0 \quad .\ .\quad C=-\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^{n}-Dg^{n}=0 \quad .\ .\quad D=-\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

&c. &c.

EX-

EXEMPLUM II.

Resoluere hanc fractionem $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ *in suas fractiones simplices.*

Fractiones quae ex denominatoris factore $f^n - g^n x^n$ oriuntur, eaedem erunt quae ante, dummodo in illis formulis m negatiue accipiatur. Quare ad alterum factorem x^m est respiciendum, ex quo si ponamus has fractiones resultare:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \&c.$$

quae series eousque est continuanda, donec exponentes ipsius x fiant negatiui. Erit vero

$$\mathfrak{A} f^n = 1 \;; \quad \text{Ergo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{B} f^n - \mathfrak{A} g^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{C} f^n - \mathfrak{B} g^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{D} f^n - \mathfrak{C} g^n = 0 \quad . \; . \quad \mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

Fractio ergo proposita resoluetur in has fractiones simplices:

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \&c.$$

$$+ \frac{g^m}{n f^{n+m-1} (f - gx)}$$

+

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{4\pi}{n}\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin\frac{6\pi}{n}\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + ggxx\right)}$$

&c.

quibus si n fuerit numerus par, insuper addi debet haec fractio: $\frac{\mp g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$

quae autem praetermittitur, si n fuerit numerus impar. Signorum ambiguorum vero superius — valet, si m sit numerus par, inferius vero +, si m sit numerus impar.

419. Hoc ergo modo omnes fractiones, quarum denominator ex duobus constat membris huiusmodi $a+bx^n$, in fractiones simplices resoluuntur. At si denominator constet tribus huiusmodi membris $a+bx^n+cx^{2n}$, tum primum videndum est, vtrum is in duos factores reales prioris formae resolui possit. Hoc enim si eueniat, resolutio in fractiones simplices modo ante exposito institui poterit. Si enim proponatur huiusmodi fractio

$$\frac{x^m}{(f^n+g^nx^n)(f^n+h^nx^n)}$$

ea

ea primum in duas fractiones transformabitur huiusmodi:

$$\frac{\alpha x^m}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^m}{f^n + h^n x^n}$$

eritque $\alpha f^n + \beta f^n = 1$ & $\alpha h^n + \beta g^n = 0$, vnde fit

$$\alpha = \frac{1}{f^n} - \beta = -\frac{\beta g^n}{h^n};$$ ideoque habebitur

$$\beta = \frac{h^n}{f^n(h^n - g^n)} \quad \& \quad \alpha = \frac{g^n}{f^n(g^n - h^n)}.$$

Si exponens m fuerit maior quam n, transmutatio in sequentes fractiones erit commodior:

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^{m-n}}{f^n + h^n x^n}$$

qua fit $\alpha + \beta = 0$ & $\alpha h^n + \beta g^n = 1$, ideoque $\alpha = \frac{1}{h^n - g^n}$ & $\beta = \frac{1}{g^n - h^n}$. Vtra autem transformatio adhibeatur, vtraque fractio hoc modo oriunda methodo ante exposita resoluetur in suas fractiones simplices, quae iunctim sumtae fractioni propositae erunt aequales.

420. Simili modo methodus hactenus tradita sufficiet, si denominator ex pluribus membris constet huiusmodi $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + ex^{4n} +$ &c. dummodo is in factores formae $f^n \pm g^n x^n$ resolui queat. Ponamus enim occurrere hanc fractionem in suas fractiones simplices resoluendam:

$$\frac{x^m}{(a - x^n)(b - x^n)(c - x^n)(d - x^n)}.$$

Haec primum refoluetur in has:

$$\frac{Ax^m}{a-x^n}+\frac{Bx^m}{b-x^n}+\frac{Cx^m}{c-x^n}+\frac{Dx^m}{d-x^n}+\&c.$$

quarum numeratores fequenti modo determinabuntur, vt fit

$$A=\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

$$B=\frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$C=\frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)}\ \&c.$$

Hac ergo praeparatione facta, fingulae iftae fractiones methodo ante expofita in fuas fractiones fimplices refoluentur; quae cunctae in vnam fummam erunt colligendae.

421. Quodfi vero huiusmodi denominator $a+bx^n+cx^{2n}+dx^{3n}+\&c.$ non omnes factores formae $f^n+g^nx^n$ habeant reales, bini imaginarii erunt coniungendi. Ponamus ergo huiusmodi binorum factorum productum effe:

$$f^{2n}-2f^ng^nx^n\operatorname{cof}\omega+g^{2n}x^{2n}$$

& cum haec expreffio nullos habeat factores fimplices reales, ponamus factores trinomiales in hac forma generali contineri:

$$ff-2fgx\operatorname{cof}\phi+ggxx$$

quorum numerus erit $=n$. Pofito ergo $x^n=\frac{f^n}{g^n}\operatorname{cof}n\phi$, orietur haec aequatio:

$$1-2\operatorname{cof}\omega.\operatorname{cof}n\phi+\operatorname{cof}2n\phi=0.$$

De-

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$; erit quoque:

$$-2\cos\omega . \sin n\phi + \sin 2n\phi = 0$$

quae diuisa per $\sin n\phi$ dat $\cos n\phi = \cos\omega$, sicque simul priori aequationi satisfit. Erit ergo $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ denotante k numerum quemuis integrum, ideoque erit $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, & factores omnes continebuntur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$

vnde sequentes habebuntur factores:

$$ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx \quad \&c.$$

quorum tot sunt sumendi, donec eorum numerus fiat $= n$.

422. Si igitur proponatur ista fractio in suas fractiones simplices resoluenda:

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}}$$

quoniam denominatoris factor trinomialis quicunque continetur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$

 exi-

existente $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, consideretur ista fractio:

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

illi aequalis, ac ponatur numerator $x^m = P$ ac denominator $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q$: erit $\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}$.

Hinc ponendo $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$; erit:

$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\phi$ seu $\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$ &

$\mathfrak{Q} = f^{2n}[1 - 2(n+1)\cos\omega\cos n\phi + (2n+1)\cos 2n\phi]$.

Cum autem sit $\cos n\phi = \cos\omega$, erit $\cos 2n\phi = 2\cos\omega^2 - 1$; ideoque $\mathfrak{Q} = f^{2n}(-2n + 2n\cos\omega^2) = -2nf^{2n}\sin\omega^2$.

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$, fiet:

$$\mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\phi = \frac{f^m}{g^m}\sin\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n} \quad \&$$

$$\mathfrak{q} = -f^{2n}[2(n+1)\cos\omega\sin n\phi - (2n+1)\sin 2n\phi]$$

ob $\sin 2n\phi = 2\sin n\phi\cos n\phi = 2\cos\omega\sin n\phi$; erit $\mathfrak{q} = 2nf^{2n}\cos\omega\sin n\phi$. Cum autem sit $n\phi = 2k\pi \pm \omega$, erit $\sin n\phi = \pm\sin\omega$ & $\mathfrak{q} = \pm 2nf^{2n}\sin\omega.\cos\omega$.

His inuentis erit: $\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = 4n^2 f^{4n}\sin\omega^2$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\cos m\phi.\sin\omega.\cos\omega + \sin m\phi.\sin\omega)^2$$

siue $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega;\cos(m\phi \mp \omega)$ seu

$\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ —

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\,\text{fin}\,\omega.\text{cof}\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(-\text{cof}\,m\phi\,\text{fin}\,\omega^2\pm\text{fin}\,m\phi.\text{fin}\,\omega\,\text{cf}\,\omega)$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\,\text{fin}\,\omega.\,\text{fin}\,(m\phi\mp\omega)\quad\text{feu}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\,\text{fin}\,\omega.\,\text{fin}\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}.$$

Hinc ex denominatoris factore: $ff-2fgx\,\text{cof}\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx$ nafcitur ifta fractio fimplex:

$$\frac{\pm f\,\text{fin}\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\,\text{cof}\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\pm\text{fin}\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\,\text{cf}\frac{2k\pi\pm\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\,\text{fin}\,\omega\left(ff-2fgx\,\text{cof}\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx\right)}$$

feu

$$\frac{\pm gx\,\text{fin}\frac{2km\pi\pm(m-n)\omega}{n}\pm f\,\text{fin}\frac{2k(m-1)\pi\pm(m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\,\text{fin}\,\omega\left(ff-2fgx\,\text{cof}\frac{2k\pi\pm\omega}{n}+ggxx\right)}.$$

EXEMPLUM.

Refoluere hanc fractionem $\frac{x^{m-1}}{f^{2n}-2f^ng^nx^n\,cof\,\omega+g^{2n}x^{2n}}$ *in fuas fractiones fimplices.*

Iftae fractiones fimplices quaefitae ergo erunt:

$$\frac{+f\,\text{fin}\frac{\omega}{n}\,\text{cof}\frac{(m-n)\omega}{n}+\text{fin}\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\,\text{cof}\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\,\text{fin}\,\omega\left(ff-2fgx\,\text{cof}\frac{\omega}{n}+ggxx\right)}$$

−f

$$\frac{-f\sin\frac{2\pi-\omega}{n}\cos\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\cos\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\sin\frac{4\pi-\omega}{n}\cos\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{4\pi+\omega}{n}\cos\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

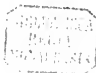
&c.

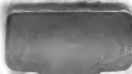
ſicque eousque erit progrediendum, quoad harum fractionum numerus fuerit n. Si m fuerit numerus vel maior quam $2n-1$ vel numerus negatiuus, priori caſu partes integrae, poſteriori vero fractiones inſuper ſunt adiiciendae, quae modo ante expoſito facile inueniuntur.

BEROLINI

EX OFFICINA MICHAELIS.







Haec primum resoluetur in has:

$$\frac{Ax^m}{a-x^n}+\frac{Bx^m}{b-x^n}+\frac{Cx^m}{c-x^n}+\frac{Dx^m}{d-x^n}+\&c.$$

quarum numeratores sequenti modo determinabuntur, vt sit

$$A=\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

$$B=\frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

$$C=\frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)}\ \&c.$$

Hac ergo praeparatione facta, singulae istae fractiones methodo ante exposita in suas fractiones simplices resoluentur; quae cunctae in vnam summam erunt colligendae.

421. Quodsi vero huiusmodi denominator $a+bx^n+cx^{2n}+dx^{3n}+\&c.$ non omnes factores formae $f^n+g^nx^n$ habeant reales, bini imaginarii erunt coniungendi. Ponamus ergo huiusmodi binorum factorum productum esse:

$$f^{2n}-2f^ng^nx^n\cos\omega+g^{2n}x^{2n}$$

& cum haec expressio nullos habeat factores simplices reales, ponamus factores trinomiales in hac forma generali contineri:

$$ff-2fgx\cos\varphi+ggxx$$

quorum numerus erit $=n$. Posito ergo $x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$, orietur haec aequatio:

$$1-2\cos\omega.\cos n\varphi+\cos 2n\varphi=0.$$

De-

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$; erit quoque:

$$-2\cos\omega . \sin n\phi + \sin 2n\phi = 0$$

quae diuisa per $\sin n\phi$ dat $\cos n\phi = \cos\omega$, sicque simul priori aequationi satisfit. Erit ergo $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ denotante k numerum quemuis integrum, ideoque erit $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, & factores omnes continebuntur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$
vnde sequentes habebuntur factores:

$$ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos\frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx \quad \&c.$$

quorum tot sunt sumendi, donec eorum numerus fiat $= n$.

422. Si igitur proponatur ista fractio in suas fractiones simplices resoluenda:

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}};$$

quoniam denominatoris factor trinomialis quicunque continetur in hac forma: $ff - 2fgx\cos\phi + ggxx$

 exi-

existente $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, consideretur ista fractio:

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^ng^nx^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

illi aequalis, ac ponatur numerator $x^m = P$ ac denominator $f^{2n}x - 2f^ng^nx^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q$: erit $\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^ng^nx^n\cos\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}$.

Hinc ponendo $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\phi$; erit:

$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\phi$ seu $\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos\frac{m(2k\pi\pm\omega)}{n}$ &

$\mathfrak{Q} = f^{2n}[1-2(n+1)\cos\omega\cos n\phi + (2n+1)\cos 2n\phi]$.

Cum autem sit $\cos n\phi = \cos\omega$, erit $\cos 2n\phi = 2\cos\omega^2 - 1$;

ideoque $\mathfrak{Q} = f^{2n}(-2n+2n\cos\omega^2) = -2nf^{2n}\sin\omega^2$.

Deinde posito $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\phi$, fiet:

$$\mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\phi = \frac{f^m}{g^m}\sin\frac{m(2k\pi\pm\omega)}{n} \quad \&$$

$$\mathfrak{q} = -f^{2n}[2(n+1)\cos\omega\sin n\phi - (2n+1)\sin 2n\phi]$$

ob $\sin 2n\phi = 2\sin n\phi\cos n\phi = 2\cos\omega\sin n\phi$; erit $\mathfrak{q} = 2nf^{2n}\cos\omega\sin n\phi$. Cum autem sit $n\phi = 2k\pi\pm\omega$, erit $\sin n\phi = \pm\sin\omega$ & $\mathfrak{q} = \pm 2nf^{2n}\sin\omega.\cos\omega$.

His inventis erit: $\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = 4n^2f^{4n}\sin\omega^2$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\cos m\phi.\sin\omega.\cos\omega + \sin m\phi.\sin\omega)^2$$

sive $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin\omega.\cos(m\phi\mp\omega)$ seu

$\mathfrak{P}\mathfrak{q} -$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \cos\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} (-\cos m\phi \sin\omega^2 \pm \sin m\phi . \sin\omega \cos\omega)$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \sin(m\phi \mp \omega) \quad \text{seu}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega . \sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}.$$

Hinc ex denominatoris factore: $ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$ nascitur ista fractio simplex:

$$\frac{\pm f \sin\frac{2k\pi \pm \omega}{n} \cos\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm \sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n}\right)}{nf^{2n-m} g^{m-1} \sin\omega \left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx\right)}$$

seu

$$\frac{\pm gx \sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm f \sin\frac{2k(m-1)\pi \pm (m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m} g^{m-1} \sin\omega \left(ff - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx\right)}.$$

EXEMPLUM.

Resoluere hanc fractionem $\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}}$ *in suas fractiones simplices.*

Istae fractiones simplices quaesitae ergo erunt:

$$\frac{+ f \sin\frac{\omega}{n} \cos\frac{(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m} g^{m-1} \sin\omega \left(ff - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + ggxx\right)}$$

— f

$$\frac{-f\sin\frac{2\pi-\omega}{n}\cos\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{2\pi+\omega}{n}\cos\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\sin\frac{4\pi-\omega}{n}\cos\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}-\sin\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4x-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi-\omega}{n}+ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\sin\frac{4\pi+\omega}{n}\cos\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(ff-2fgx\cos\frac{4\pi+\omega}{n}+ggxx\right)}$$

&c.

ſicque eousque erit progrediendum, quoad harum fractionum numerus fuerit n. Si m fuerit numerus vel maior quam $2n-1$ vel numerus negatiuus, priori caſu partes integrae, poſteriori vero fractiones inſuper ſunt adiiciendae, quae modo ante expoſito facile inueniuntur.

BEROLINI
EX OFFICINA MICHAELIS.



